

Componenti

pag. 410

Osservazione. *Sia V uno spazio vettoriale, sia $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ una sua base e sia $\mathbf{v}$ un vettore di V .*

Poiché $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ è un sistema di generatori, esistono scalari $x_1, \dots, x_n$ tali che

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Il fatto che $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ sia anche linearmente indipendente implica che gli scalari $x_1, \dots, x_n$ sono univocamente determinati, cioè sono gli unici possibili che (rispettivamente assegnati ai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$) diano $\mathbf{v}$.

Infatti, supponiamo che si abbia anche

$$\mathbf{v} = y_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + y_n \mathbf{v}_n$$

per certi scalari $y_1, \dots, y_n$. Allora abbiamo

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = (x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n) - (y_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + y_n \mathbf{v}_n).$$

Ma $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$, e con un po' di semplici passaggi otteniamo che

$$(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) - (y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n)$$

è uguale a

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n .$$

Dunque abbiamo

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Questa è una combinazione lineare nulla di

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$$

con scalari

$$(x_1 - y_1), \dots, (x_n - y_n) .$$

Siccome $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ è linearmente indipendente, questi scalari sono nulli, cioè si deve avere

$$x_1 = y_1 , \dots , x_n = y_n .$$

Quindi qualsiasi combinazione di $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ che dia $\mathbf{v}$ deve essere fatta con gli scalari uguali a $x_1, \dots, x_n$.

Se abbiamo un riferimento vettoriale, quindi con i vettori di una base “organizzati in una n -upla”, allora gli scalari che danno $\mathbf{v}$ formano anch’essi una ben determinata n -upla.

Definizione. Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ un riferimento vettoriale di uno spazio vettoriale V e sia $\mathbf{v}$ un vettore di V . L'unica n -pla di scalari $(x_1, \dots, x_n)$ tale che

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$$

si dice n -pla delle componenti di $\mathbf{v}$ rispetto al riferimento vettoriale $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Bisogna stare un po' attenti quando V è uguale allo spazio $\mathbb{R}^n$. Se infatti $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ è una base, allora le componenti di $(a_1, \dots, a_n)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono in generale diverse dalle componenti di $(a_1, \dots, a_n)$ intese nel senso della definizione data nel paragrafo di fondamentali (cioè i numeri $a_1, \dots, a_n$).

Base standard

pag. 419

Consideriamo i vettori numerici di $\mathbb{R}^n$ dati dalle righe (o anche dalle colonne) della matrice identica I_n :

$$(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) .$$

Questo sistema costituisce una base di $\mathbb{R}^n$.

Definizione. *Il sistema costituito dai vettori numerici di $\mathbb{R}^n$ dati dalle righe della matrice identica I_n :*

$$\left[(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) \right].$$

*si dice **base standard** di $\mathbb{R}^n$.*

La n -upla

$\left((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1) \right)$

si dice riferimento vettoriale standard di $\mathbb{R}^n$.

Le componenti di un vettore $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base standard sono proprio $a_1, \dots, a_n$.

Sottospazi

pag. 425

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto W di V sarà detto **sottospazio** (vettoriale) se sono verificati i seguenti fatti:

$$\bullet \quad \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W \quad \implies \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W;$$

$$\bullet \quad r \in \mathbb{R}, \mathbf{w} \in W \quad \implies \quad r\mathbf{w} \in W.$$

Osservazione. Se W è un sottospazio di V , utilizzando l'addizione e la moltiplicazione per scalari definite su V possiamo definire le restrizioni su W :

$$\begin{aligned} W \times W &\rightarrow W \\ (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &\mapsto \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times W &\rightarrow W \\ (h, \mathbf{w}) &\mapsto h\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Poiché le proprietà richieste per gli spazi vettoriali valgono “in tutto V ”, a maggior ragione valgono in W (per l'esistenza dell'elemento neutro e dell'opposto bisogna tenere presente che per ogni $\mathbf{v} \in V$, $0 = 0\mathbf{v}$ e $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$).

Dunque il sottospazio W , dotato delle due operazioni ora introdotte, è uno spazio vettoriale.

Proposizione. *Sia $S = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V . L'insieme dei vettori che dipendono da S è un sottospazio vettoriale di V .*

Tralasciamo la (facilissima) dimostrazione.

Definizione. Sia $S = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V . L'insieme dei vettori che dipendono da S si dice sottospazio generato da S , e si indica generalmente con $L(S)$ o con $\langle S \rangle$.

Osservazione. Se S è un sistema di vettori di uno spazio V si ha

S è un sistema di generatori di $V \iff \langle S \rangle = V$.

Esempio. Sia W l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x = y$. Allora W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Osservazione. *Ogni sottospazio W di uno spazio vettoriale V , ha lo stesso vettore nullo di V . Infatti, essendo non vuoto, ha almeno un vettore w , e allora $0 = 0w \in W$ (e questo deve per forza essere elemento neutro per l'addizione in W).*

Proposizione. *Se $(W_i)_{i \in I}$ è una famiglia di sottospazi di un spazio V , allora l'intersezione*

$$\bigcap_{i \in I} W_i$$

è un sottospazio di V .

Dimostrazione. Chiaramente $W := \bigcap_{i \in I} W_i$ è un sottoinsieme di V , ed è non vuoto perché $0 \in W$. Prendiamo $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ ed $r \in \mathbb{R}$. Comunque si prenda un indice $i \in I$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ devono appartenere a W_i , che è un sottospazio; quindi $\mathbf{w} + \mathbf{w}'$ ed $r\mathbf{w}$ appartengono ad W_i . E dunque $\mathbf{w} + \mathbf{w}'$ ed $r\mathbf{w}$ appartengono all'intersezione W . Questo prova che W è un sottospazio. $\square$

Definizione. Se $(W_i)_{i \in I}$ è una famiglia di sottospazi di un spazio vettoriale, allora l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono il sottoinsieme

$$\bigcup_{i \in I} W_i$$

si dice che è il sottospazio somma della famiglia $(W_i)_{i \in I}$, e si può denotare con

$$\sum_{i \in I} W_i .$$

Nel caso di una n -upla $(W_1, \dots, W_n)$ si può usare anche la notazione per esteso

$$W_1 + \dots + W_n$$

per il sottospazio somma.

Proposizione. *Siano W_1, W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale. Allora si ha*

$$W_1 + W_2 = \{ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{w}_2 \in W_2 \} .$$

Dimostrazione. Poniamo

$$W := \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ e } \mathbf{w}_2 \in W_2\}$$

e dimostriamo che è uguale a $W_1 + W_2$, cioè all'intersezione di tutti i sottospazi che contengono $W_1 \cup W_2$.

Se un qualunque sottospazio U contiene $W_1 \cup W_2$, un qualunque elemento di W , che per definizione è del tipo $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ con $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ deve appartenere ad U , perché $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ appartengono ad U ed U è un sottospazio. Quindi ogni sottospazio che contiene $W_1 \cup W_2$, contiene anche W . Dunque W è contenuto nell'intersezione di tutti questi sottospazi, cioè in $W_1 + W_2$.

Ma si verifica facilmente che W è anche lui un sottospazio che contiene $W_1 \cup W_2$. Quindi W contiene $W_1 + W_2$ che è l'intersezione di *tutti* i sottospazi che contengono $W_1 \cup W_2$.

Avendo visto che $W \subseteq W_1 + W_2$ e $W \supseteq W_1 + W_2$, concludiamo che $W = W_1 + W_2$, come volevamo.

□

Proposizione. *Siano W_1, W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ allora per ogni $w \in W_1 + W_2$ esiste un'unica coppia*

$$(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$$

tale che $w = w_1 + w_2$.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente sappiamo che c'è una coppia $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2$ tale che $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Supponiamo che anche per un'altra coppia $(\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2) \in W_1 \times W_2$ si abbia $\mathbf{w} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$. Allora

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1) + (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}'_2) \\ &= (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - (\mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2) = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0} , \end{aligned}$$

da cui

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}'_2 = -(\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) .$$

Ma siccome $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}'_2 \in W_2$ e $-(\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) \in W_1$, visto che sono lo stesso vettore, questo deve essere un vettore dell'intersezione $W_1 \cap W_2$, che è $\{0\}$. E allora

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}'_2 = -(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1) = 0 .$$

Concludiamo che $\mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}'_2 = \mathbf{w}_2$, cioè $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2$ è l'unica possibile coppia tale che $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. $\square$

Definizione. *Siano W_1, W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ allora si dice che la somma $W_1 + W_2$ è diretta, e si può anche indicare con*

$$W_1 \oplus W_2 .$$

Menzioniamo anche che i risultati sulla decomposizione in somma ora visti per due sottospazi W_1 e W_2 , possono essere estesi al caso generale di una famiglia di sottospazi $(W_i)_{i \in I}$. Per avere poi un'unica decomposizione, e quindi una somma diretta, ci vuole la condizione che per ogni i si abbia

$$W_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j = \{0\} .$$

Esiste poi anche una nozione “esterna” di somma diretta di due spazi vettoriali qualunque (che non siano cioè sottospazi di uno stesso spazio). Basta osservare quanto segue.

Osservazione. *Se V_1 e V_2 sono spazi vettoriali (sui reali), allora il prodotto cartesiano $V_1 \times V_2$, insieme alle operazioni date da*

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) := (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2)$$

e

$$r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := (r\mathbf{v}_1, r\mathbf{v}_2) \ ,$$

è uno spazio vettoriale (sui reali).

Definizione. *Lo spazio vettoriale presentato nell'osservazione precedente, viene detto somma diretta (esterna) degli spazi V_1 e V_2 e viene anche questo denotato con $V_1 \oplus V_2$.*

Nel caso di due sottospazi W_1, W_2 con intersezione $\{0\}$, la somma diretta come sottospazio non è a rigore uguale alla somma diretta esterna. È comunque vero che ogni vettore del sottospazio somma diretta è del tipo $w_1 + w_2$ per un'unica coppia (w_1, w_2) e, viceversa, ovviamente per ogni (w_1, w_2) nella somma diretta esterna c'è un unico vettore $w_1 + w_2$ nel sottospazio somma diretta.

Formula di Grassmann

pag. 449

Proposizione. *Sia W un sottospazio di uno spazio finitamente generato V . Allora anche W è finitamente generato e si ha*

$$\dim W \leq \dim V .$$

Dimostrazione. Detta n la dimensione di V , per il lemma di Steinitz un sistema indipendente di vettori di V non può avere più di n vettori. Possiamo quindi considerare, tra tutti i sistemi linearmente indipendenti di vettori di W , uno che abbia l'ordine il più grande possibile, diciamo $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$ (e avremo comunque $m \leq n$).

Dunque se $\mathbf{w}$ è un qualunque vettore di W , il sistema $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}]$ è linearmente dipendente. Per una proprietà della dipendenza lineare, $\mathbf{w}$ dipende da $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$. Dunque $[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$ è una base di W . Quindi W è finitamente generato e ha dimensione $m \leq n = \dim V$. $\square$

La formula nella seguente proposizione viene detta *formula di Grassmann*.

Proposizione. *Siano W_1, W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale. Se W_1, W_2 sono finitamente generati, anche $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ sono finitamente generati e si ha*

$$\begin{aligned} \dim (W_1 \cap W_2) + \dim (W_1 + W_2) \\ = \dim W_1 + \dim W_2 . \end{aligned}$$

Tralasciamo per il momento la dimostrazione.

Spazi di vettori liberi

pag. 454

Esempi importanti di sottospazi sono forniti dalla geometria dello spazio ordinario. Prima di esporli, facciamo la seguente semplice osservazione.

Osservazione. *Sia X una retta o un piano, sia A un punto di X e sia $\mathbf{v}$ un vettore libero. Allora*

$$\mathbf{v} \text{ è parallelo ad } X \iff A + \mathbf{v} \in X .$$

Infatti, se $\mathbf{v}$ è il vettore nullo la cosa è ovvia (le condizioni sono entrambe vere); se invece $\mathbf{v} \neq 0$, posto $B = A + \mathbf{v}$, siccome la retta r_{AB} ha in comune con X il punto A , essa è parallela ad X se e solo se lo è impropriamente, e quindi se e solo se $B \in X$.

Esempio. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia X una retta o un piano e sia $\mathcal{W}$ l'insieme dei vettori paralleli ad X .

Siccome l'insieme $\mathcal{W}$ contiene sicuramente il vettore nullo, esso è non vuoto.

Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$ allora, scelto un qualunque punto $A \in X$ si ha che $(A + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_2 \in X$, quindi $A + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in X$ e dunque $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$.

Inoltre, per definizione di prodotto per un numero $r \in \mathbb{R}$, il vettore $r\mathbf{w}_1$ è parallelo a $\mathbf{w}_1$, e dunque è parallelo ad X . Quindi $r\mathbf{w}_1 \in \mathcal{W}$.

Questo prova che $\mathcal{W}$ è un sottospazio di $\mathcal{V}$.

Osservazione. Sia $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ un vettore libero ordinario. Per definizione del prodotto per un numero reale h , $h\mathbf{u}$ è parallelo a $\mathbf{u}$. Se, viceversa, $\mathbf{v}$ è un vettore libero parallelo a $\mathbf{u}$, prendendo

$$h = \begin{cases} \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} & \text{se } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono concordi,} \\ -\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} & \text{se } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ non sono concordi.} \end{cases}$$

abbiamo $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$.

Notiamo pure che questo equivale a dire che $\mathbf{v}$ dipende dal sistema $[\mathbf{u}]$.

In conclusione, dato un vettore libero non nullo $\mathbf{u}$ abbiamo

$$\mathbf{v} \text{ parallelo a } \mathbf{u} \iff \exists h \mid \mathbf{v} = h\mathbf{u}$$

$$\iff \mathbf{v} \text{ dipende dal sistema } [\mathbf{u}] .$$

Proposizione. *Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia r una retta e sia $\mathcal{W}$ lo spazio dei vettori paralleli ad r . Allora*

$$\dim \mathcal{W} = 1 .$$

Dimostrazione. Presi punti distinti $A, B \in r$, il vettore $\mathbf{u} := B - A$ è non nullo ed appartiene a $\mathcal{W}$. Dunque $[\mathbf{u}]$ è un sistema linearmente indipendente di $\mathcal{W}$.

Se $\mathbf{v}$ è un qualunque vettore di $\mathcal{W}$, essendo parallelo ad r , è parallelo anche a $\mathbf{u}$. E allora $\mathbf{v}$ dipende da $[\mathbf{u}]$. Dunque $[\mathbf{u}]$ è anche un sistema di generatori, e quindi una base, di $\mathcal{W}$.

In conclusione, $\dim \mathcal{W} = 1$ perché ha una base di ordine 1. $\square$

Osservazione. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vettori liberi ordinari.

Supponiamo per il momento che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano paralleli. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, allora il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è linearmente dipendente. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è ovviamente linearmente dipendente.

Se viceversa $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è linearmente dipendente allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devono essere paralleli.

In conclusione

$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ linearmente dipendente

$\iff \mathbf{u}, \mathbf{v}$ paralleli.

Proposizione. *Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi ordinari, sia π un piano e sia $\mathcal{W}$ lo spazio dei vettori paralleli a π . Allora*

$$\dim \mathcal{W} = 2 .$$

Dimostrazione. Possiamo certamente fissare due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non paralleli tra loro, e paralleli a π (ad esempio prendendo $P, Q, R \in \pi$ non allineati e ponendo $\mathbf{u} := Q - P$ e $\mathbf{v} := R - P$). Quindi il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è linearmente indipendente.

Sia poi $\mathbf{w}$ un qualunque vettore di $\mathcal{W}$, cioè parallelo a π . Fissiamo un punto $A \in \pi$. Il punto

$$B := A + \mathbf{w}$$

appartiene a π . Consideriamo la retta r passante per A e parallela a $\mathbf{u}$, e la retta s passante per B e parallela a $\mathbf{v}$.

Poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli a π , queste rette sono parallele a π , ed passando ciascuna per un punto di π , devono essere tutte contenute in π . Siccome $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono paralleli tra loro, anche r ed s non sono parallele, ed essendo contenute in uno stesso piano (π) si devono intersecare in un (unico) punto O .

Poiché $O - A$ è parallelo a $\mathbf{u}$ (e $\mathbf{u}$ è non nullo), esiste uno scalare h tale che

$$O - A = h\mathbf{u} .$$

Analogamente, esiste k tale che

$$B - O = k\mathbf{v} .$$

Quindi

$$\mathbf{w} = B - A = (O - A) + (B - O) = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} .$$

Dunque w dipende da $[u, v]$. Questo prova che il sistema $[u, v]$ (oltre ad essere linearmente indipendente) è anche un sistema di generatori di $\mathcal{W}$; quindi è una base di $\mathcal{W}$.

In conclusione, $\dim \mathcal{W} = 2$ perché ha una base di ordine 2. $\square$

Proposizione. *Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi ordinari. Allora*

$$\dim \mathcal{V} = 3 .$$

Dimostrazione (cenno). Prendiamo un piano π , un punto $O \in \pi$, un punto $P \notin \pi$ e due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralleli a π , ma non paralleli tra loro. Il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è una base per lo spazio dei vettori paralleli a π . Dunque se $\mathbf{c}$ è una qualsiasi combinazione lineare del sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, allora $\mathbf{c}$ è parallelo a π e di conseguenza $O + \mathbf{c} \in \pi$. Quindi, poiché $\mathbf{w} := P - O$ non dipende da $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Per una proprietà della dipendenza lineare, il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ è linearmente indipendente.

Sia poi $\mathbf{z}$ un qualunque vettore libero. Poniamo $Q := O + \mathbf{z}$, sia r la retta per Q parallela a $\mathbf{w}$. Poiché r non è parallela a π , interseca π in un (solo) punto H . Abbiamo che $Q - H$ è parallelo a $\mathbf{w}$ e $H - O$ è parallelo a π . Da ciò ricaviamo che $H - O = h\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ per certi scalari h, k , e $Q - H = l\mathbf{w}$ per un certo scalare l . Quindi

$$\mathbf{z} = Q - O = (H - O) + (Q - H) = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} + l\mathbf{w} .$$

Questo prova che il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ (oltre ad essere linearmente indipendente) è anche un sistema di generatori di $\mathcal{V}$; quindi è una base di $\mathcal{V}$.

In conclusione, $\dim \mathcal{V} = 3$ perché ha una base di ordine 3. $\square$

Applicazioni lineari

pag. 472

Definizione. *Siano V e W spazi vettoriali (sui reali). Un'applicazione*

$$f : V \longrightarrow W$$

*si dice **lineare** se comunque si prendano vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e uno scalare h , si ha*

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$
- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$.

*Le applicazioni lineari vengono anche dette **omomorfismi**.*

pag. 474

*Un applicazione lineare con insieme d'arrivo $\mathbb{R}$ viene anche detta **forma lineare**.*

pag. 475

Proposizione. *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora si ha*

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

(qui abbiamo indicato con lo stesso simbolo $\mathbf{0}$ i vettori nulli di V e W).

Dimostrazione. Abbiamo

$$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0) = 0 .$$

Oppure (più elementarmente) possiamo anche ragionare così:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(0) - f(0) = f(0 + 0) - f(0) \\ &= f(0) - f(0) = 0 . \end{aligned}$$



Proposizione. *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha*

$$f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}) .$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$f(-\mathbf{v}) = f((-1)\mathbf{v}) = (-1)f(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}) .$$

Oppure (più elementarmente) possiamo anche ragionare così:

$$f(-\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) = f(-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} ,$$

e dunque $f(-\mathbf{v})$ è l'opposto di $f(\mathbf{v})$, come volevamo. $\square$

Proposizione. *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali. Se $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ è un sistema di vettori linearmente dipendente, allora anche $[f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)]$ è un sistema di vettori linearmente dipendente.*

Dimostrazione. Siccome $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ è linearmente dipendente, esistono scalari $h_1, \dots, h_n$ non tutti nulli tali che

$$h_1 \mathbf{u}_1 + \dots + h_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} .$$

Dunque si ha

$$f(h_1 \mathbf{u}_1 + \dots + h_n \mathbf{u}_n) = f(\mathbf{0}) .$$

Applicando varie volte le proprietà

- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$
- $f(h\mathbf{v}_1) = hf(\mathbf{v}_1)$,

si ha

$$f(h_1\mathbf{u}_1 + \cdots + h_n\mathbf{u}_n) = h_1f(\mathbf{u}_1) + \cdots h_nf(\mathbf{u}_n) .$$

Siccome si ha anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, otteniamo

$$h_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots h_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0} .$$

Poiché gli scalari non sono tutti nulli, questo prova che $[f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)]$ è linearmente dipendente, come volevamo. $\square$

Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione che ad ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ associa il vettore nullo $(0,0,0)$. Si verifica molto facilmente che f è lineare. Notiamo che il sistema

$$[(1, 0), (0, 1)]$$

è linearmente indipendente, mentre il sistema

$$[f((1, 0)), f((0, 1))] ,$$

essendo costituito da vettori nulli, non è linearmente indipendente.

Possiamo dire che le applicazioni lineari conservano sempre la dipendenza, ma non sempre conservano l'indipendenza.

Proposizione. *Siano $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow X$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali (sui reali). Allora l'applicazione composta $g \circ f$ è lineare.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vettori di V e h uno scalare. Si ha

$$(g \circ f)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = g(f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2))$$

$$\stackrel{f \text{ lineare}}{=} g(f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2))$$

$$\stackrel{g \text{ lineare}}{=} g(f(\mathbf{v}_1)) + g(f(\mathbf{v}_2))$$

$$= (g \circ f)(\mathbf{v}_1) + (g \circ f)(\mathbf{v}_2)$$

e anche

$$(g \circ f)(h\mathbf{v}_1) = g(f(h\mathbf{v}_1))$$

$$\stackrel{f \text{ lineare}}{=} g(hf(\mathbf{v}_1)) \stackrel{g \text{ lineare}}{=} hg(f(\mathbf{v}_1))$$

$$= h(g \circ f)(\mathbf{v}_1) .$$

Quindi $g \circ f$ è lineare, come volevamo. $\square$

Proposizione. *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare biettiva. Allora l'applicazione inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ è lineare.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ e $h \in \mathbb{R}$.
Per definizione di applicazione inversa, per ogni
vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$f^{-1}(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad (1)$$

e per ogni vettore $\mathbf{w} \in W$ si ha

$$f(f^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w} . \quad (2)$$

Quindi si ha

$$f^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$$

$$\stackrel{(2)}{=} f^{-1} \left(f \left(f^{-1}(\mathbf{w}_1) \right) + f \left(f^{-1}(\mathbf{w}_2) \right) \right) \stackrel{f \text{ lineare}}{=}$$

$$= f^{-1} \left(f \left(f^{-1}(\mathbf{w}_1) + f^{-1}(\mathbf{w}_2) \right) \right)$$

$$= f^{-1}(\mathbf{w}_1) + f^{-1}(\mathbf{w}_2) .$$

In maniera simile si dimostra che

$$f^{-1}(h\mathbf{w}_1) = hf^{-1}(\mathbf{w}_1) .$$

Dunque f^{-1} è lineare. $\square$

Isomorfismi

pag. 492

Definizione. *Un'applicazione lineare e biettiva $f : V \rightarrow W$ viene detta isomorfismo tra V e W . Se esiste un tale isomorfismo, V e W vengono detti isomorfi.*

Esempio. *Sia V uno spazio vettoriale. L'applicazione identica*

$$\text{id}_V : V \rightarrow V$$

(cioè l'applicazione che ad ogni vettore di V associa sé stesso) è un isomorfismo.

Osservazione. Siccome abbiamo visto poco fa che l'inversa di un'applicazione lineare biettiva (cioè un isomorfismo) è lineare, poiché è anche biettiva, concludiamo che l'inversa di un'isomorfismo è ancora un isomorfismo.

Osservazione. Se $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow X$ sono isomorfismi, $g \circ f$ è un'isomorfismo tra V e X .

Osservazione. *Le osservazioni fatte sopra implicano facilmente che la relazione “essere isomorfi” in un insieme di spazi vettoriali è una relazione d’equivalenza.*

Esempio. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ una sua base. Abbiamo visto che l'applicazione

$$c_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che ad ogni vettore di V associa il vettore numerico delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$, è un'applicazione lineare. Poiché tale applicazione è anche biettiva, essa è un'isomorfismo.

Osservazione. *Dall'esempio ora esposto deduciamo che un qualunque spazio vettoriale (sui reali) di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Proposizione. *Sia $f : V \rightarrow W$ un'isomorfismo tra spazi vettoriali. Se*

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$$

è un sistema di vettori linearmente indipendente, allora anche

$$[f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)]$$

è un sistema di vettori linearmente indipendente.

Dimostrazione. Se per assurdo $[f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)]$ fosse linearmente dipendente, il sistema

$$\left[f^{-1}(f(\mathbf{v}_1)), \dots, f^{-1}(f(\mathbf{v}_n)) \right]$$

sarebbe linearmente dipendente, il che va contro l'ipotesi perché tale sistema è proprio $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$. Dunque $[f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)]$ deve essere per forza linearmente indipendente, come volevamo. $\square$

Abbiamo quindi visto che, mentre un'applicazione lineare non sempre conserva l'indipendenza, un'isomorfismo lo fa. In effetti gli isomorfismi conservano molte più cose! Parlando informalmente, se in uno spazio vettoriale V vale una proprietà $\mathcal{P}$, e questa proprietà $\mathcal{P}$ ha a che fare solo con le operazioni (di addizione e moltiplicazione per scalari), ma non con le caratteristiche “interne” dei singoli vettori, allora $\mathcal{P}$ vale anche in ogni spazio vettoriale isomorfo a V .

Osservazione. *Poiché gli isomorfismi conservano sia l'indipendenza che la dipendenza, due spazi isomorfi devono avere la stessa dimensione.*

Viceversa, se due spazi vettoriali (finitamente generati) hanno la stessa dimensione n , allora sono isomorfi perché sono tutti e due isomorfi ad $\mathbb{R}^n$ e la relazione di isomorfismo tra spazi è transitiva.