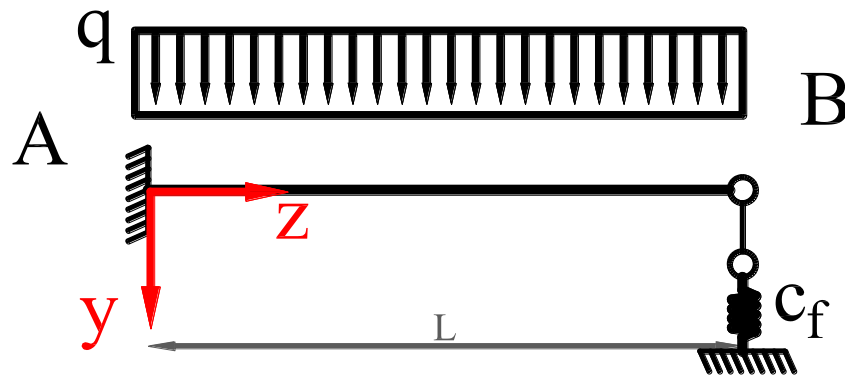


Esercizio risolto: integrazione della linea elastica



Si consideri la trave a singola campata in figura sottoposta a carico costante q e con appoggio in B dotato di una rigidezza c_f . Di detta trave si vuol determinare, mediante integrazione della linea elastica secondo il modello di Eulero-Bernoulli, le equazioni ed i diagrammi di:

- Componente verticale dello spostamento $v(z)$;
- Rotazione $\varphi(z)$;
- Momento flettente e taglio.

Le condizioni elastiche del modello di trave alla Eulero-Bernoulli consistono in relazioni di tipo differenziale tra le caratteristiche della sollecitazione (Taglio e Momento flettente) e le funzioni cinematiche (Rotazione e spostamento). In particolare, fissato un sistema di riferimento xyz come in figura (x è ortogonale al foglio ed uscente), si hanno le prime due condizioni di equilibrio interno:

$$\frac{\partial T(z)}{\partial z} = -q(z)$$

$$\frac{\partial M(z)}{\partial z} = T(z)$$

Inoltre, il modello di Eulero-Bernoulli introduce una relazione costitutiva tra il momento flettente e la curvatura $\chi(z)$:

$$\frac{M(z)}{EI} = \chi(z)$$

dove E rappresenta il modulo di Young del materiale costituente la trave ed I il momento d'inerzia della sezione retta, supposta costante in questo esempio, intorno all'asse x .

La curvatura $\chi(z)$ viene definita geometricamente come la derivata prima della rotazione, quindi è possibile introdurre due ulteriori condizioni geometriche o cinematiche:

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = \chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

$$\frac{\partial v(z)}{\partial z} = -\varphi(z)$$

in quest'ultima, il segno negativo dipende dal fatto che la componente verticale dello spostamento ha verso positivo orientato in basso e la rotazione ha segno positivo se antioraria.

Considerando tutte le condizioni di equilibrio e cinematiche sinora introdotte, è possibile ricavare tutte le funzioni di interesse mediante integrazione a partire dal carico. In particolare, per calcolare lo spostamento, occorre integrare il carico quattro volte.

Essendo $q(z)$ una funzione costante, la linea elastica $v(z)$ sarà sicuramente un polinomio di quarto grado. Per questo motivo, si può procedere scrivendo un polinomio generico con coefficienti incogniti che rappresenti $v(z)$:

$$v(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$$

E di conseguenza è possibile ricavare le altre funzioni:

$$\varphi(z) = -v'(z) = -a_1 - 2a_2z - 3a_3z^2 - 4a_4z^3$$

$$\frac{M(z)}{EI} = -v''(z) = -2a_2 - 6a_3z - 12a_4z^2$$

$$\frac{T(z)}{EI} = -v'''(z) = -6a_3 - 24a_4z$$

$$\frac{q(z)}{EI} = v^{IV}(z) = 24a_4$$

dove il numero romano in apice I – IV rappresenta l'ordine della derivata rispetto a z .

Tutte queste condizioni sono di tipo differenziale, ovvero, non sono in grado di dirci il *valore esatto* delle funzioni di interesse, ma solamente la loro variabilità lungo la trave, ed infatti determinano una *forma* (per via della *struttura* dei polinomi) ma non il *valore* (per via dei coefficienti incogniti). Dal punto di vista matematico, le equazioni testé ricavate rappresentano un *integrale generale* del problema differenziale della linea elastica. Per ricavare l'*integrale particolare* (ovvero la soluzione esatta), è necessario introdurre alcune *condizioni a contorno* (o *condizioni ai limiti*) che dipendono dai vincoli e dai carichi applicati alla struttura.

In particolare, l'incastro in A (corrispondente a $z = 0$) impone l'annullarsi delle componenti di spostamento e della rotazione:

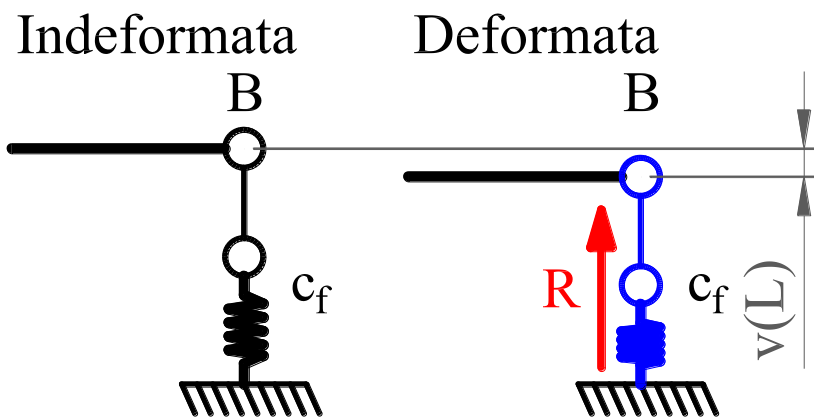
$$v(0) = 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

Inoltre, l'appoggio in B (corrispondente a $z = L$) impone l'annullarsi del momento flettente in quanto non può reagire con una coppia concentrata:

$$M(L) = 0$$

Per quanto concerne l'ultima condizione a contorno necessaria, essa è condizionata dalla presenza del cedimento elastico governato da c_f . In particolare, se l'appoggio fosse stato perfetto, avrebbe imposto l'annullarsi dello spostamento in B. In questo caso, invece, l'appoggio può cedere verticalmente e la molla esercita una reazione verticale proporzionale al cedimento stesso:



Cioè, il punto B ha uno spostamento verticale pari a $v(L)$; la molla si comprime ed esercita una reazione $R = -v(L)c_f$, negativa in quanto diretta con verso opposto ad y . Quest'ultima deve essere in equilibrio con il taglio, quindi è possibile scrivere la condizione:

$$T(L) = -v(L)c_f$$

Considerando le equazioni differenziali ricavate in precedenza e tutte le condizioni a contorno, si ottiene:

$$v(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 = 0$$

$$\varphi(0) = -v'(z) = -a_1 - 2a_2 \cdot 0^1 - 3a_3 \cdot 0^2 - 4a_4 \cdot 0^3 = 0$$

$$\frac{M(L)}{EI} = -v''(L) = -2a_2 - 6a_3L - 12a_4L^2 = 0$$

$$T(L) = -EIv'''(L) = EI[-6a_3 - 24a_4L] = -v(L)c_f = -c_f[a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 + a_4L^4]$$

$$q = EIv^{IV}(z) = EI24a_4$$

che costituiscono un sistema di 5 equazioni lineari in 5 incognite.

Dalle prime due equazioni si ricava facilmente che $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$; dalla quinta:

$$a_4 = \frac{q}{24EI}$$

dalla terza si ricava:

$$a_2 = -3a_3L - \frac{q}{4EI}L^2$$

e lo si sostituisce nella quarta:

$$EI \left[-6a_3 - \frac{q}{EI}L \right] = -v(L)c_f = -c_f \left[-L^2 \left(3a_3L + \frac{qL^2}{24EI} \right) + a_3L^3 + \frac{q}{24EI}L^4 \right]$$

da cui si ricava l'incognita:

$$a_3 = -\frac{c_f + qL}{6EI}$$

ed infine:

$$a_2 = \frac{2c_fL + qL^2}{4EI}$$

Sostituendo le soluzioni ricavate nelle equazioni di spostamento, rotazione, momento flettente e taglio, si ottiene la soluzione completa.

A titolo di esempio, si riportano i diagrammi delle funzioni ricavate assumendo i seguenti valori numerici:

$L = 10$; $EI = 10^4$; $q = 2$; $c_f = 0.05$ si ottengono i seguenti diagrammi:

