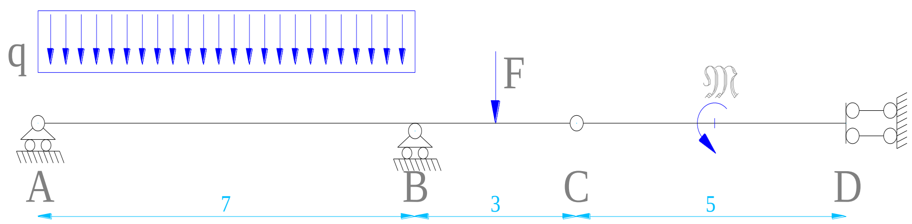
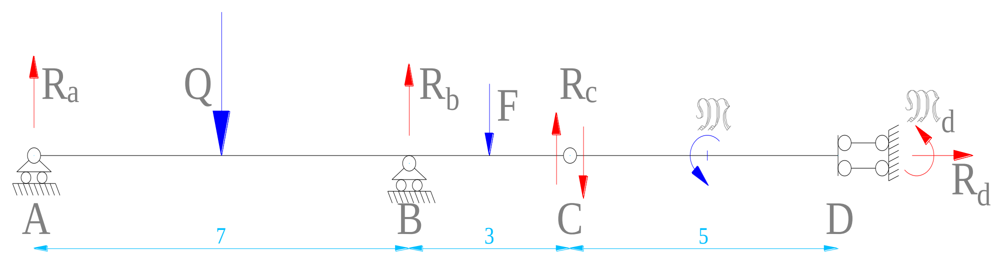
Statica analitica: momento flettente

Si consideri la struttura in figura. Si desidera ricavare, per via analitica, le reazioni vincolari ed il diagramma del momento flettente:



Anzitutto, per il solo calcolo delle reazioni vincolari, si sostituisce il carico distribuito **q** con il suo risultante **Q** applicato nel baricentro e si fissano le reazioni incognite (in rosso):



Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è formata da due tratti; si ricavano le equazioni cardinali della statica:

- Tratto AC:
  1. $R_a - Q + R_b - F + R_c = 0$ eq. traslazione verticale
  2. $-7/2\ Q + 7\ R_b - (7+3/2)\ F + (7+3)\ R_c = 0$ eq. Rotazione, polo A.

- Tratto CD:
  3. $-R_c = 0$ eq. Traslazione verticale
  4. $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_d = 0$ Rotazione. Polo C.

Si noti che la traslazione orizzontale è assente poiché c'è solo una reazione vincolare, Rd, non accoppiata ad altre componenti ed i carichi orizzontali sono assenti.

L'equazione (4) può essere risolta direttamente in quanto:

$\mathfrak{M}_d = -\mathfrak{M}$

Inoltre, la (3) impone che:

$R_c = 0.$

quindi l'equazione (2) presenta una sola variabile residua:

$-7/2\ Q + 7\ R_b - (7+3/2)\ F = 0$

ovvero:

$R_b = ½\ Q + 1.21\ F.$

Non rimane che calcolare R_a sostituendo R_b nella (1):

$R_a = Q -1/2\ Q -1.21\ F - F$

ovvero:

$R_a = 1/2\ Q -0.21\ F.$

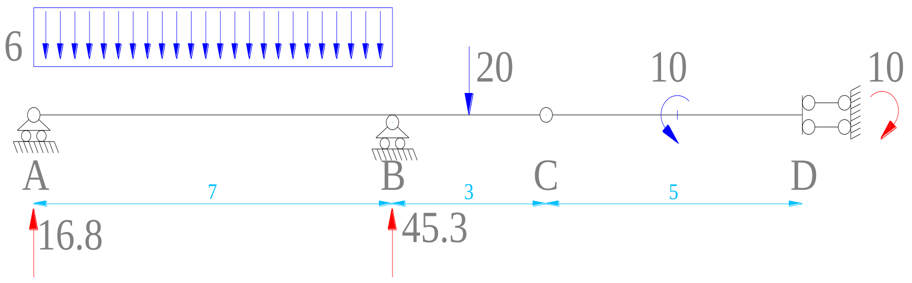
Introducendo valori numerici per le forze applicate:

- q = 6; Q=6*7=42;
- F = 20;
- $\mathfrak{M}$= 10;

otteniamo, sostituendoli, i valori delle reazioni vincolari:

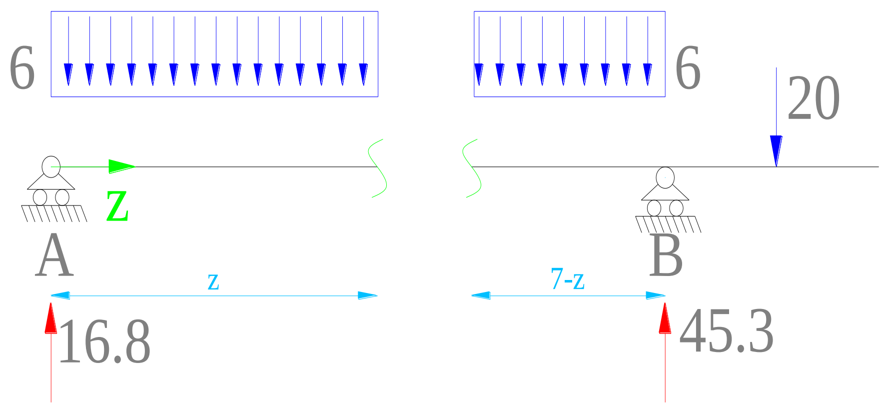
- Ra = 16.8
- Rb = 45.3
- Rc = 0
- $\mathfrak{M}_d$ = -10

Le reazioni vincolari negative, nella fattispecie $\mathfrak{M}_d$, hanno verso contrario a quello considerato per scrivere l'equilibrio. Si riportano le reazioni, con i versi opportuni ed i valori numerici, sulla struttura:



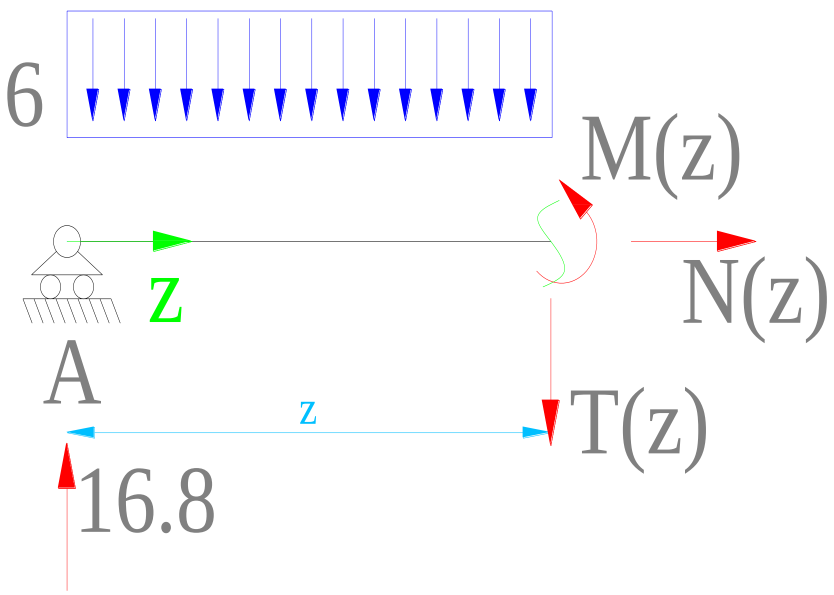
Calcolo delle caratteristiche della sollecitazione

Le caratteristiche della sollecitazione sono le reazioni vincolari degli incastri interni rappresentati da ciascuna sezione delle travi della struttura. Per determinarne le equazioni, si procede ad equilibrare, uno alla volta, i tratti della struttura. Si consideri il tratto AB:



Fissato un riferimento *z* con origine in A, l'ascissa di una generica sezione (in verde) del tratto AB viene individuata da una ascissa *z* il cui valore è compreso tra 0 e 7.

Per determinare le caratteristiche della sollecitazione è necessario calcolare l'equilibrio, alternativamente, della parte a sinistra (a monte) oppure destra (a valle) di *z*. Nel caso in esame, conviene considerare il tratto a monte in quanto c'è solo una reazione vincolare.



L’equilibrio alla traslazione longitudinale al tratto, non essendovi forze applicate, indica chiaramente che lo sforzo normale N(z) è nullo.

L’equilibrio alla traslazione trasversale al tratto permette di calcolare l’equazione del taglio:

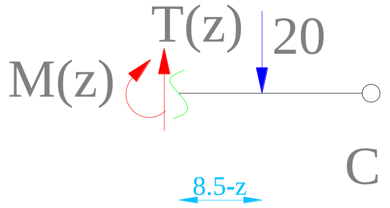
$T(z) = 16.8 – 6z$

ed infine l’equilibrio alla rotazione determina l’equazione del momento flettente:

$M(z) = 16.8z -6/2z^2$

Tali equazioni sono valide fino al punto B, ovvero z=7.

Il procedimento si ripete per il tratto BC:



Stavolta conviene considerare l’equilibrio a valle del tratto in quanto è presente una sola forza. Ancora, applicando l’equilibrio alla traslazione ed alla rotazione si calcolano taglio e momento flettente:

$T(z) = 20$ per $z < 8.5$

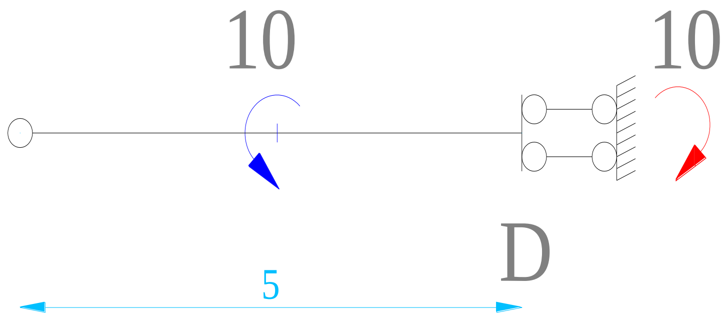
$M(z) = - 20 (8.5 – z)$ per $z < 8.5$

Inoltre, per z > 8.5 sia il taglio che il momento flettente sono nulli, in quanto, a valle della forza e fino al punto C, non ci sono altre azioni.

$T(z) = 0$ per $z > 8.5$

$M(z) = 0$ per $z > 8.5$

Infine, nel tratto CD:



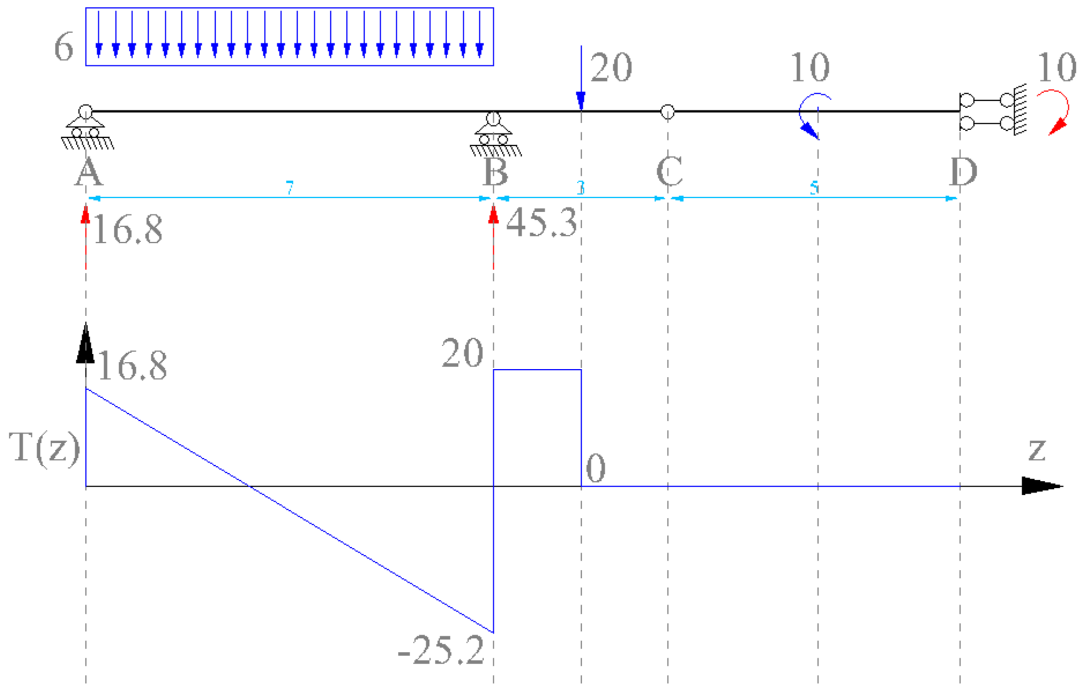
Non essendovi forze trasversali, il taglio è nullo. Il momento flettente è non nullo solo sulla metà di destra; è costante e vale 10.

Diagrammi delle caratteristiche

I diagrammi consistono nel rappresentare il grafico delle funzioni taglio e momento flettente ricavate in precedenza. Qualora non si abbia dimestichezza con il tracciamento del grafico di una funzione in una variabile, gli allievi sono caldamente invitati a rivederne le basi teoriche trattate nei corsi di matematica.

Taglio

- Nel tratto AB, il taglio è lineare ed ha valore iniziale 16.8. Sostituendo z=7, si ottiene un taglio in B=-25.2.
- In B si passa da un valore sinistro di -25.2 ad un valore destro pari a T= -25.2+45.3 = 20 (NB i decimali sono arrotondati alla 1° cifra, la sottrazione è imprecisa).
- In BC il diagramma è costante e si annulla in corrispondenza della forza;
- A valle della forza il taglio è nullo.



Momento flettente

Per quanto riguarda il diagramma del momento, si procede in maniera analoga:

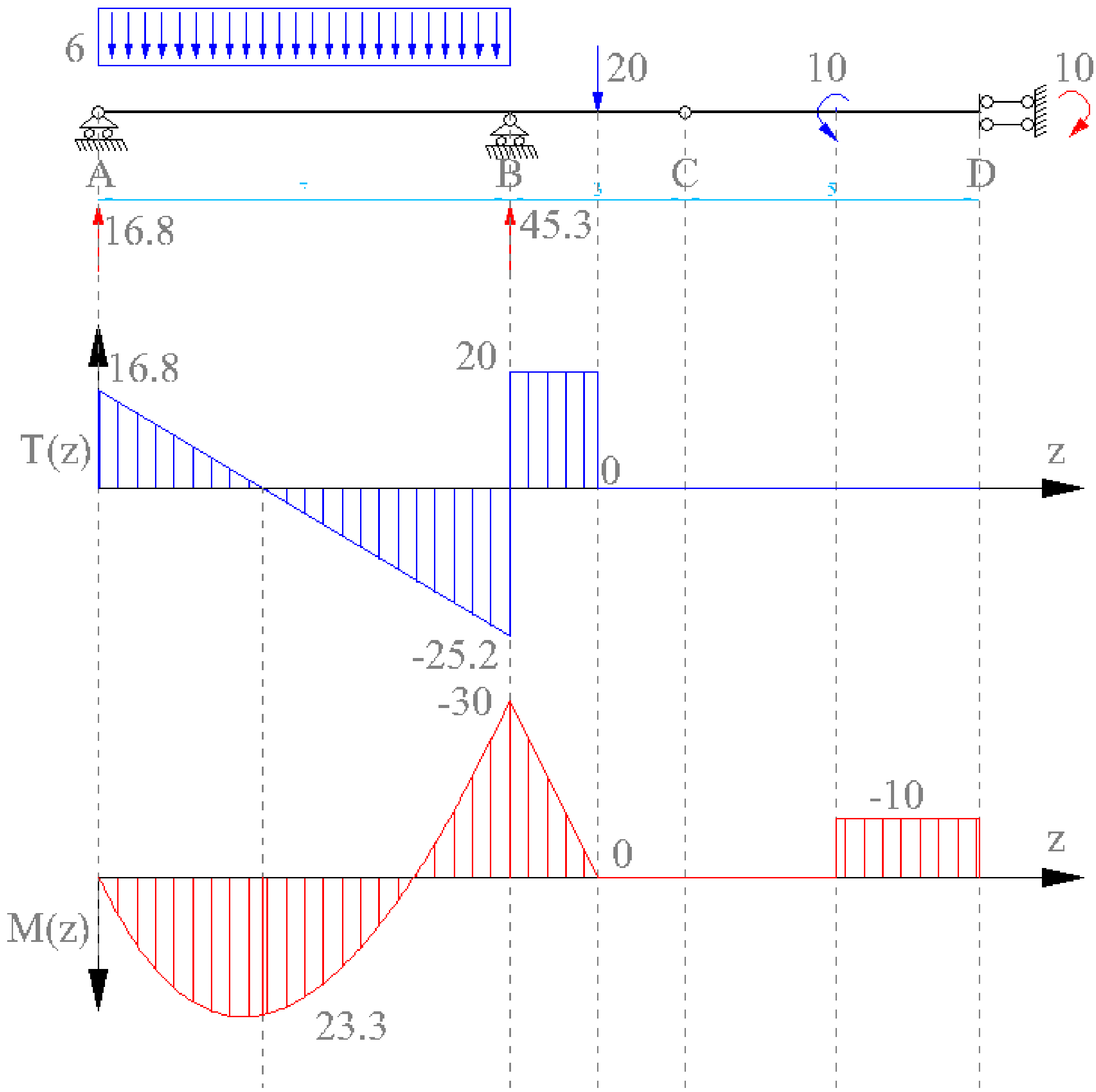
- Nel punto A il momento è nullo;
- nel tratto AB è parabolico. Il punto di massimo si trova in corrispondenza del punto in cui si annulla il taglio. Per calcolarne l'ascissa, si pone:

$T(z) = 16.8 – 6z = 0$ quindi: $z = 16.8/6 = 2.8$

Che corrisponde ad un momento: $M(z) = 16.8z -6/2z^2 = 23.3$

- Nel punto B il momento vale: M (7) = -30
- Nel tratto BC il momento è lineare e si annulla in corrispondenza della forza.
- L'ultimo tratto ad avere momento flettente non nullo, è l'ultimo tratto. Il momento è costante ed è pari alla reazione del doppio pendolo.

In definitiva, il diagramma risulta:


6
20
10
10
A
B
C
D
16.8
45.3
16.8
20
T(z)
0
z
-25.2
-30
-10
0
z
M(z)
23.3