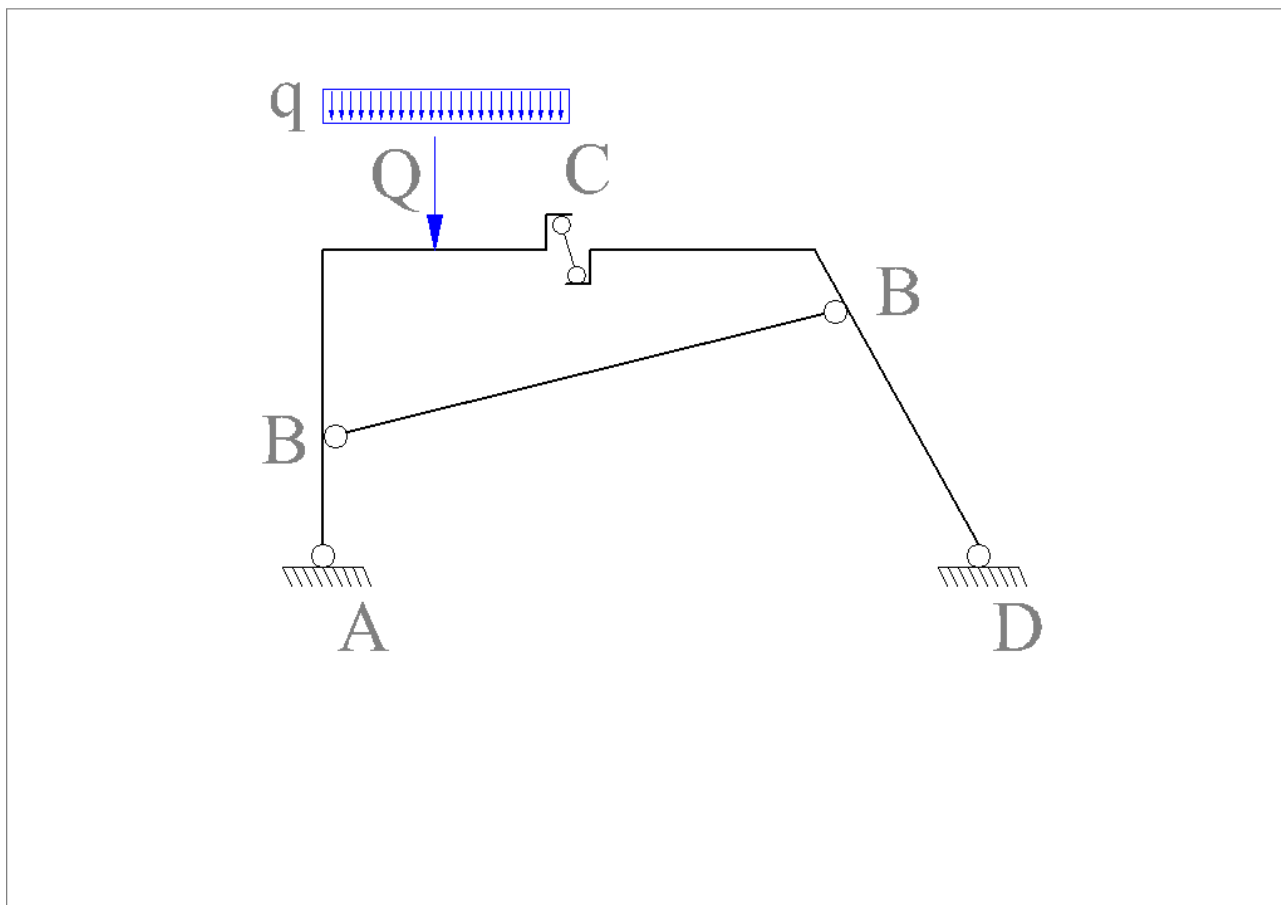


Statica grafica: momento flettente

Si consideri la struttura in figura. Si desidera ricavare, per via grafica, le reazioni vincolari ed il diagramma del momento flettente:



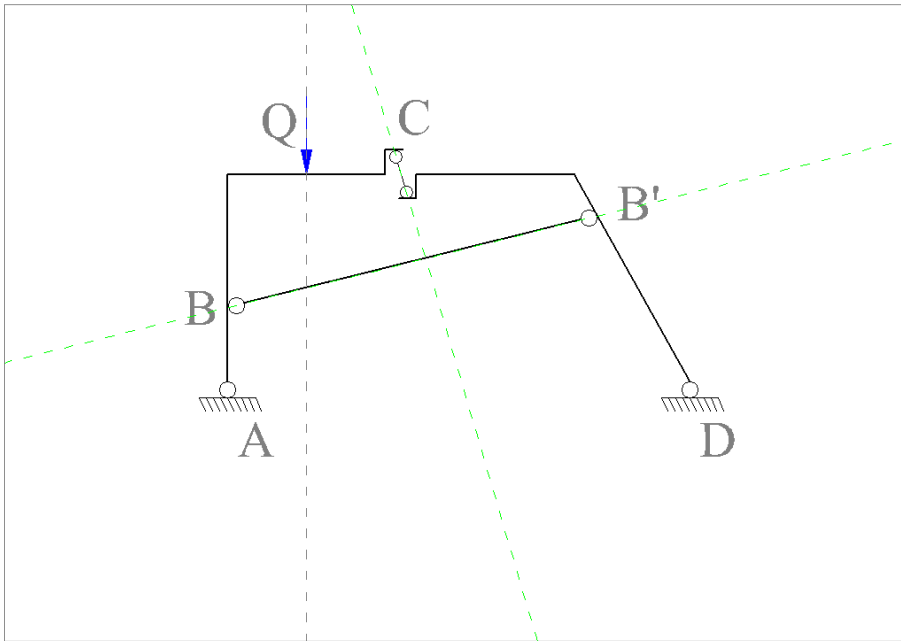
Anzitutto, affinché si possano tracciare le rette di azione delle forze agenti, si sostituisce il carico distribuito q con il suo risultante Q applicato nel baricentro.

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è formata da due tratti; si ricavano le equazioni simboliche. In rosso, le forze di cui sono note le rette d'azione:

- $a + b_s + Q + c_s = 0$;
- $c_d + b_d + d = 0$;
- $a + Q + d = 0$. Quest'ultima corrisponde all'equilibrio globale.

Le rette d'azione note sono rappresentate da linee tratteggiate nella figura che segue.

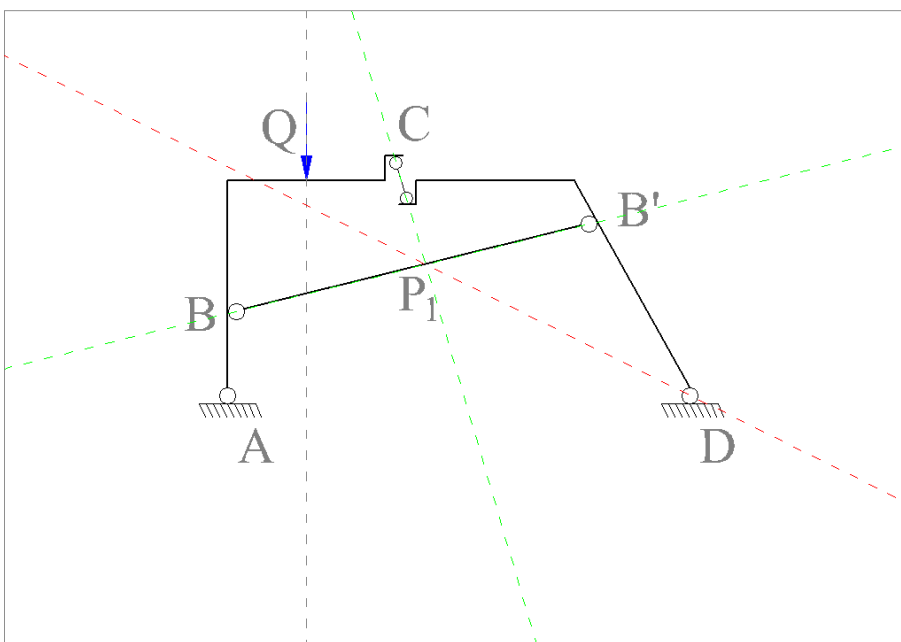


Si precisa che le equazioni definiscono simbolicamente equilibri vettoriali e non somme algebriche. Per questo motivo, le condizioni di equilibrio impongono che:

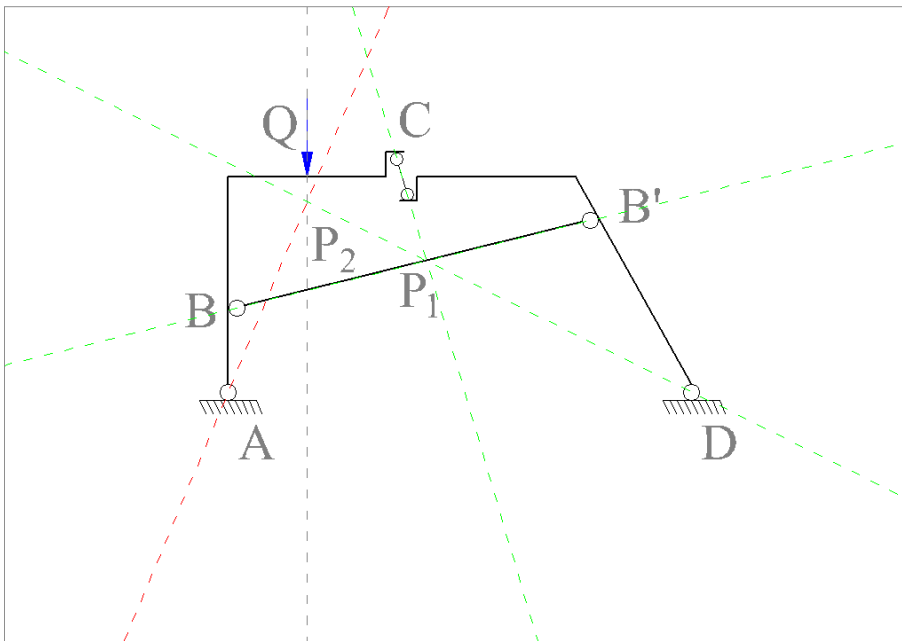
- **Equilibrio alla traslazione:** il poligono delle forze “si chiuda”, ovvero che il risultante sia nullo;
- **Equilibrio alla rotazione:** tre forze in equilibrio concorrono in un punto, proprio od improprio.

1. Calcolo delle rette d'azione

L'equazione simbolica del 2° tratto ha due forze con direzione nota. La terza forza, ovvero la reazione della cerniera in D, deve passare per il punto di intersezione delle reazioni di B' e C (teorema delle tre forze, equilibrio alla rotazione). Le cerniere reagiscono con forze di direzione qualsiasi ed applicate nella cerniera, quindi la retta d'azione di **d** deve passare per D e per P₁ (Retta rossa):



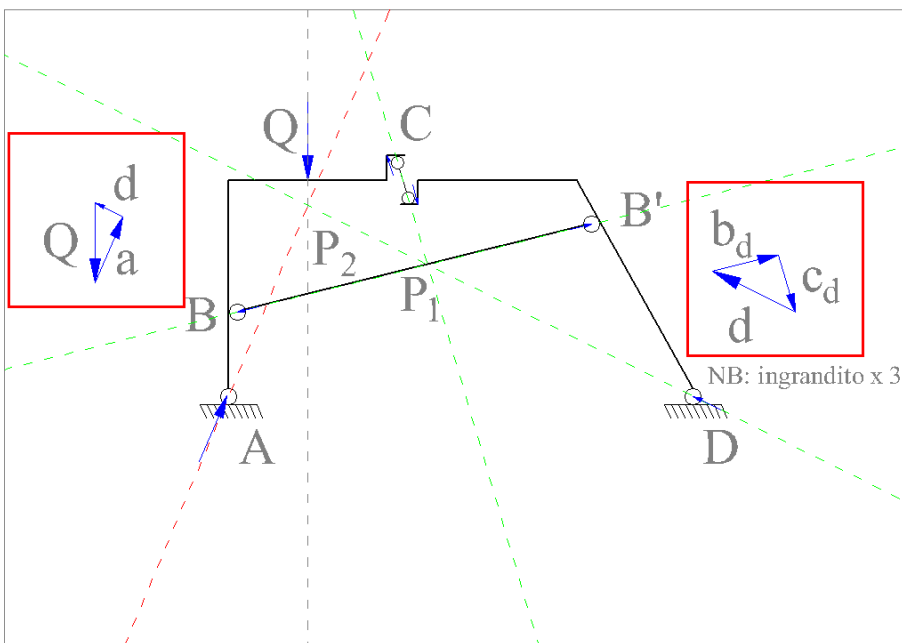
Nota la retta d , l'equazione simbolica globale ci consente di calcolare la retta d'azione di a in maniera analoga. Anche A è una cerniera e la sua reazione è in equilibrio con D e con il carico, quindi la sua retta d'azione passerà per A e per P_2 :



A questo punto, tutte le rette d'azione sono note.

2. Calcolo delle reazioni vincolari

Le reazioni vincolari si determinano grazie alla condizione di equilibrio alla traslazione: i poligoni di forze in equilibrio devono garantire risultante nullo (ovvero, "si chiudono"):



Conviene sempre lavorare con un numero limitato di forze: l'equilibrio del 2° tratto consente il calcolo di d e c mentre dall'equilibrio globale si ricava a . Si noti che nell'equilibrio del 2° tratto (attenzione, nella figura è

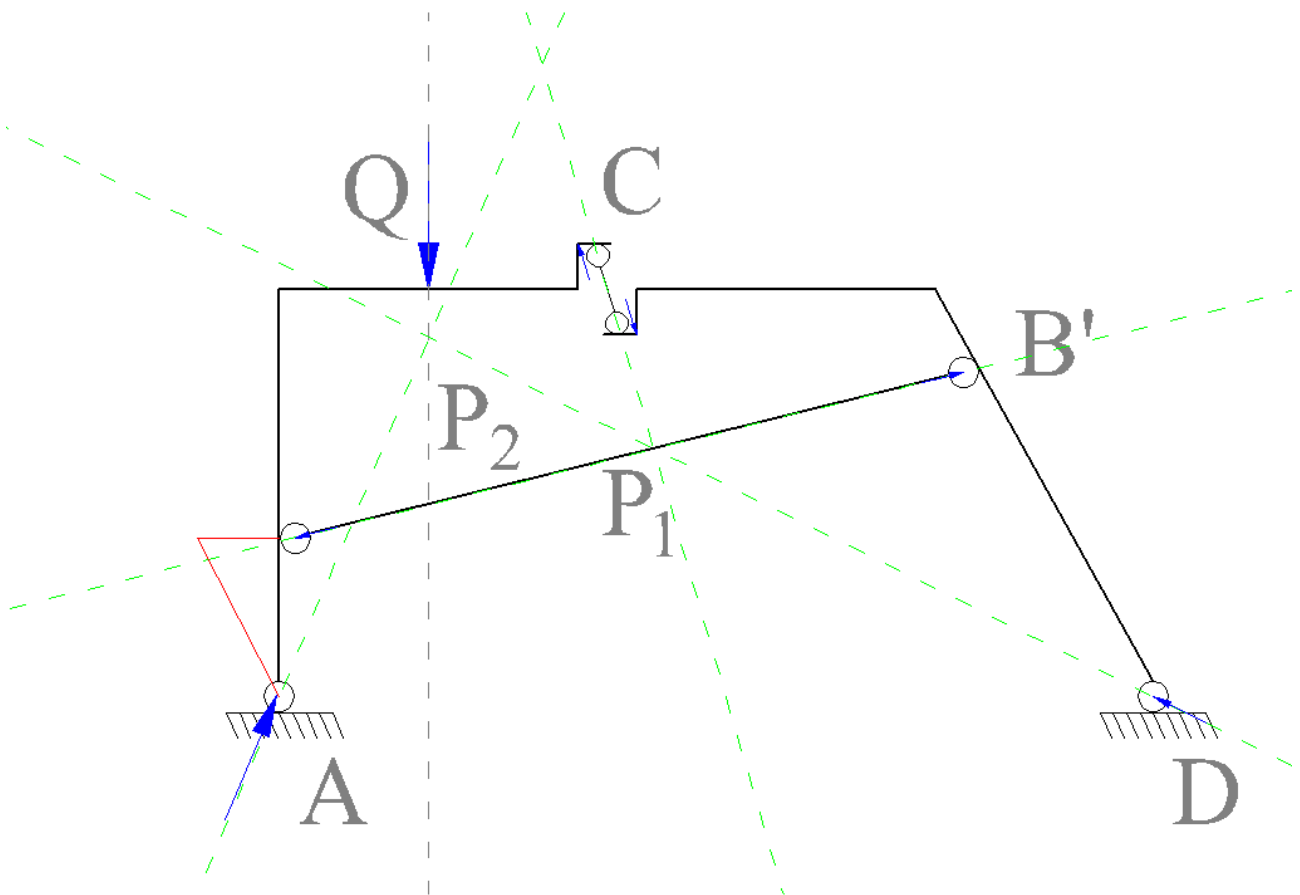
ingrandito 3 volte) compaiono le reazioni dei vincoli sul tratto considerato, cioè, le reazioni “destre”. I vincoli interni reagiscono con forze uguali e contrarie sul 1° tratto (reazioni “sinistre”).

3. Tracciamento del diagramma del momento flettente

Note le reazioni si procede al tracciamento del diagramma del momento flettente. Conviene partire da un estremo e, sebbene sia indifferente il punto di partenza, scegliamo di iniziare dal punto A.

La cerniera impone un momento che si annulla nel punto di applicazione, quindi il diagramma passerà per A; inoltre, essendo costante il taglio (abbiamo ignorato, per ora, il carico distribuito) ci aspettiamo un diagramma formato da tratti lineari.

Iniziamo, quindi, da A: la reazione vincolare tende le fibre di sinistra; scegliamo una inclinazione arbitraria che sarà il nostro fattore di scala:



Arrivati in B, intercettiamo una ulteriore forza, quindi la pendenza del diagramma cambia (variazione del taglio). Per tracciare un diagramma rettilineo occorre ricavare un altro punto noto, quindi ricerchiamo un punto in cui il diagramma sarà sicuramente nullo.

Il momento di una forza è nullo se calcolato assumendo come polo un punto qualsiasi appartenente alla retta d'azione della forza. Le forze che provocano momento nel tratto BC sono:

- $a + b_s$ se guardiamo a monte del tratto
- $Q + c_s$ se guardiamo a valle del tratto.

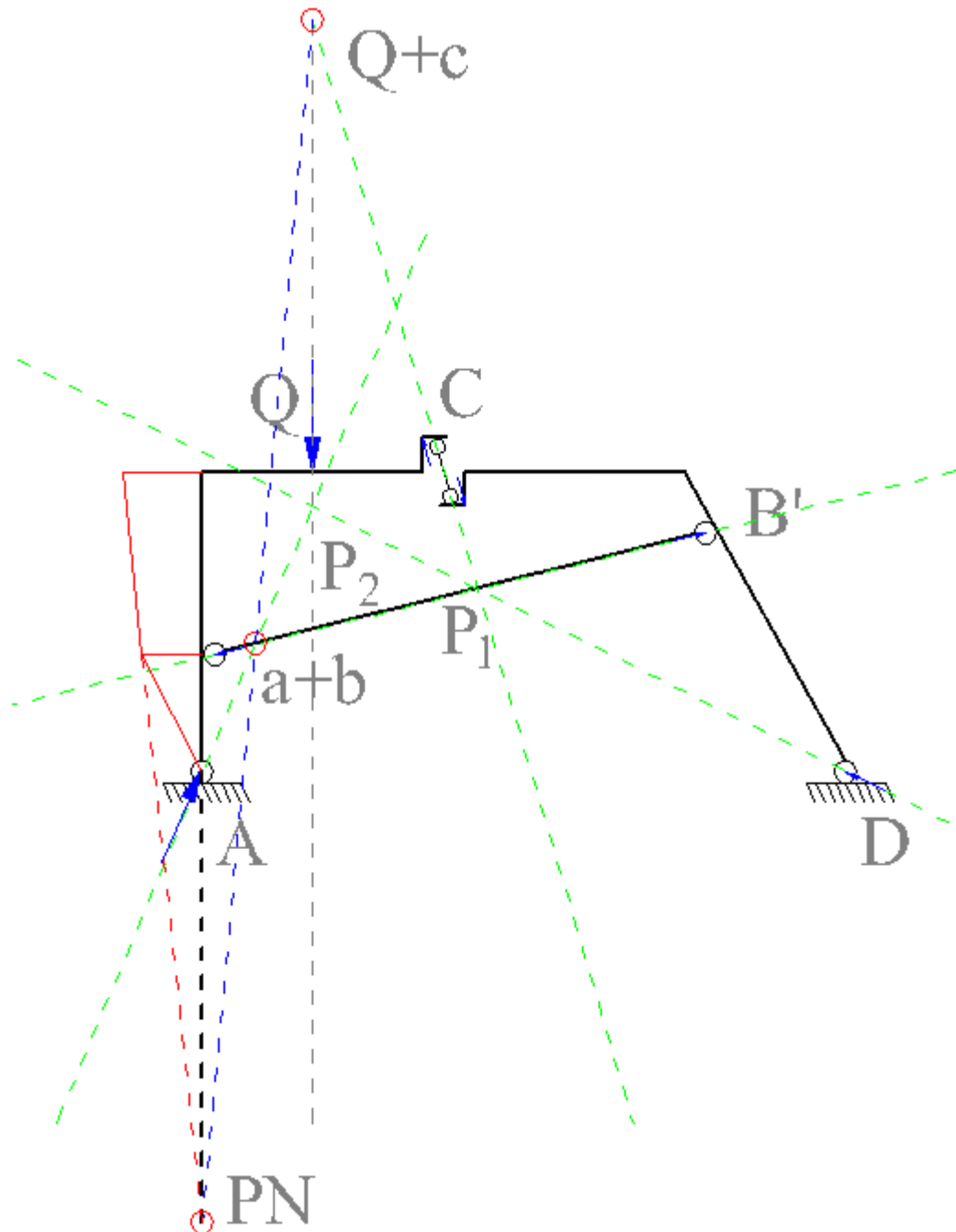
In entrambi i casi, la retta d'azione della somma vettoriale è ignota ed è necessario ricavarla.

Sappiamo, tuttavia, che la retta di $a + b_s$ passerà per il loro punto di intersezione e così la retta $Q + c_s$.

Osservando l'equazione simbolica del 1° tratto appare evidente che:

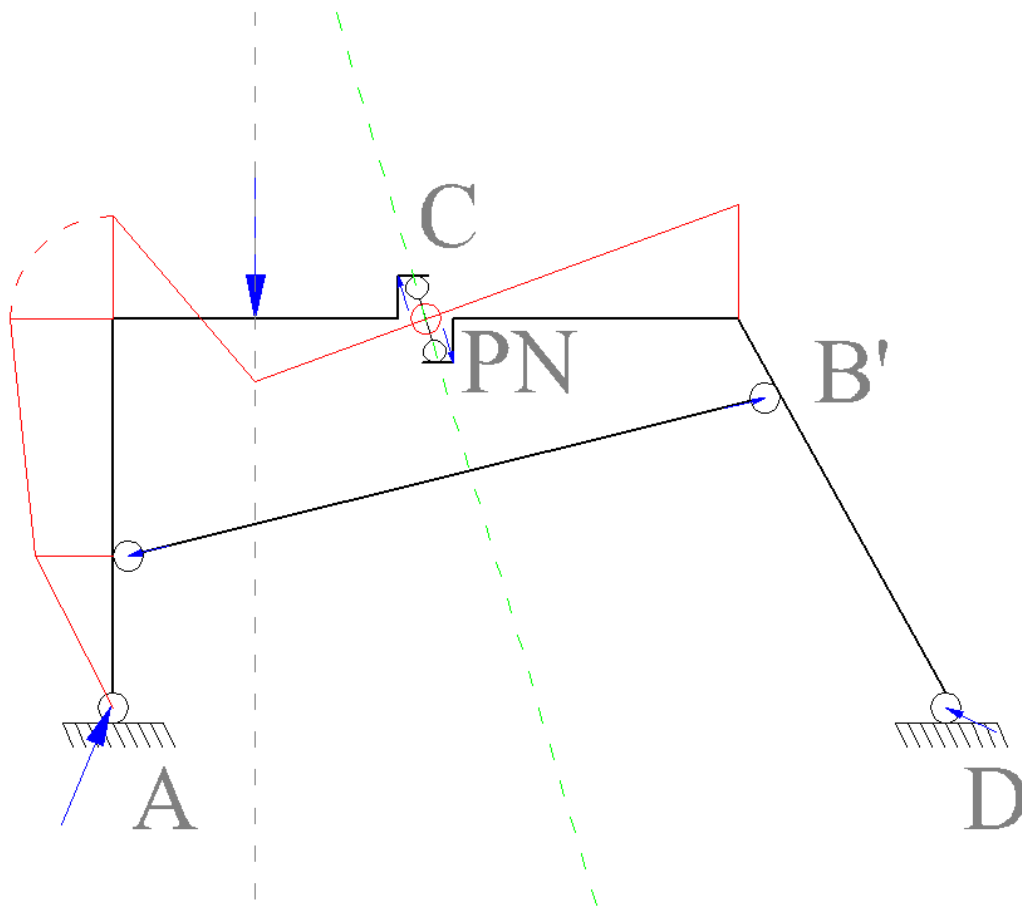
$$a + b_s = - (Q + c_s)$$

quindi le due forze, uguali e contrarie, devono trovarsi necessariamente sulla stessa retta.

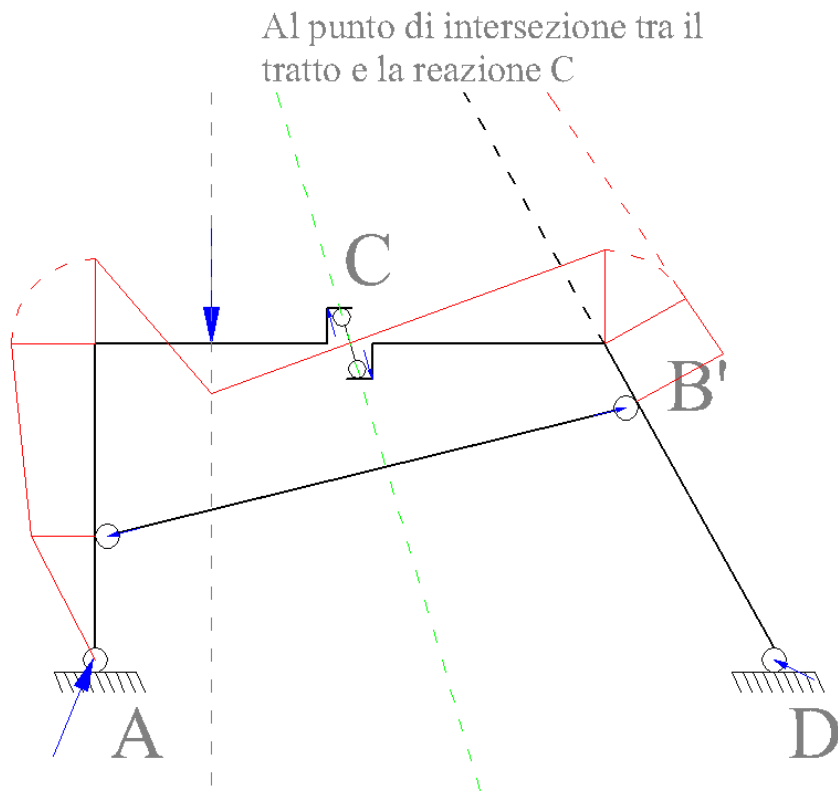


Ne consegue che la retta d'azione di $(a + b_s) = - (Q + c_s)$ deve passare per i due punti cerchiati in rosso: intersezione, rispettivamente, di (a, b) e (Q, c) . La retta, disegnata in blu, viene chiamata retta ausiliaria.

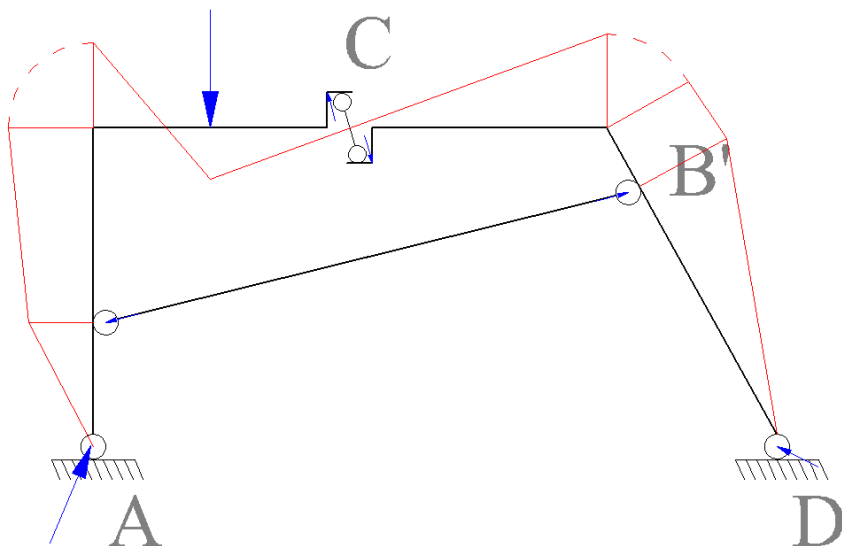
Il diagramma del momento sul tratto **BC** si annulla nel punto in cui la retta d'azione della forza (ovvero la retta ausiliaria) interseca il tratto. Ciò avviene per il punto di nullo **PN** individuato in basso nella figura. Si unisce, quindi, **PN** con l'ordinata del diagramma e si traccia il secondo tratto.



Raggiunta la forza Q, la pendenza cambia nuovamente. Guardando a valle del tratto, il momento è provocato esclusivamente dalla reazione e il cui punto di nullo si trova nel punto di applicazione del pendolo. Si prosegue il diagramma fino a C. Il pendolo non provoca variazioni di taglio, quindi il diagramma può proseguire con la stessa inclinazione fino al successivo nodo.



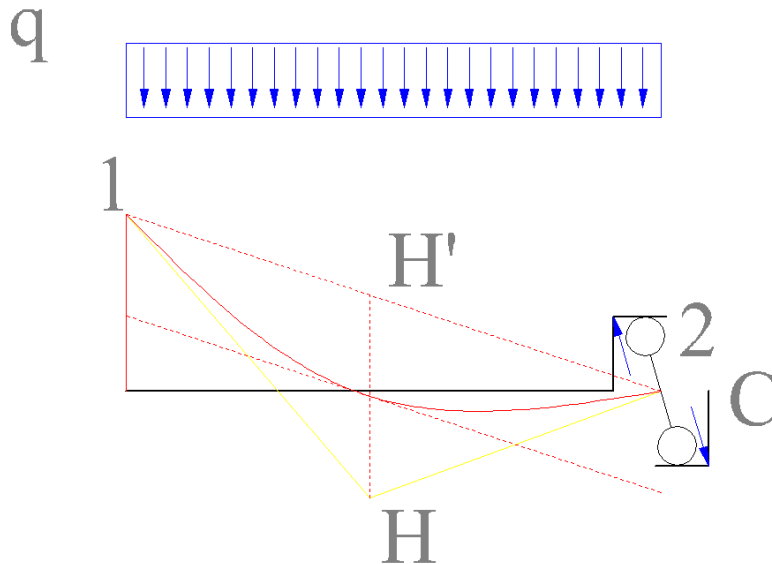
Ribaltando nuovamente il diagramma, si ricerca il successivo punto di nullo. La forza attiva è ancora c , quindi il punto di nullo si trova sull'intersezione di c con il tratto (fuori figura). Noto il punto di nullo, si prosegue il diagramma fino a B' .



A questo punto si termina il diagramma congiungendo l'ordinata di B' con la cerniera in D dove il momento sarà nullo.

4. Costruzione del tratto parabolico

Si noti che nel tratto dove è applicato il carico distribuito, il diagramma del momento non è lineare. Abbiamo tracciato il momento concentrando il carico nel baricentro ed utilizzando il risultante; il vero diagramma, quindi, sarà una parabola tangente ai due tratti rettilinei ricavati in precedenza e rappresentati in giallo nella figura che segue.

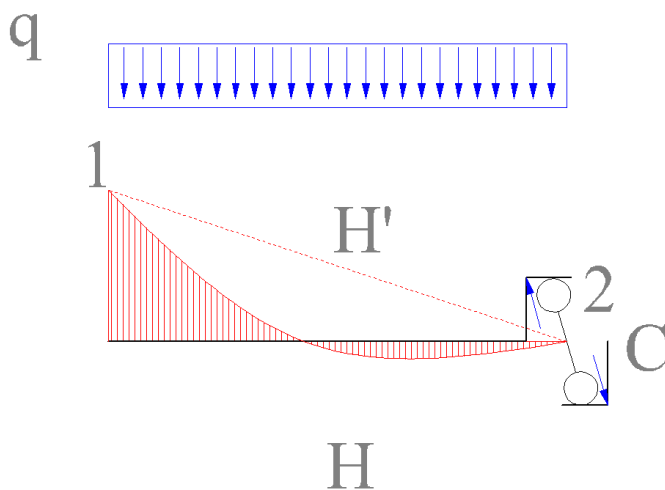


Il procedimento consiste anzitutto nell'unire i punti 1 e 2, iniziale e finale. Si traccia quindi il tratto HH' partendo dal picco del diagramma fittizio (in giallo) e tracciando una parallela alla direzione di applicazione del carico.

Si riporta una parallela alla corda 12 passante per il punto medio di HH' ;

si traccia la parabola in modo che sia tangente ai tratti in giallo ed al segmento parallelo alla corda.

In definitiva, il diagramma risulta:



Infine, si riporta la parabola sul diagramma complessivo della struttura:

