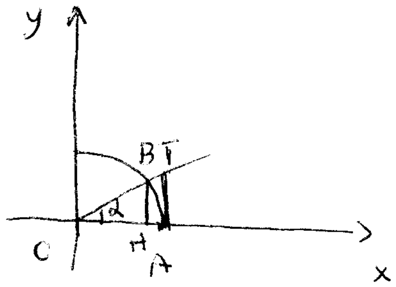
APPENDICE 2

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA



$CA = 1$

$\operatorname{sen}\alpha = BH$

$\cos\alpha = OH$

$\operatorname{tg}\alpha = AT = \dfrac{BH}{OH} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Nel Capitolo II abbiamo dato la definizione di seno, coseno e tangente di un angolo α espresso in radianti ed abbiamo costruito le relative funzioni. Diamo ora alcune proprietà delle funzioni trigonometriche di un dato angolo α.

1. Variazione delle funzioni trigonometriche

Dalla definizione segue che:

1) $\operatorname{sen}0 = 0$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$; $\operatorname{sen}\pi = 0$; $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$; $\operatorname{sen}2\pi = 0$; ..

2) il seno nel I quadrante è positivo e cresce da 0 a 1,
nel II quadrante è positivo e decresce da 1 a 0,
nel III quadrante è negativo e decresce da 0 a -1,
nel IV quadrante è negativo e cresce da -1 a 0;

3) si ha: $\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$; $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$; $\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, inoltre
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ (funzione dispari);

4) aggiungendo o sottraendo ad un angolo α un numero intero k di angoli giri (pari a 2π) il punto B percorre nel verso positivo, se k è positivo, nel verso negativo, se k è negativo, k volte l'intera circonferenza e riprende poi la stessa posizione, quindi il seno assume lo stesso valore, cioè:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il seno è una funzione periodica di periodo 2π.

Per quanto riguarda la variazione del coseno si ha:

1) $\cos 0 = 1$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\cos \pi = -1$; $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$; $\cos 2\pi = 1$;

2) il coseno nel I quadrante è positivo e decresce da 1 a 0,
nel II quadrante è negativo e decresce da 0 a -1,
nel III quadrante è negativo e cresce da -1 a 0,
nel IV quadrante è positivo e cresce da 0 a 1;

3) si ha: $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$; $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$;
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$; $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$; inoltre
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (funzione pari)

4) anche per il coseno si ha
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Il coseno è una funzione periodica di periodo 2π.

Per la tangente si ha:

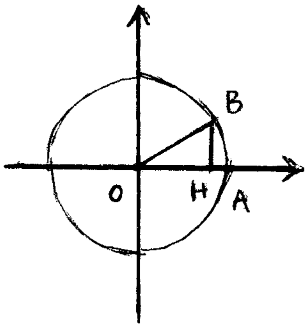
1) $\operatorname{tg} 0 = 0$; $\operatorname{tg}\pi = 0$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi$ non esistono, perché
se $\alpha \to \frac{\pi}{2}^-$ si ha $\operatorname{tg}\alpha \to +\infty$
se $\alpha \to \frac{\pi}{2}^+$ si ha $\operatorname{tg}\alpha \to -\infty$
se $\alpha \to \frac{3}{2}\pi^-$ si ha $\operatorname{tg}\alpha \to +\infty$
se $\alpha \to \frac{3}{2}\pi^+$ si ha $\operatorname{tg}\alpha \to -\infty$;

2) la tangente nel I quadrante è positiva e cresce da 0 a $+\infty$,
nel II quadrante è negativa e cresce da $-\infty$ a 0
inoltre $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$ per $k \in \mathbb{Z}$, cioè la tangente è periodica di periodo π, quindi nel III quadrante si comporta come nel I quadrante e nel IV quadrante come nel II quadrante.

3) Si ha $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, inoltre
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ (funzione dispari)

2. Relazioni fondamentali

Consideriamo ancora la circonferenza goniometrica, cioè la circonferenza di raggio $r = 1$



Sia $A\hat{O}B = \alpha$, consideriamo il triangolo rettangolo OHB.
Si ha $HB = \operatorname{sen}\alpha$, $OH = \cos\alpha$, Inoltre per il teorema di Pitagora:

(1) $$OH^2 + BH^2 = OB^2$$

e quindi otteniamo la relazione fondamentale

(2) $$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ricordiamo anche: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Tramite queste relazioni, noto il valore di una funzione trigonometrica di α è possibile determinare il valore delle altre.

Da (1) segue:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

e da (1) e (2):

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

Inoltre, essendo $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, cioè $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, si ha

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}$$

Formule di addizione e sottrazione, duplicazione, bisezione, in $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

Riportiamo senza dimostrazione le formule di addizione e sottrazione:

$$(3)\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \end{cases}$$

Dalle formule (3) per $\beta=\alpha$ si ottengono le formule di duplicazione:

$$(5)\begin{cases} \operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \end{cases}$$

Scrivendo le (5) per gli angoli $\frac{\alpha}{2}$ e $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$ invece che per α e 2α si ha

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1, \quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + 1, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \pm 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2\sqrt{1+\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

e quindi possiamo scrivere le formule di bisezione

$$(6)\begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{cases}$$

Dall'ultima delle (6) segue

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad (1+\cos\alpha)\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha, \qquad \cos\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

e quindi $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

Inoltre da $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ e dalle (6) segue

$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ e dall'ultima relazione trovata:

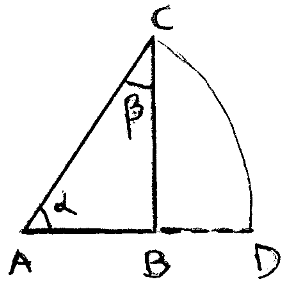
$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

cioè $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

Otteniamo quindi le funzioni $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ espresse tramite $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$(7)\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

4. Relazioni tra funzioni trigonometriche e i lati di un triangolo rettangolo



Consideriamo un triangolo rettangolo con angolo retto in B. Sia $\alpha = C\hat{A}B$ e $\beta = B\hat{C}A$. Naturalmente $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Dalla definizione di seno e coseno segue

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{AB}{AC}$$

Da cui $BC = AC \operatorname{sen}\alpha$, $AB = AC \cos\alpha$, cioè un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente. Naturalmente, dato che $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ e $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$

$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{sen}\beta$

e quindi:

$$BC = AC \operatorname{sen}\alpha = AC \cos\beta$$
$$AB = AC \cos\alpha = AC \operatorname{sen}\beta$$

Inoltre si ha $\frac{BC}{AB} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$ e quindi

$$BC = AB \operatorname{tg}\alpha \quad , \quad AB = BC \operatorname{tg}\beta$$

cioè un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.

5. Equazioni goniometriche

Si parla di equazione goniometrica quando una espressione contenente funzioni goniometriche è soddisfatta per particolari valori che figurano nelle espressione stessa:

$$E(x) = 0,$$

dove x indica l'incognita (angolo) da determinare.
Può accadere che l'equazione non ammetta soluzioni, ad esempio:

$$\operatorname{sen} x - 2 = 0$$

non ha soluzioni perchè $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Per risolvere un'equazione goniometrica si cerca in genere di trasformare tutte le funzioni in una sola opportunamente scelta: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Si assume come nuova incognita questa equazione e si risolve, se possibile, l'equazione così ottenuta.
Si ottiene un'equazione del tipo

$$\operatorname{sen} x = m, \quad \cos x = m, \quad \operatorname{tg} x = m$$

e si risale al valore di x. Tenendo conto della periodicità delle funzioni trigonometriche, se un'equazione goniometrica ammette soluzioni, queste sono sempre infinite.

Diamo alcuni esempi.

1) Consideriamo l'equazione $4\cos^2 x - 4 \operatorname{sen} x - 1 = 0$.
Occorre trasformare $\cos x$ in $\operatorname{sen} x$ o viceversa per far comparire un'unica funzione trigonometrica.
Conviene in questo caso trasformare $\cos x$. Infatti:

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, e quindi non è necessario effettuare estrazione di radice. Si ottiene

$$4 - 4\,\text{sen}^2 x - 4\,\text{sen}\, x - 1 = 0$$

$$4\,\text{sen}^2 x + 4\,\text{sen}\, x - 3 = 0$$

Poniamo $\text{sen}\, x = z$ e risolviamo l'equazione

$$4z^2 + 4z - 3 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 + 12 = 16$$

$$z = \frac{-2 \pm 4}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases} \qquad z_1 = -\frac{3}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2}$$

Dobbiamo allora risolvere le equazioni

$$\text{sen}\, x = -\frac{3}{2} \qquad \text{sen}\, x = \frac{1}{2}$$

l'equazione $\text{sen}\, x = -\frac{3}{2}$ non ha soluzioni perché $\text{sen}\, x \in [-1, 1]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Risolviamo $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$. Cominciamo a prendere in esame solo l'intervallo $[0, 2\pi)$. In questo intervallo si ha

$$\text{sen}\, x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5}{6}\pi.$$

Allora, dato che sen x è una funzione periodica di periodo 2π le soluzioni dell'equazione sono

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2) Consideriamo l'equazione $3\,\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x = 0$

Dato che $\cos x = 0$ solo per $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, e questi valori non risolvono l'equazione perché $\text{sen}\,(2k+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$, possiamo dividere per $\cos x$. Si ha: $3\,\text{tg}\, x - \sqrt{3} = 0$ e quindi $\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Risolviamo l'equazione in $[0, \pi)$, otteniamo: $x = \frac{\pi}{6}$.

Dato che tg x è periodica di periodo π, le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

6. Disequazioni goniometriche

Sono analoghe alle equazioni, solo si presentano nella forma $E(x) > 0$ oppure $E(x) < 0$, dove x indica anche in questo caso l'incognita (angolo) da determinare. Come accade per le equazioni anche nel caso delle disequazioni può accadere che non esistono soluzioni. Ad esempio la disequazione

$$\operatorname{sen} x + 1 < 0$$

non ammette soluzioni perché $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$ per ogni $x \in R$. Anche in questo caso per la risoluzione si procede come per le equazioni riducendosi ad una sola funzione trigonometrica e poi ad una disequazione elementare:

$$\operatorname{sen} x > m \qquad \cos x > m \qquad \operatorname{tg} x > m$$
$$\operatorname{sen} x < m \qquad \cos x < m \qquad \operatorname{tg} x < m$$

Risolviamo tali disequazioni elementari limitandoci a considerare l'intervallo di periodicità delle funzioni coinvolte: $[0, 2\pi)$ per $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, $[0, \pi)$ per $\operatorname{tg} x$.

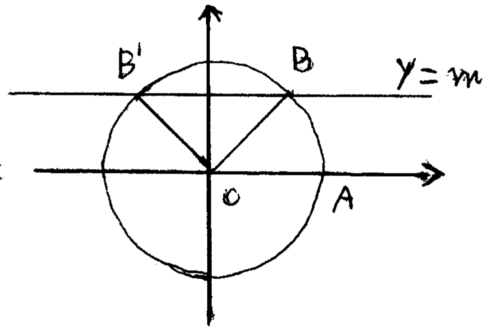
I) $\operatorname{sen} x > m$

Per risolvere questa disequazione consideriamo la circonferenza goniometrica e le intersezioni di questa circonferenza con la retta $y = m$. Osserviamo che per $m > 1$ oppure $m < -1$ non ci sono intersezioni e per la disequazione data si ha:

$\operatorname{sen} x > m$ non ha soluzioni per $m > 1$,
$\operatorname{sen} x > m$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ per $m < -1$.

Dobbiamo considerare solo i valori $m \in [-1, 1]$

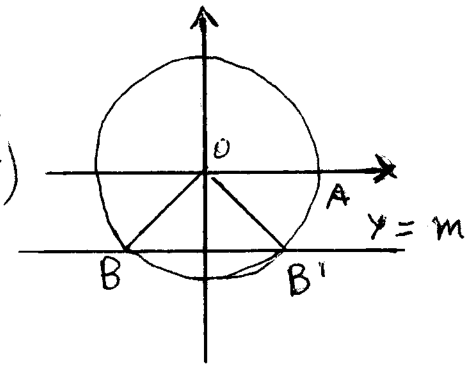
Sia $m \in [0,1]$. Consideriamo la retta $y = m$ e sia $\alpha = A\hat{O}B$ l'angolo contenuto nel I quadrante tale che $\operatorname{sen} \alpha = m$. Naturalmente anche per $AOB' = \pi - \alpha$ risulta $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = m$.



Tenendo conto delle proprietà della funzione $\operatorname{sen} x$ si ha

$$\operatorname{sen} x > m \iff \alpha < x < \pi - \alpha$$

Sia ora $m \in [-1, 0)$. Consideriamo la retta $y = m$ e sia $\alpha = A\hat{O}B$ l'angolo (con B nel III quadrante) tale che $\operatorname{sen} \alpha = m$. Risulta $A\hat{O}B' = 2\pi - (\alpha - \pi)$ cioè $A\hat{O}B' = 3\pi - \alpha$ e $\operatorname{sen}(3\pi - \alpha) = m$



Si ha

$$\operatorname{sen} x > m \iff 0 < x < \alpha \quad o \quad 3\pi - \alpha < x < 2\pi$$

II) $\operatorname{sen} x < m$.

In questo caso i risultati precedenti si scambiano:

$\operatorname{sen} x < m$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ per $m > 1$

$\operatorname{sen} x < m$ non ha soluzioni per $m < -1$

Per $m \in [0, 1]$

$$\operatorname{sen} x < m \iff 0 < x < \alpha \quad o \quad \pi - \alpha < x < 2\pi$$

Per $m \in [-1, 0)$

$$\operatorname{sen} x < m \iff \alpha < x < 3\pi - \alpha.$$

III) $\cos x > m$

Anche in questo caso:

$\cos x > m$ non ha soluzioni per $m > 1$

$\cos x > m$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ per $m < -1$.

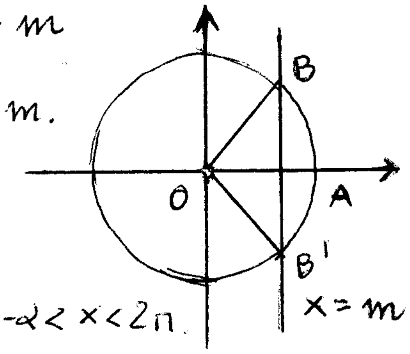
Sia $m \in [0,1]$. Consideriamo la retta $x = m$

Sia $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ l'angolo tale che $\cos\alpha = m$.

Allora $A\hat{O}B' = 2\pi - \alpha$ e $\cos(2\pi - \alpha) = m$.

Si ha

$$\cos x > m \iff 0 < x < \alpha \quad o \quad 2\pi - \alpha < x < 2\pi.$$



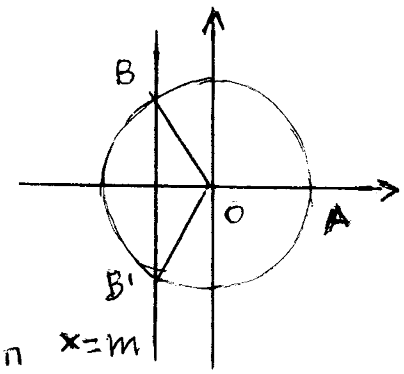
Sia $m \in [-1, 0)$. Consideriamo ancora la retta $x = m$ e sia $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ l'angolo tale che

$\cos\alpha = m$; $A\hat{O}B = \alpha$ e $A\hat{O}B' = 2\pi - \alpha$

e quindi $\cos(2\pi - \alpha) = m$

Allora

$$\cos x > m \iff 0 < x < \alpha \quad o \quad 2\pi - \alpha < x < 2\pi$$



IV) $\cos x < m$

Anche in questo caso i risultati si ribaltano.

$\cos x < m$ non ha soluzioni per $m < -1$

$\cos x < m$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ per $m > 1$

$\cos x < m \iff \alpha < x < 2\pi - \alpha$ per $m \in [-1, 1]$.

V $tg\alpha > m$

Sia $m \geq 0$ e sia $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ l'angolo tale che $tg\,\alpha = m$.
Tenendo conto delle proprietà della funzione tangente:

$$tg\,x > m \iff \alpha < x < \frac{\pi}{2}$$

Sia $m < 0$ e sia $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ l'angolo tale che $tg\,\alpha = m$.
Sempre per le proprietà della tangente:

$$tg\,x > m \iff 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad o \quad \alpha < x < \pi,$$

VI $tg\alpha < m$

Procedendo come prima:

per $m \geq 0$

$$tg\,\alpha < m \iff 0 < x < \alpha \quad e \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

per $m < 0$

$$tg\,\alpha < m \iff \frac{\pi}{2} < x < \alpha$$

Tenendo conto del fatto che le funzioni trigonometriche sono periodiche (di periodo 2π seno e coseno, di periodo π tangente) si possono determinare, a partire da quelle indicate, le soluzioni su tutto l'asse reale.
Ad esempio:

$sen\,x > 0$ per $\alpha + 2k\pi < x < (\pi - \alpha) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ se $m \in [0,1]$

per $2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ o per $(3\pi - \alpha) + 2k\pi < x < (k+2)\pi$

se $m \in [1, 0)$.

Analogamente si procede negli altri casi.

Diamo un esempio di risoluzione di una disequazione

Consideriamo la disequazione: $sen^2x - cos^2x - cos\, x < 0$

Si ha $(1 - cos^2 x) - cos^2 x - cos\, x < 0$ e quindi

$1 - 2\cos^2 x - \cos x < 0$, cioè

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0$$

Poniamo $\cos x = z$ e risolviamo

$$2z^2 + z - 1 < 0$$

l'equazione corrispondente $2z^2 + z - 1 = 0$ ha

$\Delta = 1 + 8 = 9$ e soluzioni $z = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Allora deve essere $z < -1$ o $z > \frac{1}{2}$

In corrispondenza dobbiamo risolvere le disequazioni

$$\cos x < -1 \quad e \quad \cos x > \frac{1}{2}$$

$\cos x < -1$ non ammette soluzioni

$\cos x > \frac{1}{2}$

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$ per $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (nel I quadrante)

$$2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

Allora

$$\cos x > \frac{1}{2} \iff 0 < x < \frac{\pi}{6} \quad o \quad \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$

nell'intervallo $[0, 2\pi)$ e

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,, \quad \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x < (2k+2)\pi$$

in $\mathbb{R}$.

Risolvere i seguenti esercizi

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x < \cos x$$

$$3\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x > 0$$

$$\cos^2 x - 2\cos x < 0$$