COMPLEMENTI DEL CORSO DI MATEMATICA

Anno Accademico 2010/2011
Prof. Francesca Visentin

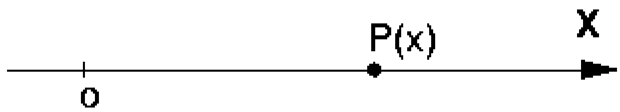
CAPITOLO V

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA

Riprendiamo alcune nozioni già date nel Capitolo II.

1. Coordinate cartesiane sulla retta.

Una retta si dice orientata quando è stato fissato su di essa un verso di percorrenza. Sia r una retta orientata, dare un sistema di coordinate sulla retta significa fissare su di essa un verso di percorrenza che diremo positivo (il verso opposto si dirà negativo), un punto O, che diremo origine delle coordinate e un'unità di misura u.



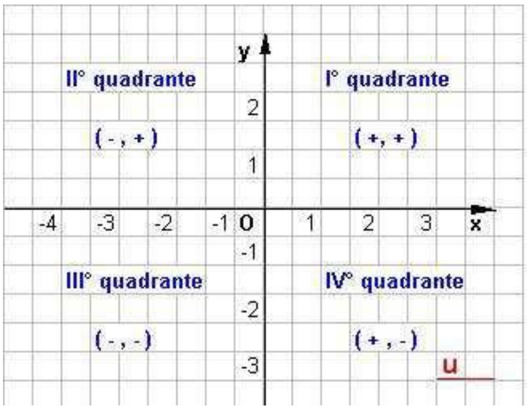
Sia OU il segmento di lunghezza u, con il punto U che segue O nel verso di percorrenza positivo. Sia P un punto generico della retta. Diremo ascissa di P il numero reale che rappresenta la lunghezza del segmento OP (cioè il rapporto tra la lunghezza del segmento OP e quella del segmento unitario OU) preso con il segno positivo o negativo secondo che il punto P segue o precede O nel verso scelto come positivo sulla retta. Ad ogni punto P della retta viene quindi associato un numero reale x che si dice ascissa del punto P, viceversa ad ogni numero reale x corrisponde un unico punto P tale che la misura di OP rispetto ad u sia x. Si ha così una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta r e l'insieme dei numeri reali

Determiniamo la distanza di due punti di una retta. Siano P_1 e P_2 due punti di ascisse rispettivamente x_1 e x_2. Risulta:

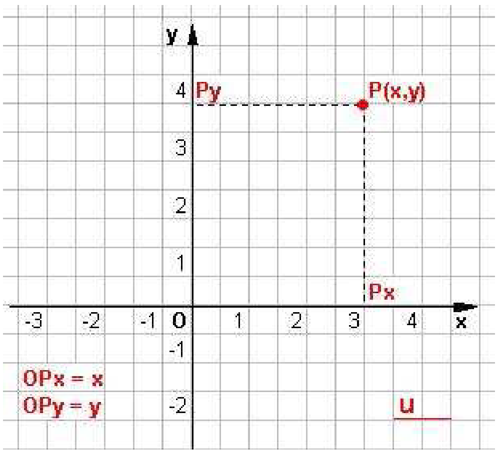
$$P_1P_2 = |OP_2 - OP_1| = |x_2 - x_1| .$$

2. Coordinate cartesiane nel piano.

Siano date due rette ortogonali x e y e sia O il loro punto di intersezione. Fissiamo un'unità di misura u (che può essere eventualmente diversa per le due rette) e un verso di percorrenza su entrambe le rette.



Tali rette dividono il piano in quattro quadranti, come è indicato in figura. Sia P un punto del piano. Mandiamo da P le parallele alle rette x e y e siano x e y le misure dei segmenti OP_x e OP_y rispetto all'unità di misura.

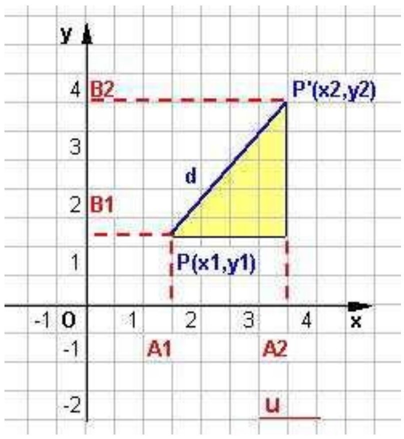


Al punto P vengono allora associati due numeri x e y che diremo rispettivamente ascissa e ordinata del punto P. Viceversa, fissati due numeri reali x e y, esiste un unico punto P del piano che ha come ascissa x e come ordinata y. Siano infatti P_x e P_y due punti sulle rette x e y tali che $OP_x = x$ e $OP_y = y$. Da P_x mandiamo la parallela all'asse y e da P_y la parallela all'asse x; queste due rette si incontrano in un punto P a cui associamo come coordinate i numeri x e y. Un sistema di coordinate così costruito si dirà sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

È possibile costruire anche sistemi di coordinate cartesiane non ortogonali, prendendo due rette x e y di inclinazione qualsiasi (ma non parallele) e procedendo come prima.
Nel seguito ci riferiremo sempre a sistemi di coordinate ortogonali. Per tali sistemi di coordinate valgono le seguenti proprietà:

2.1 l'origine degli assi (punto di intersezione degli assi x e y) ha coordinate (0,0);
2.2 i punti di una retta parallela all'asse y hanno tutti la stessa ascissa;
2.3 i punti di una retta parallela all'asse x hanno tutti la stessa ordinata;
2.4 due punti simmetrici rispetto all'asse x (risp. y) hanno la stessa ascissa (risp. ordinata) e ordinate (risp. ascisse) opposte.
2.5 due punti simmetrici rispetto all'origine hanno coordinate opposte.

Determiniamo la distanza tra due punti di un piano.



Siano P e P′ due punti di coordinate coordinate rispettivamente (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e sia H il punto di intersezione di PB_1 con $P'A_2$. Si ha:

$$PH = A_1A_2 = |x_2 - x_1| \text{ e } P'H = B_1B_2 = |y_2 - y_1| .$$

Per il teorema di Pitagora

$$d^2 = PP'^2 = PH^2 + P'H^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

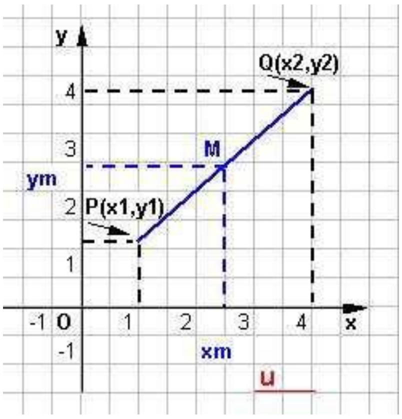
e quindi

$$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} .$$

In particolare, dato che l'origine ha coordinate (0,0), la distanza d di un punto P(x,y) da O è data da

$$d = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Determiniamo ora le coordinate del punto medio di un segmento.



$$\frac{PM}{MQ} = \frac{P_1M_1}{M_1Q_1} = \frac{P_2M_2}{M_2Q_2},$$

quindi, essendo PM=MQ, risulta $P_1M_1=M_1Q_1$ e $P_2M_2=M_2Q_2$. D'altra parte si ha

$$P_1M_1 = x - x_1,\ M_1Q_1 = x_2 - x,\ P_2M_2 = y - y_1,\ M_2Q_2 = y_2 - y.$$

Di conseguenza $x - x_1 = x_2 - x$ e $y - y_1 = y_2 - y$, da cui

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Allora le coordinate di M sono: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

3. Segmenti orientati nel piano.

Si dice segmento orientato un segmento di estremi A e B per il quale sia stato assegnato un ordine e quindi si possa distinguere il punto iniziale e il punto finale. Ad esempio $\overrightarrow{AB}$ rappresenta il segmento orientato di estremo iniziale A e estremo finale B, invece $\overrightarrow{BA}$ rappresenta il segmento orientato di estremo iniziale B e estremo finale A. Ovviamente

risulta: $\vec{BA}=-\vec{AB}$, inoltre $\vec{AA}$ è il segmento orientato nullo. Ogni segmento orientato $\vec{AB}$ è caratterizzato da una direzione (quella della retta passante per A e B), un verso (da A a B) e una lunghezza (la misura del segmento AB: $|\vec{AB}|$). Si dice componente di un vettore orientato $\vec{AB}$ rispetto ad una retta r il vettore orientato $\vec{A'B'}$ che si ottiene mandando da A e B le perpendicolari ad r e indicando con A′ e B′ rispettivamente le intersezioni di queste rette con r. Due segmenti orientati si dicono paralleli quando le loro rette di appartenenza sono parallele. Se $\vec{AB}$ e $\vec{A'B'}$ sono paralleli, esiste un numero reale λ tale che $\vec{A'B'}=\lambda\vec{AB}$, con λ positivo se i due vettori hanno lo stesso verso, negativo se hanno versi opposti. In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2), (x'_1,y'_1) e (x'_2,y'_2) rispettivamente le coordinate di A e di B, e di A′ e di B′, allora le componenti (rispetto alle rette x e y) del segmento orientato $\vec{AB}$ sono rappresentate da $(x_2- x_1, y_2- y_1)$ e quelle del segmento orientato $\vec{A'B'}$ sono rappresentate da $(x'_2- x'_1, y'_2- y'_1)$. La condizione di parallelismo in termini di componenti diventa: $(x'_2- x'_1, y'_2- y'_1) = \lambda (x_2- x_1, y_2- y_1)$ e quindi $x'_2- x'_1 = \lambda (x_2- x_1)$, $y'_2- y'_1 = \lambda (y_2- y_1)$.
Due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno la stessa direzione (le loro rette di appartenenza sono parallele), lo stesso verso e la stessa lunghezza. Con $\{\vec{AB}\}$si indica la classe di equipollenza di $\vec{AB}$, cioè l'insieme di tutti i vettori equipollenti ad $\vec{AB}$, $\{\vec{AB}\}$ rappresenta un vettore libero del piano $\underline{v}=\{\vec{AB}\}$, quindi $|\underline{v}|=|\vec{AB}|$ e $\underline{0}=\{\vec{AA}\}$.

4. Equazione di una retta nel piano.

La retta nel piano è il luogo geometrico definito da una equazione di primo grado, e quindi lineare, nelle variabili x, y. Essa è rappresentabile tramite un'equazione del tipo

(4.1) $\quad ax+by+c=0,$

con a,b non entrambi nulli contemporaneamente. Verifichiamo questa affermazione.
Sappiamo che per due punti di un piano passa una ed una sola retta. Dato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia allora r la retta passante per i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e sia P(x,y) un altro qualsiasi punto della retta r. I segmenti orientati $\vec{P_1P}$ e $\vec{P_1P_2}$ stanno entrambi su r e quindi sono paralleli, allora esiste $\lambda\in\Re$, tale che $(x- x_1, y- y_1) = \lambda (x_2- x_1, y_2- y_1)$. Di conseguenza $(x- x_1) = \lambda (x_2- x_1)$ e $(y- y_1) = \lambda(y_2- y_1)$. Allora risulta anche:

(4.2) $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\lambda,$$

da cui si ottiene

$$(y_2- y_1)x - (x_2- x_1)y + y_1(x_2- x_1) - x_1(y_2- y_1),$$

che è un'equazione del tipo (4.1) con $a=(y_2- y_1)$, $b=-(x_2- x_1)$, $c= y_1(x_2- x_1) - x_1(y_2- y_1)$. Notiamo che la (4.2) rappresenta anche la formula che dà l'equazione di una retta passante per due punti fissati, dato che per ipotesi $P(x,y)$ rappresenta un generico punto della retta. Possiamo allora dire che assegnati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la retta r passante per i due punti è determinata dalla relazione:

(4.3) $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} .$$

Viceversa, dimostriamo ora che la (4.1) rappresenta una retta del piano. Siano $P(x,y)$, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ tre punti che soddisfano la (4.1). Allora P, P_1 e P_2 soddisfano la (4.1):

$$ax+by+c=0,$$
$$ax_1+by_1+c=0,$$
$$ax_2+by_2+c=0,$$

Sottraendo la seconda dalla prima e la seconda dalla terza, si ha:

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0, \qquad a(x_2- x_1) + b(y_2- y_1) = 0$$

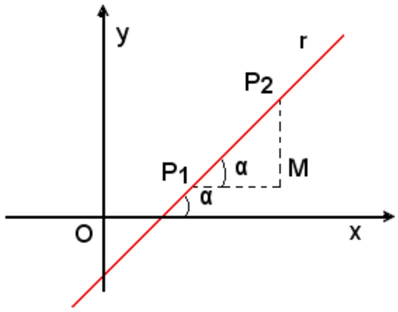
cioè

(4.4) $$\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = -\frac{b}{a} ,$$

e quindi

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} .$$

Allora P, P_1 e P_2 sono allineati e la (4.1) rappresenta quindi l'equazione di una retta. L'equazione di una retta si può scrivere in forma esplicita, utilizzando il "coefficiente angolare". Consideriamo ancora una volta una retta r passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, la sua equazione è data dalla (4.3), d'altra parte per i teoremi di trigonometria:



si ha

$$\frac{P_2M}{P_1M} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha = -\frac{a}{b},$$

tenendo presente la (4.4). L'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle x è ancora α, alla tangente trigonometrica di questo angolo si dà il nome di coefficiente angolare e si pone m=tgα. Le formule indicate sono valide se b≠0. Se b=0, vedremo cosa accade in seguito. Tenendo ancora presente (4.4) si ha

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

e quindi

(4.5) $(y-y_1) = m(x-x_1)$.

La (4.5) dà l'equazione di una retta passante per un punto $P_1(x_1, y_1)$ e di coefficiente angolare fissato m. Al variare di m, la (4.5) rappresenta il fascio di rette uscenti dal punto $P_1(x_1, y_1)$.

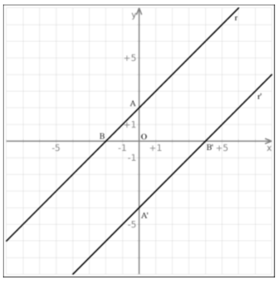
Se b≠0, la (4.1) si può quindi scrivere nella forma:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + q, \text{con } q = -\frac{c}{b}.$$

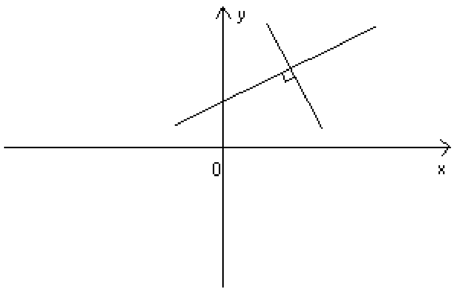
L'equazione

(4.6) $y = mx + q$

Si dice equazione della retta in forma esplicita.
Da quanto abbiamo detto finora segue che due rette parallele formano lo stesso angolo con il semiasse positivo delle x e quindi hanno lo stesso coefficiente angolare



Allora, detti m e m′ i coefficienti angolari di due rette, esse sono parallele se e solo se m=m′.
Due rette r e r′ sono ortogonali, quando formano tra loro un angolo di $\frac{\pi}{2}$.



Allora se indichiamo con m e m′ i coefficienti angolari di r e r′, si ha m=tgα e m′ = tg(α+$\frac{\pi}{2}$). Dato che sen(α+$\frac{\pi}{2}$) = cosα e cos(α+$\frac{\pi}{2}$) = -senα, si ha

$$m' = tg\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{cos\alpha}{-sen\alpha} = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{m}\ .$$

Allora la condizione di perpendicolarità si può dare nella forma: mm′=-1.

Consideriamo ora il caso di equazioni di rette particolari.

Asse x: i punti dell’asse x sono caratterizzati dal fatto di avere tutti ordinata nulla, quindi l’equazione dell’asse x è: y = 0.
Retta parallela all’asse x: i punti di una parallela all’asse x sono caratterizzati dal fatto di avere tutti ordinata costante, ad esempio k, quindi l’equazione dell’asse x è: y = k.

Asse y: i punti dell'asse y sono caratterizzati dal fatto di avere tutti ascissa nulla, quindi l'equazione dell'asse y è: x = 0.

Retta parallela all'asse y: i punti di una parallela all'asse x sono caratterizzati dal fatto di avere tutti ascissa costante, ad esempio h, quindi l'equazione dell'asse x è: x = h.

Notiamo che in questi due casi è b=0, anzi questi ultimi sono gli unici casi in cui b=0 e quindi non si può scrivere l'equazione esplicita della retta. Corrispondono ai casi in cui l'angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e quind tgα perde di significato.

Retta passante per l'origine: imponendo il passaggio per O(0,0), si vede che deve essere c=0 o q=0.

Bisettrice del primo e terzo quadrante: è la retta che passa per O(0,0) e forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con il semiasse positivo delle x, quindi m=tg$\frac{\pi}{4}$ = 1. Allora (4.5) in questo caso porta all'equazione y=x.

Bisettrice del secondo e quarto quadrante: è la retta che passa per O(0,0) e forma un angolo di $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ con il semiasse positivo delle x, quindi m=tg$\frac{3\pi}{4}$ = -1. Allora (4.5) in questo caso porta all'equazione y=-x. Si può anche ragionare in un altro modo. La bisettrice del terzo e quarto quadrante è perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi m′= $-\frac{1}{m}$ =-1 e y=-x.

Posizione reciproca di due rette di un piano: date due rette di equazione ax+by+c=0 e a′x+b′y+c′=0, queste possono essere parallele e quindi non avere punti in comune, oppure possono essere incidenti, in questo caso si incontrano in un unico punto, essendo le due equazioni lineari. Il punto di intersezione si trova risolvendo il sistema:

(4.7) $$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}.$$

Il sistema (4.7) ammette:

infinite soluzioni se $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$ (rette coincidenti),

nessuna soluzione se $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$ (rette parallele),

una sola soluzione negli altri casi (rette incidenti).

Esercizi.

1) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti A(1,1) e B(2,1). Dato che A e B hanno la stessa ordinata, la retta per A e B ha equazione y = 2.

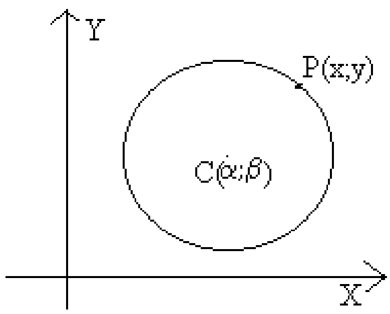
2) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti A(1,0) e B(2,3).
Dalla (4.3) segue

$$\frac{y-0}{3-0} = \frac{x-1}{2-1}$$

e quindi $3x - y - 3 = 0$.
3) Scrivere l'equazione della retta passante per A(1,3) e di coefficiente angolare m=2.
Tenendo presente la (4.5) si ha: $y-3 = 2(x - 1)$, cioè $2x - y + 1 = 0$.
4) Scrivere l'equazione della retta passante per A(2,0) e parallela alla retta $6x-2y + 1 = 0$.
Il coefficiente angolare della retta assegnata è $m = 3$. La condizione di parallelismo comporta che deve essere $m' = m = 3$, quindi da (4.5): $y - 0 = 3(x-2)$, cioè $3x - y - 6 = 0$.
5) Scrivere l'equazione della retta passante per A(-1,-2) e perpendicolare alla retta congiungente l'origine con il punto B(1,3).
Scriviamo l'equazione della retta passante per O(0,0) e per B(1,4): $4x - y = 0$. Tale retta ha coefficiente angolare $m = 4$. Il coefficiente angolare della retta cercata è quindi $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{4}$. Allora, dalla (4.5): $y-4 = -\frac{1}{4}(x-1)$, cioè $x + y - 15 = 0$.

5. Equazione di una circonferenza nel piano.

La circonferenza è il luogo geometrico costituito dai punti P del piano equidistanti da un punto C detto centro della circonferenza. La distanza CP = r si dice raggio delle circonferenza. Dato un sistema di assi cartesiani sia $C(\alpha,\beta)$ il centro e sia $P(x,y)$ il generico punto della circonferenza.



Allora dalla formula della distanza tra due punti si ha:

$$[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{1/2} = r,$$

e quindi

(5.1) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

Effettuando i calcoli, si ottiene l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0,$$

che si può scrivere nella forma:

(5.2) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

con $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$, $c = +\alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Viceversa, la (5.2) rappresenta l'equazione di una circonferenza di centro $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \left[\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) - c\right]^{\frac{1}{2}}$, solo se

(5.3) $\left[\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) - c\right] \geq 0$,

valendo il segno = solo nel caso di circonferenza degenere, di centro C e raggio nullo.

Consideriamo alcuni casi particolari.

Circonferenza passante per l'origine: imponendo il passaggio per O(0,0) in (5.2) deve essere c=0 e quindi la (5.3) in questo caso è sempre soddisfatta.
Circonferenza con centro sull'asse x: in questo caso deve essere $\beta=0$ e quindi in (5.2) deve essere b=0.
Circonferenza con centro sull'asse y: in questo caso deve essere $\alpha=0$ e quindi in (5.2) deve essere a=0.
Circonferenza con centro nell'origine: in questo caso deve essere $\alpha=0$, $\beta=0$ e quindi in (5.2) deve essere a=0, b=0 e per soddisfare (5.3) c<0. Posto allora $c = -r^2$, l'equazione (5.2) diventa

(5.4) $x^2 + y^2 = r^2$.

Esercizi
1) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(2,1) e raggio r = 2.
Da (5.1): $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, e quindi $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.
2) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(1,-2) e passante per A(2,1).

Il raggio è dato dalla lunghezza del segmento AC.

$$r = [(2-1)^2 + (1-(-2)^2]^{1/2} = [1+(1+2)^2]^{1/2} = [10]^{1/2}.$$

Da (5.1): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$, e quindi $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.

3) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti A(4,0), B(-2,0), D(0,-2).

Imponendo nella (5.2) il passaggio per i tre punti, otteniamo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c:

$$4a + c + 16 = 0$$
$$-2a + c + 4 = 0$$
$$-2b + c + 4 = 0$$

La soluzione di questo sistema è a = -2, b = - 2, c = -8. Allora l'equazione della circonferenza richiesta è $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$. Inoltre dalle relazioni che legano le coordinate del centro e il taggio con a, b, c si ottiene: C(1,1), $[10]^{1/2}$.

4) Verificare se l'equazione $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ rappresenta una circonferenza, e in questo caso determinare coordinate del centro e raggio.

Bisogna verificare se la (5.3) è soddisfatta. Si ha

$$\left[\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)-c\right] = [(16+9)-20] = 5 > 0.$$

Allora l'equazione data rappresenta una circonferenza e si ha: $C(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(4,3)$ e raggio r $= \left[\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)-c\right]^{\frac{1}{2}} = 5^{1/2}$.

5) Verificare se l'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 32 = 0$ rappresenta una circonferenza, e in questo caso determinare coordinate del centro e raggio.

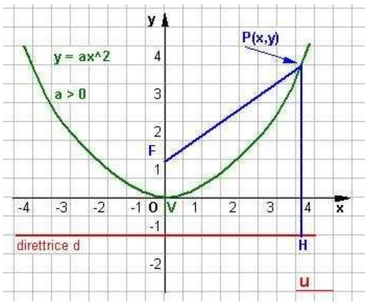
Anche in questo caso bisogna verificare se la (5.3) è soddisfatta. Si ha

$$\left[\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)-c\right] = [(1+25)-32] = -6 < 0.$$

Allora l'equazione data non rappresenta una circonferenza

6. Equazione di una parabola nel piano.

La parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F, detto fuoco e da una retta fissa d, detta direttrice. Scegliamo un sistema di assi cartesiani con la retta d parallela all'asse x e con il punto F sull'asse y, in modo che l'origine delle coordinate O sia equidistante da d e da F. Sia p la distanza di F da d, allora F(0,p/2) e l'equazione di d è $y=-\frac{p}{2}$.



Detto P(x,y) un punto qualsiasi della parabola, deve essere PF=PH=1. D'altra parte

$$PH = |y + \frac{p}{2}| \text{ e } PF = [x^2 + (y - \frac{p}{2})^2]^{1/2}.$$

Allora

$$(y + \frac{p}{2})^2 = [x^2 + (y - \frac{p}{2})^2]$$

e, effettuando i calcoli si ottiene l'equazione

(6.1) $$y = \frac{1}{2p} x^2,$$

che rappresenta una parabola con vertice V nell'origine. Allora

(6.2) $$y = ax^2 ,$$

rappresenta una parabola con vertice nell'origine, fuoco in F(0,1/4a) e direttrice di equazione y= - 1/4a. L'asse y, cioè la retta x=0 è asse di simmetria della parabola. Se a>0, la parabola è rivolta verso l'alto, se a<0, la parabola è rivolta verso il basso. Consideriamo ora l'equazione

(6.3) $$y = ax^2 + bx + c, \qquad a\neq 0,$$

e verifichiamo che questa è la più generale equazione di una parabola. Si ha:

$$y - c = a(x^2 + \frac{b}{a}x), \quad y - c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}),$$

$$y + \frac{b^2}{4a} - c = a(x + \frac{b}{2a})^2, \qquad y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2.$$

Scegliamo un nuovo sistema di assi coordinati O′XY, con $O'(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$, $X = x + \frac{b}{2a}$, $Y = y + \frac{b^2-4ac}{4a}$. In questo nuovo sistema di assi cartesiani, la (6.3) diventa

(6.4) $\quad Y = aX^2.$

Dato che $x = X - \frac{b}{2a}$ e $y = Y - \frac{b^2-4ac}{4a}$, possiamo concludere che nel sistema di riferimento Oxy la (6.3) rappresenta l'equazione di una parabola con vertice $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$, fuoco $F(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a})$, direttrice di equazione $y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a}$ e asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$.

Scambiando gli assi x e y, si ottiene una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x, di equazione: $x = ay^2 + by + c$.

Esercizi

1) Data la parabola di equazione $y = ax^2$, determinare a in modo che essa passi per A(2,8).
Dobbiamo imporre il passaggio per il punto A: 8 = 4a, cioè a = 2.

2) Determinare a, b, c in modo sapendo che la parabola passa per A(1,6) e ha vertice $V(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$.

Consideriamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$. Sappiamo che $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$. Allora otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} &a + b + c = 6 \\ &-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \\ &-\frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Otteniamo allora: b = - a, c = 6, - a + 24 =25, cioè a = -1, b = 1, c = 6 e l'equazione della parabola è $y = - x^2 + x + 6$.

3) Determinare la parabola di fuoco F(2,3) e direttrice d di equazione y = 5.

Sappiamo che $F(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a})$, e l'equazione della direttrice è $y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a}$.

Si ha allora in questo caso:

$$-\frac{b}{2a} = 2$$
$$\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = 3$$
$$-\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = 5$$

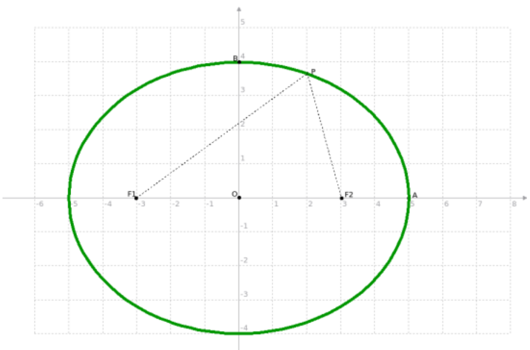
Sottraendo la terza dalla seconda:

$$\frac{1}{2a} = - 2, \text{ cioè } a = -\frac{1}{4}.$$

Dalla prima allora si ottiene: -b = 4a = -1 e quindi b=1. Dalla seconda poi: -1 + 1 + c =3, cioè c = 3. L'equazione della parabola è quindi $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

7. Equazione di un'ellisse nel piano.

L'ellisse è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi F_1, F_2 detti fuochi.



Sia Oxy un sistema di riferimento in cui i punti F_1, F_2 siano sull'asse x, simmetrici rispetto all'asse y: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Si ha $F_1F_2 = 2c$. Detto P(x,y) il generico punto sull'ellisse, indichiamo con 2a la somma delle distanze di P da F_1 e F_2 : $PF_1 + PF_2 = 2a$. Dato che in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, risulta a>c. Si ha:

$$PF_1 = [(x+c)^2 + y^2]^{1/2}, \qquad PF_2 = [(x-c)^2 + y^2]^{1/2}.$$

Allora

$$[(x+c)^2 + y^2]^{1/2} + [(x-c)^2 + y^2]^{1/2} = 2a.$$

Effettuando i calcoli si ottiene quella che viene chiamata equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.1}$$

con $b^2 = a^2 - c^2$. L'ellisse, in questa forma, è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi e rispetto all'origine. Inoltre se y=0 si ottengono i punti di intersezione con l'asse x: $x=\pm a$, quindi a prende il significato di semiasse maggiore; se x=0 si ottengono i punti di intersezione con l'asse y: $y=\pm b$, quindi b prende il significato di semiasse minore.

Esercizi

1) Scrivere l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi, di semiassi a=5 e b=3.

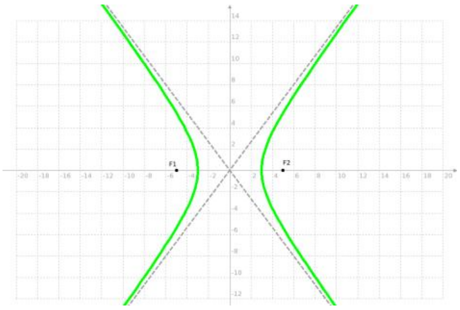
Da (7.1): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2) Scrivere l'equazione dell'ellisse con fuochi nei punti $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ e passante per D(0,4).

Dalla posizione dei fuochi segue che l'ellisse è riferita ai propri assi, inoltre il semiasse minore è b=4 (dato che l'ellisse passa per (0,4)). Allora da $b^2 = a^2 - c^2$, si ha $a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$, da cui a = 5. Allora da (7.1): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

8. Equazione di un'iperbole nel piano.

L'iperbole è il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi F_1, F_2 detti fuochi.



Sia Oxy un sistema di riferimento in cui i punti F_1, F_2 siano sull'asse x, simmetrici rispetto all'asse y: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Si ha $F_1F_2= 2c$. Detto P(x,y) il generico punto sull'iperbole, indichiamo con 2a la differenza delle distanze PF_1 e PF_2 : $| XF_1 - XF_2| = 2a$. Dato che in un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due, risulta a<c. Si ha:

$$PF_1= [(x +c)^2 + y^2]^{1/2} , \qquad PF_2= [(x - c)^2 + y^2]^{1/2} .$$

Allora

$$[(x +c)^2 + y^2]^{1/2} - [(x - c)^2 + y^2]^{1/2} = 2a.$$

Effettuando i calcoli si ottiene quella che viene chiamata equazione canonica dell'ellisse:

$$(8.1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $b^2 = c^2 - a^2$. L'ellisse, in questa forma, è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi e rispetto all'origine. L'asse x si dice asse trasverso e l'asse y si dice asse non trasverso. Inoltre se y=0 si ottengono i punti di intersezione con l'asse x: $x=\pm a$, non vi sono invece punti di intersezione con l'asse y. I punti $V_1(-a,0)$ e $V_2(a,0)$ si dicono vertici dell'iperbole. L'iperbole è una curva illimitata che ammette come asintoti le rette di equazione:

$$y = -\frac{b}{a} x , \qquad y = \frac{b}{a} x.$$

L'iperbole si dice equilatera quando gli asintoti sono ortogonali. Deve quindi essere:

$(-\frac{b}{a})\frac{b}{a} = -1$, cioè $(\frac{b^2}{a^2}) = 1$ e $b = \pm a$. Di conseguenza la (8.1) diventa:

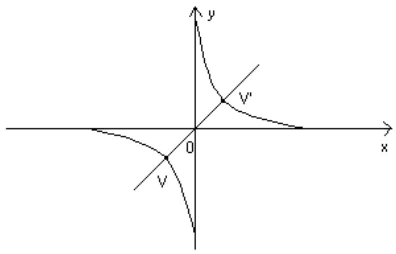
$$(8.2) \qquad x^2 - y^2 = a^2,$$

e gli asintoti sono le bisettrici di primo e terzo quadrante e di secondo e quarto quadrante: $y = x$ e $y = -x$.

Un caso particolarmente importante è quello dell'iperbole equilatera i cui asintoti siano gli assi coordinati ($x = 0$ e $y = 0$). Tale iperbole ha equazione:

(8.3) $\qquad xy = k,$

con k costante reale.



Se $k>0$, la curva si trova nel primo e terzo quadrante, se $k<0$ nel secondo e quarto quadrante. Inoltre la curva è simmetrica rispetto all'origine. Dato che la curva non passa per O(0,0), possiamo scrivere la (8.3) nella forma:

(8.4) $\qquad y = \dfrac{k}{x},$

che esprime la legge di proporzionalità inversa, come abbiamo visto nel capitolo II.

Esercizi

1) Scrivere l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi, di semiassi a=5 e b=3.

Da (7.1): $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1.$

2) Scrivere l'equazione dell'iperbole con fuochi nei punti $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ e passante per D(5,0).

Dalla posizione dei fuochi segue che l'iperbole è riferita ai propri assi, inoltre il semiasse maggiore è a=5 (dato che l'ellisse passa per (5,0)). Allora $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$, da cui $b = 4$. Allora da (7.1): $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1.$