

COMPLEMENTI DEL CORSO DI MATEMATICA

Anno Accademico 2012/2013

Prof. Francesca Visentin

CAPITOLO VI

SISTEMI LINEARI

1. Matrici.

In termini semplici, si definisce matrice costante $n \times m$ una tabella di numeri disposti su n righe e m colonne:

$$(1.1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

A si dice matrice rettangolare ad n righe e m colonne. Gli elementi della matrice sono numeri reali:

$$a_{ij} \in \mathbf{R} \quad \forall i=1,2,\dots,n, \quad \forall j=1,2,\dots,m.$$

Il primo è l'indice di riga, il secondo l'indice di colonna: a_{ij} appartiene alla riga i -sima e alla colonna j -sima. Per indicare la matrice A , scriveremo anche brevemente

$$(1.2) \quad A=(a_{ij}) \text{ con } i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m.$$

Indichiamo con M_{nm} l'insieme delle matrici a n righe e m colonne, allora $A \in M_{nm}$ significa che A è una matrice del tipo (1.1).

Dati $r \leq n$, $s \leq m$, si dice sottomatrice di una matrice $A \in M_{nm}$, una matrice $B \in M_{rs}$ che si ottiene eliminando $n-r$ righe e $m-s$ colonne. Una sottomatrice il cui $r=s$ si dice minore di ordine r della matrice A .

Operazioni tra matrici.

Somma

Date due matrici $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ appartenenti a M_{nm} , si dice somma di A e B la matrice

$$(1.3) \quad S = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

che si ottiene sommando tutti gli elementi delle due matrici assegnate nelle posizioni di righe e di colonne corrispondenti.

La somma tra matrici soddisfa le stesse proprietà della somma tra numeri reali, cioè

commutativa: $A + B = B + A$,

associativa: $(A + B) + C = A + (B+C) = A + B + C$,

esiste l'elemento neutro O, dove O è la matrice $n \times m$ con elementi tutti nulli,

esiste l'opposto di ogni matrice non nulla: $A=(a_{ij})$, $-A=(-a_{ij})$.

Prodotto per uno scalare

Data una matrice $A=(a_{ij}) \in M_{nm}$ e uno scalare $k \in \mathfrak{R}$, si definisce prodotto di k per A, e si indica con kA , la matrice

$$kA = (ka_{ij}).$$

Il prodotto per uno scalare verifica le proprietà

commutativa: $kA = Ak$

associativa: $h(kA) = k(hA) = hkA$

è distributivo sia rispetto alla somma in \mathfrak{R} che in M_{nm} :

$$(h+k)A = hA + kA,$$

$$h(A+B) = hA + kB.$$

Si definisce anche una operazione di prodotto tra matrici, che va effettuato righe per colonne e quindi tra matrici di due spazi del tipo M_{nm} , M_{mp} . Assegnate due matrici $A=(a_{ij}) \in M_{nm}$ e $B=(b_{ij}) \in M_{mp}$ si definisce prodotto la matrice $C=(c_{ij}) \in M_{np}$ i cui coefficienti sono definiti da

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,p.$$

Il prodotto tra matrici gode delle seguenti proprietà:

associativa, sia rispetto alle matrici che agli scalari:

$$A(BC) = (AB)C, \quad k(AB) = (kA)B = A(kB),$$

distributiva: $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$,

non vale invece la proprietà commutativa, anche quando è possibile calcolare AB e BA risulta $AB \neq BA$. Ad esempio consideriamo le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il prodotto righe per colonne non vale nemmeno la legge di annullamento del prodotto, cioè non è vero che se $AB = O$ una delle due matrici deve essere nulla. Consideriamo infatti le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Data una matrice A si dice trasposta di A e si indica con A^T , la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne. Allora se $A \in M_{nm}$, $A^T \in M_{mn}$ e:

$$(1.4) \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Per le matrici trasposte valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T, \\ (AB)^T &= B^T A^T, \\ (kA)^T &= kA^T, \text{ k costante,} \\ (A^T)^T &= A. \end{aligned}$$

Matrici quadrate.

Una matrice si dice quadrata se il numero di righe è uguale al numero delle colonne: $m=n$ (ordine della matrice). Quindi lo spazio delle matrici quadrate di ordine n verrà indicato

con M_{nn} . Osserviamo che i minori di una matrice, definiti in precedenza, sono matrici quadrate. In particolare se $A \in M_{nn}$, indicheremo con A_{ij} il minore di ordine $(n-1)$ che si ottiene eliminando la riga i -sima e la colonna j -sima e considereremo A_{ij} il minore relativo all'elemento a_{ij} .

In una matrice quadrata la diagonale costituita dagli elementi di indici uguali a_{ii} si dice diagonale principale. Una matrice quadrata si dice diagonale se tutti i suoi elementi posti al di fuori della diagonale principale sono nulli. Si dice matrice identità, e si indica con I , la matrice diagonale i cui elementi sono tutti uguali a 1. Si dice matrice triangolare inferiore (superiore) una matrice quadrata in cui sono nulli tutti gli elementi al di sopra (al di sotto) della diagonale principale.

Una matrice quadrata A si dice invertibile, se esiste una matrice B tale che $AB = BA = I$. La matrice B si indica con A^{-1} . Si ha anche $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Determinanti.

Per una matrice quadrata $A \in M_{nn}$ è possibile introdurre il concetto di determinante che indicheremo con $|A|$, oppure con $\det A$, e che è un numero reale definibile con un procedimento ricorsivo.

Se $A \in M_{11}$, cioè se $A = a_{11}$, si ha per definizione: $|A| = a_{11}$.

Se $A \in M_{22}$, cioè se

$$(2.1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

definiamo $|A|$ secondo la formula:

$$(2.2) \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Se $A \in M_{nn}$, $n > 2$, definiamo complemento algebrico C_{ij} relativo all'elemento a_{ij} , il determinante della matrice A_{ij} moltiplicato per $(-1)^{i+j}$: $C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$. Si ha:

$$(2.3) \quad \det A = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Si può quindi procedere per il calcolo secondo gli elementi di una riga o di una colonna qualsiasi. Notiamo che $|A|$ è definito in modo ricorsivo. Infatti se $n=3$ i minori A_{ij} sono di ordine 2 e quindi ogni $|A_{ij}|$ è definito da (2.2). Se $n=4$ i minori A_{ij} sono di ordine 3

allora per calcolare ogni $|A_{ij}|$ dobbiamo considerare i determinanti dei complementi algebrici degli elementi A_{ij} di che sono quindi di ordine 2 e quindi definiti ancora da (2.2) e così via.

A titolo di esempio calcoliamo il determinante di una matrice $A \in M_{33}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Si ha, procedendo ad esempio secondo gli elementi della prima riga:

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{32}). \end{aligned}$$

Proprietà dei determinanti.

2.1 $|A^T| = |A|$.

2.2 Se $B = kA$, k costante $|B| = k|A|$.

2.3 $|AB| = |A| |B|$.

2.4 Se una matrice A ha una riga o una colonna di elementi tutti nulli, allora $|A| = 0$.

2.5 Se una matrice ha due righe o due colonne uguali, allora $|A| = 0$.

2.6 Se in una matrice A una riga (una colonna) è combinazione lineare di altre due righe (due colonne), allora $|A| = 0$.

2.7 Scambiando in una matrice A due righe o due colonne si ottiene per la nuova matrice B : $|B| = -|A|$.

2.8 Il determinante di una matrice A triangolare (in particolare diagonale) è dato da

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

In particolare $|I| = 1$.

Il determinante permette di dare una condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice A sia invertibile è che $|A| \neq 0$.

Inoltre dalla definizione di matrice invertibile: $AA^{-1} = I$ segue $|AA^{-1}| = |A| |A^{-1}| = 1$ e $|A| \neq 0$, $|A^{-1}| \neq 0$ e quindi $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}.$$

In questo caso $m=n=2$. Assumiamo che A non abbia tutti elementi nulli, nel qual caso il sistema perderebbe di significato, ad esempio assumiamo che sia almeno $a_{11} \neq 0$. Se $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $r(A) = 2$ e il sistema (3.4) ammette una sola soluzione. Se $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ risulta $r(A) = 1$ (dato che abbiamo supposto $a_{11} \neq 0$), se è $r(B) = 2$, il sistema non ha soluzione. Se invece $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ e $r(B) = 1$, il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

Nel caso di sistemi di due equazioni in due variabili, al teorema di Rouché – Capelli si può dare una semplice interpretazione geometrica. Infatti il sistema (3.4) rappresenta le equazioni di due rette. Risolvere il sistema significa quindi determinare le intersezioni delle due rette. Se $|A| \neq 0$ i numeri direttori delle due rette $(-a_{12}, a_{11})$, $(-a_{21}, a_{22})$ non sono proporzionali e quindi le due rette non sono parallele e in particolare non coincidono, quindi hanno un unico punto di intersezione rappresentato dall'unica soluzione del sistema. Se $|A| = 0$, allora i numeri direttori delle due rette $(-a_{12}, a_{11})$, $(-a_{21}, a_{22})$ sono proporzionali. In questo caso se $r(B) = 2$ le due righe della matrice B non sono proporzionali e quindi le due rette sono parallele, quindi non hanno punti in comune, e ciò si traduce nel fatto che il sistema non ammette soluzioni, se invece $r(B) = 1$ le due righe della matrice B sono proporzionali e quindi le due equazioni rappresentano la stessa retta, di conseguenza il sistema ammette infinite soluzioni: tutti i punti della retta.

Cerchiamo ora di risolvere il sistema direttamente:

moltiplichiamo tutti i termini della prima riga di (3.4) per a_{22} e tutti i termini della seconda riga di (3.4) per $-a_{12}$ e sommiamo;

moltiplichiamo tutti i termini della prima riga di (3.4) per $-a_{21}$ e tutti i termini della seconda riga di (3.4) per a_{11} e sommiamo.

Otteniamo il sistema equivalente:

$$(3.5) \quad \begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{22}b_1 - a_{12}b_2) \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \end{cases}$$

Se $|A| = 0$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni se anche $a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$ e $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$; nessuna soluzione se almeno uno dei termini $a_{22}b_1 - a_{12}b_2$ o $a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ è diverso da zero. Notiamo che il primo caso corrisponde a $r(B) = 1$ e il secondo a $r(B) = 2$.

Assumiamo quindi $|A| \neq 0$. In questo caso da (3.5) otteniamo

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A^1}{|A|},$$

(3.6)

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{A^2}{|A|},$$

dove abbiamo posto:

$$A^1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, A^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

ottenuti da $|A|$ sostituendo la colonna dei termini noti alla j -sima colonna, corrispondente alla incognita x_j .

In questo consiste il calcolo di x_1 e x_2 con il metodo di Cramer.

In generale:

sia dato un sistema di n equazioni in n incognite $Ax = b$ e sia $|A| \neq 0$, allora $r(A)=r(B)=n$. Indichiamo con A^j la matrice che si ottiene da A sostituendo alla j -sima colonna gli elementi del vettore b . La soluzione del sistema è data da:

$$(3.7) \quad x_j = \frac{|A^j|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se $|A| = 0$, ma il sistema ammette soluzioni il metodo di Cramer è ancora applicabile ad un sottosistema di rango massimo. Se infatti $r(A) = r(B) = p$, si applica la (3.7) al sottosistema con matrice dei coefficienti $\tilde{A} \in M_{pp}$, cioè la matrice che si ottiene da A tale che $|\tilde{A}| \neq 0$. Si ottengono p delle variabili in funzione dei termini noti e delle altre $n-p$ incognite, coerentemente con il fatto che il sistema ammette ∞^{n-p} soluzioni.

Metodo di Gauss

Il metodo di Cramer è di facile calcolo manuale quando si devono risolvere sistemi con un numero “ragionevole” di incognite. Invece dal punto di vista numerico non è un

metodo utile, perché ha tempi di calcolo e di utilizzo macchina molto lunghi, quando cresce il numero di equazioni del sistema, già con $n > 3$ il tempo di calcolo è relativamente lungo. Si preferisce usare il metodo di riduzione di Gauss. Tale metodo consiste in un algoritmo iterativo che consente di ridurre il sistema ad un sistema equivalente la cui matrice dei coefficienti sia triangolare superiore. Per ottenere questo risultato si utilizzano essenzialmente sul sistema assegnato le seguenti trasformazioni:

moltiplicazione dei termini di una riga per una costante non nulla,
 sostituzione di un'equazione con la somma o differenza di altre due,
 scambio di due equazioni.

Fatto ciò, si determina il valore dell'incognita rimasta nell'ultima riga, si sostituisce nella penultima, si determina il valore dell'incognita rimasta in questa riga e si procede a ritroso, fino a determinare tutti i valori delle incognite e a risolvere in questo modo il sistema. Anche se ci si accorge durante il procedimento se il sistema non è risolubile, conviene sempre prima verificare se esistono soluzioni.

Illustriamo il metodo di Gauss mediante la risoluzione di due casi particolari.

Consideriamo il sistema

$$(3.8) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 \quad \quad - x_3 \quad \quad = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 19 \neq 0.$$

Il sistema (3.8) ammette una e una sola soluzione.

Moltiplichiamo la prima equazione per -2.

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 \quad \quad - x_3 \quad \quad = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Sostituiamo alla seconda riga la somma della prima e della seconda riga.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ \quad 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Sostituiamo alla terza riga la differenza tra la prima e la terza.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ \quad 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Scambiamo la seconda con la terza e la terza con la quarta equazione.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ \quad 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la seconda equazione per 2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ \quad 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo la terza equazione con la differenza tra la seconda e la terza.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 7x_3 + 4x_4 = 4 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{array} \right.$$

Moltiplichiamo per 3 la seconda equazione

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ 7x_3 + 4x_4 = 4 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{array} \right.$$

Sostituiamo alla quarta equazione la somma della seconda e della quarta.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ 7x_3 + 4x_4 = 4 \\ 4x_3 + 5x_4 = 5 \end{array} \right.$$

Moltiplichiamo la terza equazione per 4 e la quarta equazione per 7.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 28x_3 + 16x_4 = 16 \\ 28x_3 + 35x_4 = 35 \end{array} \right.$$

Sostituiamo la quarta equazione con la differenza tra la quarta e la terza.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 7x_3 + 4x_4 = 4 \\ 19x_4 = 19 \end{array} \right.$$

Otteniamo il valore dell'incognita x_4 : $x_4 = 1$. Sostituiamo questo valore nelle altre equazioni.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 1 \\ x_2 + x_3 + 1 = 2 \\ 7x_3 + 4 = 4 \\ x_4 = 1 \end{cases} .$$

Otteniamo il valore dell'incognita x_3 : $x_3 = 0$. Sostituiamo questo valore nelle altre equazioni.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} .$$

Otteniamo il valore dell'incognita x_2 : $x_2 = 1$. Sostituiamo questo valore nella prima equazione.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} .$$

Otteniamo infine la soluzione del sistema: $(1,1,0,1)$.

Consideriamo il sistema:

$$(3.9) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases} ,$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si ha:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 12 - 3 - 4 + 1 = 6 \neq 0,$$

quindi il sistema (3.9) ammette una e una sola soluzione.

Moltiplichiamo la prima equazione di (3.9) per -2:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo alla seconda riga la somma della prima e della seconda:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo alla terza riga la differenza tra la terza e la prima:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo alla terza riga la differenza tra la terza e la seconda:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Otteniamo il valore dell'incognita x_3 : $x_3 = -1$. Sostituiamo questo valore nelle altre equazioni.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 3x_2 - 5 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Otteniamo il valore dell'incognita x_2 : $x_2 = 2$. Sostituiamo questo valore nella prima equazione.

$$\begin{cases} x_1 - 2 + 1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Otteniamo la soluzione del sistema (1,2,-1).

Risolviamo a titolo di esempio il sistema (3.9) anche con il Metodo di Cramer. Sappiamo che $|A| = 6 \neq 0$. Utilizzando la formula (3.7):

$$x_1 = \frac{|A^1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{6} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6 + 3 - 2 - 1}{6} = 1,$$

$$x_2 = \frac{|A^2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{6} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6 + 3 + 2 + 1}{6} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$x_3 = \frac{|A^3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-1 - 2 - 2 - 1}{6} = -\frac{6}{6} = -1.$$

Otteniamo la soluzione di (3.9): (1,2,-1).

4. Applicazioni dei sistemi lineari.

Consideriamo alcuni semplici problemi risolvibili con sistemi lineari.

1) Problema: determinare i lati di un campo rettangolare sapendo che il perimetro è di 14m e che l'area non cambia se si aumenta un lato di 2m e si diminuisce l'altro di 1m.

Indichiamo con x e y i due lati del rettangolo. Il perimetro del rettangolo è quindi dato da $2x+2y$, mentre l'area è data da xy . Si ottiene in questo modo il sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y=14 \\ (x+2)(y-1)=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ -x+2y=2 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1=3 \neq 0.$$

Si ottiene allora:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{14-2}{3} = \frac{12}{3} = 4, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

I lati del campo sono quindi rispettivamente di 4m e 3m.

2) Ho un totale di 75 euro in monete da 2 euro, 1 euro e 50 centesimi. Determinare quante sono le monete di ogni tipo, sapendo che il numero delle monete da 50c supera di 5 la somma delle monete da 2 e 1 euro, le monete da 50c sono il doppio delle monete da 2 euro e la somma di due volte le monete da 1 euro e delle monete da 2 euro supera di 10 il numero delle monete da 50c.

Indichiamo con x il numero delle monete da 2 euro, con y il numero delle monete da 1 euro e con z il numero delle monete da 50c. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x+y+5=z \\ 2x-z=0 \\ x+2y=z+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=-5 \\ 2x-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2+1+2+4=9 \neq 0.$$

Risolvi il sistema con il metodo di Gauss:

$$\begin{cases} x+y-z=-5 \\ 2x-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y+2z=10 \\ 2x-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=-5 \\ -2y+z=10 \\ x+2y-z=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=-5 \\ -2y+z=10 \\ -y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+15-z=-5 \\ -30+z=10 \\ y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-40=-20 \\ z=40 \\ y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ z=40 \\ y=15 \end{cases}$$

3) In un test chimico è necessario preparare una soluzione alcolica al 40%. Nella fornitura a disposizione ci sono solo due soluzioni: una da 50 litri al 30% e una al 60%.
 A) Quanti litri della soluzione al 60% bisogna aggiungere ai 50 litri della soluzione al 30% per ottenere la soluzione al 40%? B) Quanti litri delle due soluzioni al 30% e al 60% occorre utilizzare per ottenere 6 litri della soluzione al 40%?

A) Indichiamo con x la quantità di soluzione al 60% da utilizzare e con y la quantità di soluzione finale al 40%. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x+50=y \\ 0,6x+0,3 \cdot 50=0,4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-50 \\ 6x-4y=-150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-50 \\ 3x-2y=-75 \end{cases}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0.$$

Si ottiene allora:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -50 & -1 \\ -75 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = 100 - 75 = 25, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -50 \\ 3 & -75 \end{vmatrix}}{|A|} = -75 + 150 = 75.$$

La risposta è quindi 25 litri.

B) Indichiamo con x la quantità di sostanza al 60% da utilizzare e con y la quantità al 30%. Otteniamo questa volta il sistema:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 0,6x+0,3y=0,4 \cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 6x+3y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 = -1 \neq 0.$$

Si ottiene allora:

$$x = - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2, \quad y = - \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 12 = 4.$$

Occorre quindi utilizzare 2 litri della sostanza al 60% e 4 della sostanza al 30%