Spazi vettoriali euclidei

n. 681

Definizione. *Chiameremo* **prodotto scalare** *su uno spazio vettoriale sui reali V un'applicazione*

$$s : V \times V \to \mathbb{R}$$

tale che per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed $r \in \mathbb{R}$ si abbia:

- $s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,

- $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + s(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,

- $s(r\mathbf{u}, \mathbf{w}) = rs(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

Inoltre, diremo che un prodotto scalare s *su* V è definito positivo *se per ogni* $\mathbf{v} \in V$ *si ha*

- $$s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0;$$
- $$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Uno **spazio vettoriale euclideo** *è una coppia*

$$(V, s)$$

con

- $V =$ *spazio vettoriale sui reali*
- $s =$ *prodotto scalare definito positivo su* V

D'ora in poi, il prodotto scalare tra vettori liberi definito in precedenza, sarà detto **prodotto scalare geometrico**, *per distinguerlo dagli altri prodotti scalari che è possibile definire sullo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori liberi.*

Esempio. *Sia* s *il prodotto scalare geometrico sullo spazio* $\mathcal{V}$ *dei vettori liberi. Allora* $(\mathcal{V}, s)$ *è uno spazio euclideo.*

Esempio. *Sia* s *il prodotto scalare standard su* $\mathbb{R}^n$*. Allora* $(\mathbb{R}^n, s)$ *è uno spazio euclideo.*

Sistemi lineari

n. 688

Spesso si incontra il problema di trovare dei numeri $x_1, \ldots, x_n$ tali che

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

dove gli a_{ij} e b_i sono dei numeri assegnati, e dove la parentesi graffa sta ad indicare che le uguaglianze devono essere verificate tutte.

Parlando un po' informalmente questo problema viene chiamato **sistema** di m equazioni lineari in n incognite; concisamente: **sistema lineare**.

Sempre parlando informalmente, un'*equazione lineare* è il problema di trovare dei numeri $x_1, \ldots, x_n$ tali che

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

dove gli $a_1, \ldots, a_n$ e b sono dei numeri assegnati.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice **matrice dei coefficienti** del sistema.

La matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

si dice **matrice completa** del sistema.

Una **soluzione** del sistema lineare è un vettore numerico $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + \cdots + a_{mn}s_n = b_m \end{cases},$$

Se il sistema ammette almeno una soluzione si dice **compatibile**, in caso contrario **incompatibile**.

Due sistemi si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni (più precisamente, se l'insieme di tutte le soluzioni del primo è uguale all'insieme di tutte le soluzioni del secondo).

Un sistema si dice **omogeneo** se ha tutti i termini noti uguali a zero.

Osservazione. *Un sistema omogeneo è sicuramente compatibile, perché ha come soluzione il vettore numerico nullo* $(0, \dots, 0)$*.*

Forma matriciale dei sistemi lineari

n. 696

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Concisamente: $AX = B$.

Sistema omogeneo associato

n. 698

Definizione. *Se*

$$AX = B$$

è un sistema lineare (scritto in forma matriciale), allora il sistema

$$AX = \mathbf{0}$$

si dice sistema omogeneo associato *al sistema* $AX = B$.

Teorema di Rouché-Capelli

n. 700

Proposizione. *Siano* A *e* A' *la matrice dei coefficienti e la matrice completa di un sistema lineare. Allora il sistema è compatibile se e solo se* A *e* A' *hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione “a scelta”.

Regola di Cramer

n. 703

Proposizione. *(regola di Cramer). Sia S un sistema lineare di n equazioni in n incognite e sia A la matrice dei coefficienti (quadrata di ordine n). Se*

$$|A| \neq 0$$

allora il sistema S ha un'unica soluzione, data da:

$$\left(\frac{|A_1|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|}\right)$$

dove A_i indica la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $\mathbf{a}^i$ con la colonna dei termini noti.

Dimostrazione “a scelta”.

n. 705

Metodo per la risoluzione

dei sistemi lineari

n. 706

Proposizione. *Se una riga della matrice completa di un sistema lineare dipende dalle rimanenti, eliminando la corrispondente equazione si ottiene un sistema lineare equivalente.*

Grazie a questa proposizione, al teorema di Rouché-Capelli ed alla regola di Cramer, possiamo fornire il seguente metodo generale per la risoluzione dei sistemi lineari.

• Si calcolano i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa tramite il teorema degli orlati;

• se i ranghi sono diversi il sistema è incompatibile;

• se i ranghi sono uguali, si considera il sistema ottenuto prendendo solo le equazioni individuate da un minore fondamentale della matrice dei coefficienti (che è per forza anche un minore fondamentale della completa), si assegnano valori arbitrari alle incognite “escluse da quel minore fondamentale”, e si applica la regola di Cramer.

Questo metodo, sebbene risulti utile in certe situazioni, generalmente comporta molti più calcoli rispetto ad un altro metodo, detto **metodo di Gauss**, il quale quindi va quasi sempre preferito.