Cos'è un *riferimento* su una retta $r$?

È una coppia $(O, (\mathbf{i}))$, dove $O$ è un punto di $r$ e $(\mathbf{i})$ è un riferimento vettoriale dello spazio direttore di $r$.

Cioè $\mathbf{i}$ è semplicemente un vettore non nullo parallelo ad $r$ (o, equivalentemente, che può essere rappresentato da un segmento orientato contenuto in $r$).

Un qualunque punto di $P \in r$, ha un'unica coordinata (che classicamente viene chiamata *ascissa*): la componente del vettore $P - O$ rispetto al riferimento vettoriale $(\mathbf{i})$.

Per definizione di componente, si ha

$$x \text{ ascissa di } P \iff P - O = x\mathbf{i}.$$

Cos'è un *riferimento* su un piano $\pi$?

Un *riferimento* (cartesiano) su $\pi$ è una coppia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, dove $O$ è un punto di $\pi$, e $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ è un riferimento vettoriale dello spazio direttore di $\pi$.

In altre parole $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sono semplicemente due vettori non paralleli tra loro, e paralleli a $\pi$ (o, equivalentemente, che possono essere rappresentati da segmenti orientati contenuti in $\pi$).

Un qualunque punto $P \in \pi$, ha una coppia di coordinate $(x, y)$: le componenti del vettore $P - O$ rispetto al riferimento vettoriale $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Classicamente, la coordinata $x$ viene detta *ascissa* e $y$ *ordinata*.

L'unica retta contenente $O$ e parallela ad $\mathbf{i}$ viene detta *asse delle ascisse* (o asse $x$) del riferimento.

L'unica retta contenente $O$ e parallela a $\mathbf{j}$ viene detta *asse delle ordinate* (o asse $y$) del riferimento.

Tali rette sono spesso considerate come rette orientate, fissando i versi concordi rispettivamente ad $\mathbf{i}$ e a $\mathbf{j}$.

Se i vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono rappresentati da segmenti congruenti, il riferimento viene detto *monometrico*. Se i vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono ortogonali, allora il riferimento viene detto *ortogonale*.

Per definizione di componenti si ha

$$(x, y) \text{ coordinate di } P \iff P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Se il riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ è monometrico, spesso conviene assumere come unità di misura la lunghezza dei rappresentanti di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Con questa scelta dell'unità di misura, i vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono dunque versori, detti versori degli assi.

Un *riferimento* (cartesiano) dello spazio è dato da una coppia $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, dove $O$ è un punto e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è un riferimento vettoriale dello spazio dei vettori liberi. Se $P$ è un qualunque punto di $\pi$, le componenti $(x, y, z)$ del vettore $P - O$ rispetto al riferimento vettoriale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ vengono dette *coordinate* di $P$ rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$. In particolare $x$ viene detta *ascissa*, $y$ *ordinata* e $z$ *quota*.

L'unica retta contenente $O$ e parallela ad $\mathbf{i}$ viene detta *asse delle ascisse* (o asse $x$) del riferimento. L'unica retta contenente $O$ e parallela a $\mathbf{j}$ viene detta *asse delle ordinate* (o asse $y$) del riferimento. L'unica retta contenente $O$ e parallela a $\mathbf{k}$ viene detta *asse delle quote* (o asse $z$) del riferimento. Tali rette sono spesso considerate come rette orientate, fissando i versi concordi rispettivamente ad $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Se i vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono rappresentati da segmenti congruenti, il riferimento viene detto *monometrico*. Se i vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono a due a due ortogonali, allora il riferimento viene detto *ortogonale*.

Per fissare un riferimento vettoriale dello spazio dei vettori liberi, basta scegliere tre vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ non nulli e non paralleli ad uno stesso piano. Se il riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ è monometrico, spesso conviene assumere come unità di misura la lunghezza dei rappresentanti di $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Con questa scelta dell'unità di misura, i vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono dunque versori, detti versori degli assi.

Come funzionano i riferimenti non monometrici e non ortogonali?

# Cambio di riferimento

Alla lavagna.

Fissato un riferimento dello spazio, sia $P_0$ il punto di coordinate $(1, 2, 3)$ e $\mathbf{v}$ il vettore di componenti $(4, 5, 6)$.

Trovare delle equazioni parametriche della retta passante per $P_0$ e parallela a $\mathbf{v}$.

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \quad .$$

Dunque i punti di $r$ si ottengono tutti assegnando a $t$ tutti i possibili valori reali (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $P_0$, per $t = 1$ si ottiene il punto di coordinate $(5, 7, 9)$, per $t = -2$ si ottiene il punto di coordinate $(-7, -8, -9)$, ecc.).

Fissato un riferimento dello spazio, sia $P_0$ il punto di coordinate $(1, 2, 3)$.

Trovare delle equazioni parametriche della retta passante per $P_0$ e con numeri direttori $(4, 5, 6)$

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \quad .$$

È la stessa di prima!

Trovare i numeri direttori della retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 7 - 4t \end{cases} \quad .$$

$(2,3,-4)$

Fissiamo nello spazio un riferimento, e consideriamo il punto $P_0$ di coordinate $(4, 6, 8)$ e i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, rispettivamente di componenti $(1, 2, 3)$ e $(-1, 0, 4)$. Poiché le terne $(1, 2, 3)$ e $(-1, 0, 4)$ non sono proporzionali, i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono paralleli. Quindi esiste un unico piano $\pi$ contenente il punto $P_0$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Trovare delle equazioni parametriche di $\pi$.

$$\begin{cases} x = 4 + t - s \\ y = 6 + 2t \\ z = 8 + 3t + 4s \end{cases}$$

(con parametri $t, s$).

E un'equazione cartesiana?

Nella dimostrazione “a scelta” sull’equazione cartesiana di un piano, si può trovare il seguente utile metodo.

Sia fissato un riferimento dello spazio.

- $\pi$ piano,
- $P_0 \in \pi$,
- $(x_0, y_0, z_0)$ coordinate di $P$;
- $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ vettori paralleli a $\pi$ e non paralleli tra loro,
- • $(l, m, n)$, $(l', m', n')$ rispettive componenti.

Allora l'equazione di $\pi$ si ottiene calcolando il seguente determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}$$

Per il piano di prima a formula ci dà:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-6 & z-8 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante si ottiene

$$8x - 7y + 2z - 6 = 0\ .$$