Relazione tra prodotto scalare geometrico e numerico

n. 782

Vediamo ora che collegamento c'è tra il prodotto scalare di vettori liberi e il prodotto scalare standard di vettori numerici.

Definizione. *Un riferimento dello spazio ordinario, o di un suo sottospazio, sarà detto* **monometrico** *se i vettori del riferimento vettoriale sono tutti versori, e sarà detto* **ortogonale** *se sono a due a due ortogonali tra loro.*

Un **asse** *di un riferimento è una retta orientata passante per l'origine e parallela e concorde ad uno dei vettori del riferimento vettoriale.*

Osservazione. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ *un riferimento monometrico ortogonale dello spazio. Siccome per un qualunque vettore* $\mathbf{v}$ *si ha* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$, *abbiamo*

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \,, \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \,, \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \,,$$

e siccome due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo abbiamo anche

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \,, \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \,, \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \,.$$

Proposizione. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ *un riferimento dello spazio e siano* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori liberi rispettivamente di componenti* (l, m, n) *e* (l', m', n')*. Se il riferimento è monometrico ortogonale, allora si ha*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ll' + mm' + nn'$$

(in altre parole: in un riferimento monometrico ortogonale, il prodotto scalare di vettori liberi è uguale al prodotto scalare standard dei vettori delle componenti).

Dimostrazione. Per definizione di componenti, si ha

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{w} = l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\cdot(l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}) = \\
&= ll'\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + lm'\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + ln'\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + \\
&\quad + ml'\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + mm'\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + mn'\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + \\
&\quad + nl'\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + nm'\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + nn'\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \\
&= ll' + mm' + nn'\,,
\end{aligned}$$

come volevamo. $\square$

Componenti

di un prodotto vettoriale

n. 788

Proposizione. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ *un riferimento monometrico ortogonale tale che* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *abbia la stessa orientazione fissata per il prodotto vettoriale, sia* $\mathbf{v}$ *un vettore di componenti* (l, m, n) *e* $\mathbf{w}$ *un vettore di componenti* (l', m', n'). *Allora le componenti di* $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *sono*

$$\left(\quad \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} \quad \right),$$

cioè i tre minori di ordine due, con il secondo cambiato di segno, della matrice che ha per righe le componenti di $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

Dimostrazione “a scelta”.

Formula per il modulo di un vettore libero

n. 790

Proposizione. *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale* $(O,(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}))$*. Per ogni vettore libero* $\mathbf{v}$*, dette* (l,m,n) *le sue componenti, si ha*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{l^2+m^2+n^2}\,.$$

Distanza tra due punti

n. 792

Definizione. *Si dice* **distanza** *tra due punti* A *e* B *il modulo del segmento* $\overline{AB}$. *Tale distanza sarà indicata con* $d(A, B)$.

Proposizione. *Sia fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale* $(O,(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}))$. *Se* P *e* P' *sono punti di coordinate rispettivamente* (x,y,z) *ed* (x',y',z') *allora la distanza tra* P *e* P' *è data da*

$$d(P,P') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$d(P,P') = |\overline{PP'}| = |P' - P| =$$
$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}\,,$$

come volevamo. $\square$

n. 795

Coseni direttori

n. 796

Definizione. *Sia fissato nello spazio (o in un piano) un riferimento monometrico ortogonale. I* **coseni direttori** *di una retta* r *sono le componenti di un versore parallelo ad* r. *I* **coseni direttori** *di una retta orientata* $\vec{r}$ *sono le componenti di un versore parallelo e concorde ad* $\vec{r}$.

Poiché un versore parallelo ad r è in particolare un vettore direzionale di r, una terna (o, nel piano, una coppia) di coseni direttori (λ, μ, ν) è una particolare terna di numeri direttori. Si ha quindi che i coseni direttori di una retta non orientata sono numeri direttori caratterizzati dalla condizione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Osservazione. *Una retta orientata ha un'unica terna di coseni direttori. Una retta non orientata ha due terne di coseni direttori, opposte tra loro (corrispondenti ai due versori paralleli ad essa, a loro volta corrispondenti ai due versi su di essa).*

n. 799

Il nome "coseni" è dovuto al seguente fatto.

Proposizione. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$ *un riferimento monometrico ortogonale, sia* $\vec{r}$ *una retta orientata e siano* (λ, μ, ν) *i suoi coseni direttori. Detti* $\vec{x}$*,* $\vec{y}$ *e* $\vec{z}$ *i tre assi del riferimento (considerati come rette orientate), si ha:*

$$\lambda = \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}}\,, \qquad \mu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}}\,, \qquad \nu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{z}}\,.$$

Dimostrazione "a scelta".

Ortogonalità per rette e piani

n. 801

Proposizione. *Esistono tre versori* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *a due a due ortogonali tra loro.*

Dimostrazione "a scelta".

n. 802

È possibile trovare nello spazio quattro rette a due a due perpendicolari? Intuitivamente, no. Ma per essere proprio sicuri, meglio dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione. *Siano*

$$S = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \qquad e \qquad T = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$$

sistemi di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale euclideo (V, s)*. Se per ogni* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *si ha*

$$s(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = 0 \, ,$$

allora il sistema "unione" $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m]$ *è anch'esso linearmente indipendente.*

Dimostrazione “a scelta”.

n. 804

A questo punto è facile dimostrare che non possono esistere quattro rette a due a due ortogonali. Infatti, se queste esistessero, prendendo un vettore direzionale per ciascuna otterremmo quattro vettori non nulli a due a due ortogonali, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Per la proposizione ora vista, i sistemi $S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ e $T = [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ sono indipendenti. Ancora per la stessa proposizione il sistema $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ sarebbe indipendente. Ma questo è impossibile perché lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3.

Definizione. *Un vettore libero si dice* **ortogonale** *ad un piano* π *se è ortogonale a tutti i vettori paralleli a* π. *Un vettore ortogonale a* π *che sia non nullo, sarà detto* **normale** *al piano. Una retta si dice* **ortogonale**, *o* **normale**, *o* **perpendicolare**, *ad un piano* π *se è ortogonale a tutte le rette contenute in* π.

Per noi dunque un vettore normale a π è un vettore non nullo ortogonale a π. Avvertiamo che in qualche testo è possibile trovare "la normale a π", col significato di versore (cioè vettore di modulo 1) ortogonale a π. Inoltre, attenzione a non far confusione col termine "normalizzare" che vuol dire dividere un vettore per il suo modulo (ottenendo così un versore).

Naturalmente, il vettore nullo, essendo ortogonale a qualsiasi vettore, è ortogonale a qualsiasi piano. Tuttavia è bene puntualizzare il fatto, peraltro abbastanza intuitivo, che per ogni piano ci sono vettori non nulli ad esso ortogonali.

Proposizione. *Sia π un piano. Allora esiste un vettore normale a π.*

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione. *In un riferimento monometrico ortogonale, i parametri di giacitura di un piano* π *sono le componenti di un vettore normale a* π.

Tralasciamo la dimostrazione.

Proposizione. *I vettori normali ad uno stesso piano sono tutti paralleli tra loro.*

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che esistano due vettori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ normali ad un piano π, ma non paralleli tra loro. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori paralleli a π, non paralleli tra loro. Dunque i sistemi $S = [\mathbf{n}, \mathbf{n}']$ e $T = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ sono indipendenti. Inoltre, poiché $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ sono normali a π e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli a π, ogni vettore di S è ortogonale a ogni vettore di T.

Per una proposizione vista poco sopra, avremmo che il sistema $[\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{u}, \mathbf{v}]$ sarebbe linearmente indipendente, che è assurdo perchè lo spazio dei vettori liberi ha dimensione 3. Questo prova che non possono esistere due vettori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ normali a π ma non paralleli tra loro, come volevamo. $\square$

Poiché i vettori normali ad un piano sono tutti paralleli tra loro, le loro componenti sono tutte multiple l'una dell'altra. Inoltre poco fa abbiamo detto che in un riferimento monometrico ortogonale, i parametri di giacitura di un piano π sono le componenti di un vettore normale a π. Poiché anche i parametri di giacitura sono tutti multipli l'uno dell'altro, otteniamo subito la seguente proposizione.

Proposizione. *Sia* π *un piano e* (a, b, c) *le componenti di un vettore* $\mathbf{v}$ *rispetto ad un riferimento monometrico ortogonale. Abbiamo che*

$$(a, b, c) \text{ parametri di giacitura di } \pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{v} \text{ vettore normale a } \pi \ .$$

Proposizione. *Sia P un punto e π un piano. Allora esiste una ed una sola retta passante per P e ortogonale a π.*

n. 814

Dimostrazione. Una retta è normale ad un piano se e solo se lo è il suo vettore direzionale. Basta quindi prendere l'unica retta passante per P e avente come vettore direzionale un qualunque vettore normale a π. $\square$

Proposizione. *Sia P un punto ed r una retta. Esiste uno ed un solo piano passante per P ed ortogonale ad r.*

Tralasciamo la facile dimostrazione.

Quand'è che due piani si dicono ortogonali? Sicuramente non è possibile che tutte le rette di un piano siano ortogonali a tutte le rette dell'altro, dobbiamo quindi “accontentarci” di una proprietà più debole. Per descriverla, stabiliamo la seguente proposizione.

Proposizione. *Siano π e π' piani. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *c'è una retta contenuta in π e normale a π';*

2. *c'è una retta contenuta in π' e normale a π;*

3. *una retta normale a π e una retta normale a π' sono ortogonali*

(dire che le affermazioni sono equivalenti, vuol dire che sono o tutte vere o tutte false, a seconda della scelta dei piani π e π').

Dimostrazione “a scelta”.

n. 819

Definizione. *Due piani si dicono* **ortogonali** *se sono verificate le affermazioni della proposizione precedente.*

Condizioni di ortogonalità

n. 821

Le condizioni analitiche per l'ortogonalità sono simili a quelle per il parallelismo, purché però si usino riferimenti monometrici ortogonali (altrimenti queste condizioni diventano più complicate).

Proposizione. *(condizione di ortogonalità tra rette).*
Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano r ed r' rette, con numeri direttori rispettivamente

$$(l, m, n) \quad \textit{ed} \quad (l', m', n') \; .$$

Allora si ha:

$$r \textit{ ed } r' \textit{ ortogonali} \iff \quad ll' + mm' + nn' = 0 \; .$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ i vettori rispettivamente di componenti (l, m, n) ed (l', m', n'), così che $\mathbf{v}$ è un vettore parallelo r e $\mathbf{v}'$ è un vettore parallelo ad r'. Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ ortogonali} \iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali} \iff$$
$$\iff \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}' = 0 \iff ll' + mm' + nn' = 0\ ,$$

come volevamo. $\square$

Proposizione. *(condizione di ortogonalità tra piani).*
Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano π *e* π' *piani, con parametri di giacitura rispettivamente* (a, b, c) *ed* (a', b', c')*.*
Allora si ha:

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} \iff aa' + bb' + cc' = 0\ .$$

Dimostrazione.

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ i vettori rispettivamente di componenti (a, b, c) ed (a', b', c'). Per una proposizione vista poco fa abbiamo che $\mathbf{v}$ è un vettore normale a π e $\mathbf{v}'$ è un vettore normale a π'.

Ricordiamo che π e π' sono ortogonali se e solo se verificano una delle (e quindi tutte e) tre condizioni della proposizione introduttiva all'ortogonalità tra piani.

Usando la terza condizione, otteniamo

$$\pi \text{ e } \pi' \text{ ortogonali} \iff \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{v}' \text{ ortogonali}$$
$$\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0 \iff aa' + bb' + cc' = 0 \,,$$

come volevamo. $\square$

Proposizione. *(condizione di ortogonalità tra una retta e un piano).*
Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, sia r *una retta di numeri direttori* (l, m, n) *e* π *un piano di parametri di giacitura* (a, b, c)*. Si ha:*

r *e* π *sono ortogonali*

$$\Updownarrow$$

(l, m, n) *ed* (a, b, c) *sono proporzionali.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}$ il vettore direzionale di r di componenti (l, m, n). Si ha

$$\begin{aligned} r \text{ e } \pi \text{ sono ortogonali} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \text{ normale a } \pi \\ &\Longleftrightarrow (l, m, n) \text{ parametri di giacitura di } \pi \\ &\Longleftrightarrow (l, m, n) \text{ ed } (a, b, c) \text{ sono proporzionali} , \end{aligned}$$

come volevamo. $\square$

Geometria piana

n. 830

Gli stessi ragionamenti usati per la geometria analitica delle rette e dei piani nello spazio, consentono (in maniera ancora più semplice) di trattare la geometria analitica delle rette in un piano.

n. 831

Facciamo un elenco dei risultati e delle definizioni di base di geometria analitica piana, senza le dimostrazioni (che sono analoghe e anzi più semplici di quelle che abbiamo visto per lo spazio).

Al termine faremo anche vedere che, per il piano, il concetto elementare di coefficiente angolare gioca lo stesso ruolo dei numeri direttori.

Definizione. *Sia* r *una retta contenuta in un piano* π*. Fissato un riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *di* π*, le componenti* (l, m) *di un vettore direzionale di* r *(rispetto al riferimento vettoriale* $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$*) vengono dette* **numeri direttori** *(o* **parametri direttori***) di* r*, rispetto al riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$*.*

Osservazione. *Le coppia di numeri direttori sono non nulle e tutte proporzionali tra loro.*

n. 834

Proposizione. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *un riferimento di un piano* π, *sia* P_0 *un punto di coordinate* (x_0, y_0), *sia* $\mathbf{v}$ *un vettore non nullo di componenti* (l, m) *e sia* r *la retta contenente* P_0 *e parallela a* $\mathbf{v}$. *Se* P *è un qualunque punto di* π *e* (x, y) *sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Definizione. *L'affermazione*

$$P \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

sono le **equazioni parametriche** *(o una* **rappresentazione parametrica***) della retta r rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, con parametro t.*

Osservazione. *Fissato un riferimento* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *di un piano* π, *ogni retta* $r \subseteq \pi$ *può essere rappresentata con delle equazioni parametriche.*

Osservazione. *Se* x_0, y_0, l, m *sono numeri reali, con* l, m *non entrambi nulli, allora scrivendo*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

si ottiene sempre una rappresentazione parametrica di qualche retta: di quella passante per il punto di coordinate (x_0, y_0) *e parallela al vettore di componenti* (l, m)*.*

Proposizione. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *un riferimento di un piano* π *e sia* $r \subseteq \pi$ *una retta. Allora esistono* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tali che, se* P *è un qualunque punto di* π *e* (x, y) *sono le sue coordinate, si ha*

$$P \in r \iff ax + by + c = 0.$$

Inoltre a *e* b *non possono essere entrambi nulli.*

Definizione. *Nella situazione della proposizione ora dimostrata, l'affermazione*

$$P \in r \iff ax + by + c = 0,$$

viene sinteticamente espressa dicendo che

$$ax + by + c = 0$$

è **un'equazione cartesiana (ordinaria)** *della retta r nel riferimento $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$.*

In sintesi, l'insieme delle terne di coordinate dei punti di r coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare

$$ax + by + c = 0.$$

Proposizione. *Una qualsiasi equazione del tipo* $ax + by + c = 0$, *in un fissato riferimento di un piano* π, *con* $(a, b) \neq (0, 0)$ *rappresenta sempre una retta contenuta in* π, *e se due equazioni di questo tipo rappresentano lo stessa retta allora sono l'una multiplo dell'altra.*

Proposizione. *Siano* r *ed* r' *rette contenute in un piano* π. *Fissato un riferimento di* π, *sia* (l, m) *una coppia di numeri direttori di* r *e sia* (l', m') *una coppia di numeri direttori di* r'. *Si ha:*

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele}$$

$$\Updownarrow$$

$$(l, m) \text{ ed } (l', m') \text{ sono proporzionali.}$$

Proposizione. *Fissato un riferimento di un piano* π, *sia* $r \subseteq \pi$ *una retta con numeri direttori* (l, m) *e sia* $s \subseteq \pi$ *una retta di equazione cartesiana* $ax + by + c = 0$.

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele} \iff al + bm = 0 \ .$$

Proposizione. *Fissato un riferimento di un piano π, siano r ed r' rette contenute in π di equazioni cartesiane ripettivamente*

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{e} \qquad a'x + b'y + c' = 0 \, .$$

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ sono parallele}$$

$$\Updownarrow$$

$$(a, b) \text{ ed } (a', b') \text{ sono proporzionali.}$$

Definizione. *Sia fissato in un piano* π *un riferimento monometrico ortogonale. I* **coseni direttori** *di una retta* $r \subseteq \pi$ *sono le componenti di un versore parallelo ad* r*. I* **coseni direttori** *di una retta orientata* $\vec{r}$ *contenuta in* π *sono le componenti di un versore parallelo e concorde ad* $\vec{r}$*.*

Proposizione. *Sia* $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ *un riferimento monometrico ortogonale di un piano* π*, sia* $\vec{r}$ *una retta orientata contenuta in* π *e siano* (λ, μ) *i suoi coseni direttori. Detti* $\vec{x}$*,* $\vec{y}$ *i due assi del riferimento (considerati come rette orientate), si ha:*

$$\lambda = \cos \widehat{\vec{r}\vec{x}}\,, \qquad \mu = \cos \widehat{\vec{r}\vec{y}}\,.$$

Definizione. *Se* r *è una retta contenuta in un piano* π, *un vettore non nullo ortogonale ad* r *e parallelo a* π, *sarà detto* **normale** *ad* r *in* π.

Proposizione. *Fissato un riferimento monometrico ortogonale in un piano* π*, sia* r *una retta contenuta in* π*. Una coppia* (a, b) *è la coppia di componenti di un vettore normale ad* r *in* π *se e solo se* r *ha un'equazione cartesiana con* (a, b) *rispettivamente coefficienti di* x *e* y *(cioè* $ax + by + c = 0$*).*

Proposizione. *Fissato in un piano* π *un riferimento monometrico ortogonale, siano* r *ed* r' *rette contenute in* π, *con numeri direttori rispettivamente* (l, m) *ed* (l', m'). *Allora si ha:*

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff ll' + mm' = 0 \,.$$

Proposizione. *Fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale, sia r una retta contenuta in π con numeri direttori (l, m) e sia s una retta di equazione cartesiana $ax+by+c=0$.*

Si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari}$$

$$\Updownarrow$$

$$(a, b) \text{ ed } (l, m) \text{ sono proporzionali .}$$

Proposizione. *Fissato in un piano π un riferimento monometrico ortogonale, siano r ed r' rette contenute in π di equazioni cartesiane rispettivamente*

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{e} \qquad a'x + b'y + c' = 0\ .$$

Allora si ha:

$$r \text{ ed } r' \text{ perpendicolari} \iff aa' + bb' = 0\ .$$

Proposizione. *Sia fissato in un piano* π *un riferimento monometrico ortogonale. Per ogni vettore libero* $\mathbf{v}$ *parallelo a* π, *dette* (l, m) *le sue componenti, si ha*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{l^2 + m^2}.$$

Proposizione. *Sia fissato in un piano* π *un riferimento monometrico ortogonale. Se* P *e* P' *sono punti di* π*, di coordinate rispettivamente* (x, y) *ed* (x', y') *allora la distanza tra* P *e* P' *è data da*

$$d(P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}\,.$$

Osservazione. *Sia fissato in un piano* π *un riferimento, sia* r *una retta contenuta in* π *non parallela all'asse* y *e sia* (l, m) *una coppia di numeri direttori di* r*. Siccome* r *non è parallela all'asse* y*, si ha* $l \neq 0$*. Dunque ha senso il rapporto*

$$\frac{m}{l}\,.$$

Poiché le coppie di numeri direttori di r *sono tutte proporzionali, tale numero non dipende dalla scelta di* (l, m)*, ma solo dalla retta* r *(e dal riferimento fissato).*

Definizione. *Sia fissato in un piano π un riferimento e sia r una retta contenuta in π non parallela all'asse y. Allora il numero reale*

$$\frac{m}{l}$$

si dice **coefficiente angolare** *di r rispetto al riferimento fissato.*

Per le rette parallele all'asse y, si può dire che il coefficiente angolare è infinito.

Osservazione. *Una retta* r *ha coefficiente angolare* m *se e solo se* $(1, m)$ *è una coppia di numeri direttori di* r.

n. 857

Osservazione. *Sia fissato un riferimento in un piano π e sia r una retta contenuta in π non parallela all'asse y. Per la condizione di parallelismo "$al+bm = 0$", se r ha equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, allora il coefficiente angolare di r è dato da*

$$-\frac{a}{b}\,.$$

Proposizione. *Siano* r *ed* r' *rette con rispettivi coefficienti angolari* m *ed* m'*. Allora* r *ed* r' *sono parallele se e solo se* $m = m'$*.*

n. 859

Proposizione. *Siano* r *ed* r' *rette con rispettivi coefficienti angolari* m *ed* m'*. Allora* r *ed* r' *sono perpendicolari se e solo se* $mm' = -1$.

Accenno alle coniche

n. 861

Definizione. *Sia* π *un piano, siano* F_1 *ed* F_2 *punti di* π *e sia* a *un numero reale tale che*

$$a > \frac{1}{2} d(F_1, F_2)\ .$$

L'insieme

$$E = \{P \in \pi :\ d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

si chiama **ellisse** *di* **fuochi** F_1, F_2 *e semiasse maggiore* a.

Osservazione. *Un'ellisse con i fuochi coincidenti si riduce ad una circonferenza.*

- E ellisse in un piano π,
- F_1, F_2 fuochi,
- $a =$ semiasse maggiore,
- $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ riferimento monometrico ortogonale di π tale che
  - O è il punto medio di F_1, F_2,
  - $\mathbf{i}$ è parallelo al vettore $F_2 - F_1$ (cioè l'asse x contiene i fuochi).

Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene ad E se e solo se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

con

$$b^2 = a^2 - \Big(\frac{1}{2} d(F_1, F_2)\Big)^2\,.$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Definizione. *Sia* π *un piano, siano* F_1 *ed* F_2 *punti di* π *e sia* a *un numero reale tale che*

$$0 < a < \frac{1}{2} d(F_1, F_2) \; .$$

L'insieme

$$I = \{P \in \pi : \; \Big| d(P, F_1) - d(P, F_2) \Big| = 2a\}$$

si chiama **iperbole** *di* **fuochi** F_1, F_2 *e* **semiasse** a.

- I iperbole in un piano π,

- F_1, F_2 fuochi,

- $a =$ semiasse,

- $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ riferimento monometrico ortogonale di π tale che

  - O è il punto medio di F_1, F_2,

  - $\mathbf{i}$ è parallelo al vettore $F_2 - F_1$ (cioè l'asse x contiene i fuochi).

Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene ad I se e solo se

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \, ,$$

con

$$b^2 = \left(\frac{1}{2} d(F_1, F_2)\right)^2 - a^2 \, .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

Osservazione. *Siano* P *un punto ed* r *una retta contenuti in un piano* π. *Detta* s *l'unica retta passante per* P *e perpendicolare ad* r, *sia* H *il punto d'intersezione di* r *ed* s. *Per il teorema di Pitagora, la distanza di* P *da* H *è minore della distanza di* P *da ogni altro punto di* r.

Definizione. *Siano* P*,* r *ed* H *come prima. Si definisce* **distanza** *di* P *da* r *la distanza di* P *da* H*. Tale distanza sarà denotata con* $d(P, r)$*.*

n. 870

Definizione. *Sia* π *un piano, sia* F *un punto ed* r *una retta contenuti in* π. *L'insieme*

$$C = \{P \in \pi : \ d(P, F) = d(P, r)\}$$

si chiama **parabola** *di* **fuoco** F *e* **direttrice** r.

- C parabola in un piano π,

- F fuoco,

- r direttrice,

- $H =$ intersezione di r con la perpendicolare ad r contenuta in π passante per P,

- $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}))$ riferimento monometrico ortogonale di π tale che

  – O è il punto medio di F ed H,

  – $\mathbf{i}$ è parallelo e concorde ad $F - H$.

Allora un punto P di coordinate (x, y) appartiene a C se e solo se

$$2px - y^2 = 0 \ ,$$

con $p = d(F, r)$.
Tralasciamo la dimostrazione.

Osservazione. *Abbiamo visto che ellissi, iperboli e parabole sono tutte rappresentate, in opportuni riferimenti, da equazioni di secondo grado in due variabili. Tenendo presenti la formule del cambio di riferimento, che sono date da polinomi di primo grado, si ha che in un riferimento qualunque, ellissi iperboli e parabole sono ancora rappresentate da equazioni di secondo grado.*

Definizione. *Consideriamo un polinomio in due variabili di grado 2, cioè una funzione*

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

del tipo

$$(x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, a, b, c non tutti nulli.

Fissato un riferimento di un piano, chiameremo **conica** *l'insieme* Γ *di tutti i punti le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione*

$$p(x, y) = 0 \; .$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

si dice **matrice associata a** p*, o anche* **matrice associata a** Γ*.*

Esempio. *Fissato un riferimento in un piano, consideriamo il polinomio p dato da*

$$p(x,y) = xy \; .$$

La conica rappresentata dall'equazione $p(x,y) = 0$ *è chiaramente l'unione dei due assi del riferimento. La matrice associata è*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

Coniche come queste vengono dette *degeneri*.

Proposizione. *Sia* Γ *una conica,* $A = \left(a_{ij}\right)$ *una sua matrice associata e ricordiamo che* A_{33} *denota il complemento algebrico dell'elemento* a_{33}.

Allora Γ è un'ellisse, un'iperbole o una parabola se e solo se $|A| \neq 0$ e Γ è non vuota. Inoltre in tal caso si ha:

- Γ *è un'ellisse* $\iff A_{33} > 0$;
- Γ *è un'iperbole* $\iff A_{33} < 0$;
- Γ *è una parabola* $\iff A_{33} = 0$.

Tralasciamo la dimostrazione.

Nello spazio, gli insiemi rappresentati da equazioni di secondo grado in tre variabili si chiamano *quadriche*. Lo studio delle quadriche è analogo a (ma più ricco di) quello delle coniche. Uno strumento generale (anche in dimensione superiore a tre) utile in tale contesto sono le forme quadratiche, di cui qui ci limitiamo a dare la definizione.

Definizione. *Siano* V, V' *e* W *spazi vettoriali sui reali e sia*

$$\phi : V \times V' \longrightarrow W$$

un'applicazione. Per ogni $\mathbf{v} \in V$ *indichiamo con* $\phi_{\mathbf{v}} : V' \to W$ *l'applicazione che a ciascun* $\mathbf{v}' \in V'$ *associa il vettore* $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$*:*

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}') := \phi\Big((\mathbf{v}, \mathbf{v}')\Big) .$$

Per ogni $\mathbf{v}' \in V'$ *indichiamo con* $\phi'_{\mathbf{v}'} : V \to W$ *l'applicazione che a ciascun* $\mathbf{v} \in V$ *associa il vettore* $\phi((\mathbf{v}, \mathbf{v}'))$*:*

$$\phi'_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}) := \phi\Big((\mathbf{v}, \mathbf{v}')\Big) .$$

Se per ogni $\mathbf{v} \in V$ *e* $\mathbf{v}' \in V'$ *le applicazioni* $\phi_{\mathbf{v}}$ *e* $\phi'_{\mathbf{v}'}$*, sono lineari, allora si dirà che* ϕ *è un'applicazione* **bilineare**.

Se $V = V'$ *e* $W = \mathbb{R}$*, allora l'applicazione bilineare* ϕ *sarà anche detta* **forma bilineare** *su* V.

Se $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ *è una forma bilineare su uno spazio vettoriale* V*, l'applicazione*

$$q : V \to \mathbb{R}$$

data da

$$q(\mathbf{v}) := \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

si dice forma quadratica *su* V*.*