

C.1 Richiami di fisica della risonanza magnetica

Le proprietà elettromagnetiche di un sistema di particelle in movimento possono essere completamente riassunte, nel modello classico, dalle seguenti funzioni delle coordinate spaziali e temporali:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) & \text{ densità di carica} \\ \vec{j}(\vec{x}, t) & \text{ densità di corrente}\end{aligned}$$

che non sono indipendenti dovendo soddisfare l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

L'accoppiamento del sistema con un campo elettromagnetico esterno di potenziale scalare $V(\vec{x}, t)$ e potenziale vettore $\vec{A}(\vec{x}, t)$ è descritto dalla densità di energia

$$w(\vec{x}, t) = \rho V - \vec{j} \cdot \vec{A}$$

cui corrisponde l'energia totale

$$W = \int w(\vec{x}, t) d^3x \quad (1)$$

Quando si studiano le proprietà di uno stato stazionario di un sistema di particelle nel sistema di riferimento in cui il centro di massa è fermo le caratteristiche ρ e \vec{j} non dipendono esplicitamente dal tempo (caso statico). In questo caso si ha:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

per cui per l'equazione della continuità diventa:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Un vettore a divergenza nulla può sempre esprimersi come il rotore di un altro vettore (teorema di Clebesh):

$$\vec{j} = \nabla \wedge \vec{M}$$

Il vettore così introdotto è conosciuto in Elettromagnetismo come "vettore Magnetizzazione" e rappresenta il momento magnetico di dipolo per unità di volume.

Nel caso statico si ha:

$$W = \int \rho V d^3x - \int \vec{j} \cdot \nabla \wedge \vec{M} d^3x$$

Facendo uso dell'identità:

$$\vec{A} \cdot \nabla \wedge \vec{M} = \vec{M} \cdot \nabla \wedge \vec{A} + \nabla \cdot (\vec{M} \wedge \vec{A})$$

ed osservando che $\int \nabla \cdot (\vec{M} \wedge \vec{A}) d^3x$ per il teorema di Gauss non è altro che il flusso di $\vec{M} \wedge \vec{A}$ attraverso una superficie chiusa, che possiamo scegliere infinitamente lontana dal sistema (cioè dove $\vec{M} = 0$), l'energia totale si può esprimere come:

$$W = \int \rho V d^3x - \int \vec{M} \cdot \nabla \wedge \vec{A} d^3x$$

poiché $\nabla \wedge \vec{A} = \vec{H}$ è il campo magnetico esterno (secondo la denominazione anglosassone, detto anche induzione), si ha:

$$W = \int \rho V d^3x - \int \vec{M} \cdot \vec{H} d^3x$$

¹ Il simbolo d^3 indica che si tratta di un integrale di volume

Consideriamo ora il caso in cui il nostro sistema di particelle in movimento è un nucleo ed il campo con cui interagisce è un campo esterno generato da oggetti macroscopici o da altri atomi circostanti. In tal caso, essendo le dimensioni del nucleo molto più piccole della distanza media degli altri atomi o delle macrosorgenti, si può pensare che le funzioni $V(\vec{x})$ e $\vec{H}(\vec{x})$ sono lentamente variabili entro il volume nucleare. Ciò suggerisce di sviluppare queste funzioni in serie di potenze delle coordinate, a partire dal centro di simmetria del nucleo. L'ipotesi su cui ci si basa è che ci si possa arrestare solo ai primi termini della serie.

La notazione che sarà usata è:

$$\vec{F}(\vec{x}) = F(0) + \sum_1^3 x_j F_j(0) + \frac{1}{2} \sum_1^3 \sum_1^3 x_i x_j F_{ij}(0)$$

dove si è considerato il centro di simmetria posto all'origine delle coordinate e $F_{ij}(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_{\vec{x}=0}$.

Pertanto si ha:

$$W = V(0) \int \rho(\vec{x}) d^3x + \sum_1^3 V_j(0) \int x_j \rho(\vec{x}) d^3x + \frac{1}{2} \sum_1^3 \sum_1^3 V_{ij}(0) \int x_i x_j \rho(\vec{x}) d^3x + \dots +$$

$$- \vec{H}(0) \cdot \int \vec{M}(\vec{x}) d^3x - \sum_1^3 \vec{H}_j(0) \cdot \int x_j \vec{M}(\vec{x}) d^3x - \frac{1}{2} \sum_1^3 \sum_1^3 \vec{H}_{ij}(0) \cdot \int x_i x_j \vec{M}(\vec{x}) d^3x + \dots$$

Lo sviluppo precedente si indica con il nome di serie di multipli elettromagnetici.

Per un nucleo si ha:

$\int \rho(\vec{x}) d^3x = Ze$	carica elettrica totale
$\int x_j \rho(\vec{x}) d^3x$	dipolo elettrico
$\int x_i x_j \rho(\vec{x}) d^3x$	quadrupolo elettrico
$\int \vec{M}(\vec{x}) d^3x$	dipolo magnetico
$\int x_j \rho \vec{M}(\vec{x}) d^3x$	quadrupolo magnetico
$\int x_i x_j \vec{M}(\vec{x}) d^3x$	ottupolo magnetico

In genere per un nucleo è possibile considerare solo il termine dovuto alla carica elettrica totale, al quadrupolo elettrico ed al dipolo magnetico; per questo ultimo è possibile scrivere:

$$W_M = -\vec{\mu} \cdot \vec{H}(0) \quad \text{con} \quad \vec{\mu} = \int \vec{M}(\vec{x}) d^3x$$

dove $\vec{H}(0)$ è il campo valutato nel centro di simmetria del nucleo.

Per valutare quale unità di misura sia conveniente usare si può considerare il caso di una carica puntiforme in moto in un campo magnetico costante. Sia q la carica, m la sua massa e \vec{H}_0 un campo magnetico costante il cui potenziale vettore è dato da:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H}_0 \wedge \vec{x}$$

La densità di corrente associata alla carica q al tempo t è:

$$\vec{j} = \frac{1}{2} q \frac{\vec{v}}{c} \delta^3(\vec{x} - \vec{r})$$

essendo \vec{v} e \vec{r} velocità e posizione al tempo t , da cui si ha:

$$W_M = -\int \vec{j} \cdot \vec{A} d^3x = -\frac{q}{2c} \vec{v} \cdot (\vec{H}_0 \times \vec{r}) = -\frac{q}{2c} \vec{H}_0 \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

dove si è applicata la regola del prodotto misto o triplo; ricordando che $m\vec{r} \times \vec{v} = \vec{L}$ è il momento di quantità di moto della carica, si ha:

$$W_M = -\frac{q}{2mc} \vec{L} \cdot \vec{H}_0$$

Se si definisce $\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L}$ si ottiene la precedente formula $W_M = -\vec{\mu} \cdot \vec{H}(0)$. Una carica in moto con momento angolare orbitale \vec{L} è equivalente ad un dipolo magnetico $\vec{\mu}$ proporzionale a \vec{L} per un fattore che non dipende dalle caratteristiche del moto. Il dipolo magnetico è parallelo al momento angolare \vec{L} .

Siccome l'unità naturale del momento orbitale è \hbar , in pratica $\vec{L} = \vec{l} \hbar$, con \vec{l} vettore adimensionale che genera numeri quantici orbitali l interi, si può assumere come unità naturale del momento magnetico: $\mu = \frac{q\hbar}{2mc}$; le dimensioni sono quelle di una carica per una lunghezza, come quelle del dipolo elettrico.

Si può scrivere inoltre che $\vec{\mu} = \frac{1}{2} q \lambda_c \vec{l}$ dove $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ è la lunghezza d'onda Compton della particella. Per l'elettrone si ha:

$$\mu \equiv \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0.5788381 \cdot 10^{-8} \text{ eV / Gauss}$$

che ha il nome di magnetone di Bohr (sistema CGS, in quello SI nella formula non appare la velocità della luce c). Per il protone cambia la massa al denominatore:

$$\mu \equiv \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3.152526 \cdot 10^{-12} \text{ eV / Gauss} = 5.05084 \cdot 10^{-27} \text{ J / T}$$

μ_N è detto magnetone nucleare. Per cui

$$\mu_N = \frac{m_e}{m_p} \mu_B \cong \frac{1}{1837} \mu_B$$

che ci indica come il magnetone nucleare sia circa mille volte più piccolo di quello di Bohr.

Nel caso di un sistema di più particelle (che oltre al momento magnetico orbitale possono avere un momento magnetico intrinseco associato allo spin, come nel caso di elettroni, protoni e neutroni) risulta ancora vero che momento magnetico e momento angolare sono paralleli ma il fattore di proporzionalità non è necessariamente un magnetone. Per un nucleo, utilizzando anche la seguente espressione $\vec{L} = \vec{I} \hbar$, per il momento angolare totale, o spin, del nucleo, si può scrivere:

$$\vec{\mu} \equiv g \vec{\mu}_N \vec{I} = \gamma \vec{I}$$

dove g è detto fattore di Landè e γ è detto rapporto giromagnetico. Ovviamente, si ha:

$$\gamma = g \frac{e}{2m_p c}$$

Il fattore di Landè può assumere anche valori notevoli. Per un elettrone è circa 2 per un protone è circa 5.5856912. Per un protone $I=1/2$ per cui si ha:

$$\vec{\mu} \equiv g \vec{\mu}_N \vec{I} = 5.5856912 \cdot 1/2 \cdot \vec{\mu}_N = 2.7928 \vec{\mu}_N$$

Inoltre nel caso del protone si ottiene un valore di gamma pari a:

$$\gamma = 2.7928 \vec{\mu}_N / \hbar = (2.7928 \cdot 3.152526 \cdot 10^{-12} \text{ eV / Gauss}) / 6.58 \cdot 10^{-16} \text{ eVs} = 2.6753 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \text{ Gauss}^{-1} = 2.6753 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1}$$

L'accoppiamento magnetico nucleare ha la forma:

$$W_M = -\gamma \hbar \vec{I} \cdot \vec{H} = \vec{\mu} \cdot \vec{H}$$

In un sistema di cariche in movimento (quindi in presenza di una qualunque distribuzione di corrente), la formula del momento torcente può essere espressa in funzione del momento magnetico di dipolo (o semplicemente momento magnetico):

$$\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{H}$$

La presenza di un momento torcente totale non nullo implica che il momento angolare totale del sistema debba cambiare secondo la legge

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

equazione della meccanica classica. Ricordando che il momento magnetico è sempre parallelo al momento angolare e che il momento torcente è legato al prodotto tra il momento magnetico ed il campo magnetico, si ottiene:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{N} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{H}$$

Da cui alla fine si ottiene:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{H} \quad (\text{l'equazione di Bloch})$$

Si ricorda che per il protone di idrogeno libero o in una molecola di acqua si ha

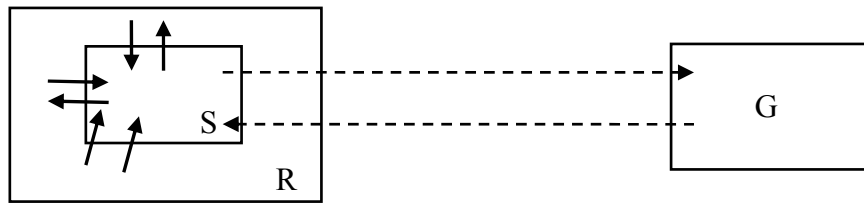
$$\gamma = 2.6575 \cdot 10^8 \text{ rad/s/T} \quad \text{e} \quad \gamma = 42.58 \text{ MHz/T} \quad \text{dove} \quad \gamma = 2\pi\gamma$$

ed inoltre per il magnetone di Bohr si ha nel sistema SI

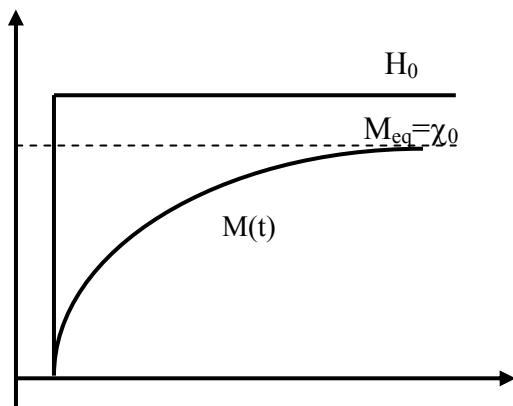
$$\mu \equiv \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad \text{e} \quad \mu \equiv \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \cdot 10^{-27} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

Ovviamente l'equazione di Bloch è stata qui scritta per il momento di un singolo protone, nel caso di più protoni si può riscrivere per l'unità di volume la stessa equazione considerando ora $\vec{M} = \sum \vec{\mu}_i$ dove con il pedice i si è indicato l'iesimo protone (la sommatoria è estesa al numero di atomi contenuti nell'unità di volume; si ricorda che in un solido o in un liquido ci sono circa 10^{23} nuclei/cm³, in un cm³ di acqua c'è un grammo, una mole di acqua pesa circa 18 grammi, in una mole ci sono circa $6 \cdot 10^{23}$ atomi, pari al numero di Avogadro, si ottiene dunque che in un grammo di acqua ci sono circa $0,33 \cdot 10^{23}$ atomi).

Si deve considerare che i nuclei di un campione macroscopico non sono isolati ma fanno parte di un complesso sistema di cariche e dipoli magnetici in interazione (indicato comunemente con il nome di reticolo), che funge praticamente da bagno termico con capacità termica infinitamente grande e determina un trasferimento irreversibile di energia (assorbimento o dissipazione). In pratica si può dire che se gli spin sono isolati, restituiscono al campo esterno di radiazione tutta l'energia che ricevono. Se essi interagiscono anche con il reticolo, parte dell'energia che ricevono può essere ceduta al reticolo stesso senza essere emessa sotto forma di radiazione (la situazione è simile a quella del riscaldamento di una grande quantità d'acqua con una piccola resistenza; si stabilisce un equilibrio dinamico). Nel nostro caso si può schematizzare un semplice modello in cui il generatore del campo G interagisce con gli spin S che a loro volta interagiscono con il reticolo R di cui fanno parte, vedi figura seguente.



E' possibile una discussione fenomenologica dell'interazione con il reticolo introducendo due tempi di rilassamento T_1 e T_2 con il seguente significato operativo:



Andamento della magnetizzazione longitudinale all'accensione del campo H_0

T_1 – Se consideriamo un campione non magnetizzato ed accendiamo istantaneamente su di esso un campo magnetico costante \vec{H}_0 , la magnetizzazione non segue istantaneamente il campo ma tende al suo valore di equilibrio termico $\vec{M}_{eq}(\vec{H}_0)$ con legge esponenziale

$$\vec{M}(t) = \vec{M}_{eq} (1 - e^{-t/T_1})$$

In particolare per le sostanze paramagnetiche il valore all'equilibrio termico è:

$$\vec{M}_{eq} = \chi_0 \vec{H}_0$$

dove χ_0 ha il nome di suscettività statica.

T_1 è noto anche come tempo di rilassamento longitudinale o spin-reticolo.

Poiché l'energia del sistema degli spin ($= -\vec{M}(t) \cdot \vec{H}_0$) cambia nel tempo fino a raggiungere il valore di equilibrio $= -\chi_0 \vec{H}_0^2$, il meccanismo del rilassamento longitudinale implica un trasferimento di energia tra gli spin nucleari e gli altri gradi di libertà del sistema.

T_2 – Consideriamo un campione magnetizzato nella sua condizione di equilibrio e immaginiamo di spegnere ad un dato istante il campo che ha prodotto questa magnetizzazione e di accenderne un altro che sia perpendicolare al primo. Siamo dunque in presenza di un campione con una magnetizzazione trasversa $M_{\perp}(0)$ che a questo punto inizierà un moto di precessione con la frequenza propria degli spin. Ma l'ampiezza di $M_{\perp}(t)$ si spegne, a differenza del caso di uno spin isolato, esponenzialmente con costante di tempo T_2 :

$$\vec{M}_{\perp}(t) = \vec{M}_{\perp} e^{-j\omega t} e^{-t/T_2}$$

T_2 è detto tempo di rilassamento trasverso o spin-spin. Il meccanismo da cui origina il rilassamento trasverso, è diverso da quello longitudinale. Per comprendere questo fatto basta osservare che l'energia del sistema non varia al variare di M_{\perp} essendo M_{\perp} perpendicolare al campo H .

L'origine di T_2 può essere spiegata osservando che se gli spin non procedono con la stessa velocità angolare la loro risultante non rimane invariata nel tempo. Gli spin però oltre a sperimentare il campo esterno sperimentano anche i campi locali generati dal reticolo e questo causa una leggera differenza tra le frequenze di precessione degli spin. I momenti magnetici si sfasano e la loro risultante diminuisce nel tempo, sino ad annullarsi quando la distribuzione delle fasi è completamente casuale.

Un semplice calcolo lega il decadimento esponenziale di M_{\perp} alla distribuzione dei campi locali che producono lo sfasamento:

$$\vec{M}_{\perp}(t) = \sum \mu_{k_{\perp}}(t) = \sum \mu_{k_{\perp}}(0) e^{-j\omega_k t}$$

dove $\mu_{k\perp}$ è il contributo del k-esimo nucleo alla magnetizzazione trasversa, ω_k la pulsazione del k-esimo nucleo che possiamo scomporre come:

$$\omega_k = \omega + \omega'_k$$

dove ω è dovuto al campo esterno ed ω'_k al campo locale.

La sommatoria va estesa a tutti i nuclei contenuti nell'unità di volume. Supponiamo per semplicità che $\mu_{k\perp}(0) = \mu_{\perp}(0)$

$$\vec{M}_{\perp}(t) = \mu_{\perp}(0) e^{-j\omega t} \sum e^{-j\omega'_k t} = M_{\perp}(0) e^{-j\omega t} \langle e^{-j\omega t} \rangle$$

L'ultimo fattore è il valore medio di $e^{-j\omega t}$, che è calcolato tenendo conto della distribuzione dei campi locali. Sia $p(\omega)d\omega$ la probabilità che un nucleo sperimenti un campo locale che sposta la sua frequenza di ω , si ha:

$$\langle e^{-j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} p(\omega) d\omega$$

Ma se si richiede il decadimento esponenziale deve essere valida l'eguaglianza $\langle e^{-j\omega t} \rangle = e^{-t/T_2}$.

Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione $e^{-\Gamma\pi|t|}$ è data dalla:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 + f^2}$$

dove gamma è il parametro della funzione conosciuta come distribuzione di Lorentz o pdf di Cauchy, curva che ha una banda a metà altezza pari proprio al parametro Γ .

Nel caso della funzione $e^{-|t|/T_2}$ si ottiene $\Gamma\pi = \frac{1}{T_2}$ e quindi $\Gamma = \frac{1}{\pi T_2}$.

Sostituendo il valore ottenuto per $\Gamma = \frac{1}{\pi T_2}$ nella trasformata si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2\pi T_2}}{\left(\frac{1}{2\pi T_2}\right)^2 + f^2} &= \frac{1}{\pi} \frac{(2\pi T_2)^2}{(2\pi T_2)^2} \frac{\frac{1}{2\pi T_2}}{\frac{1}{(2\pi T_2)^2} + f^2} = \frac{1}{\pi} \frac{(2\pi T_2)^2}{(2\pi T_2)^2} \frac{1}{\frac{1}{(2\pi T_2)^2} + (2\pi T_2)^2 f^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2\pi T_2}{(2\pi T_2)^2 \frac{1}{(2\pi T_2)^2} + (2\pi T_2)^2 f^2} = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi T_2}{1 + (2\pi T_2)^2 f^2} = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi T_2}{1 + T_2^2 \omega^2} \end{aligned}$$

Riconoscendo che l'integrale ha la forma di una trasformata si può calcolare la $p(\omega)$ applicando la trasformata di Fourier.

Si ottiene:

$$p(\omega) = 2\pi \frac{1}{\pi} \frac{T_2}{1 + \omega^2 T_2^2} = 2\pi \frac{1}{\pi} \frac{\frac{T_2}{(T_2)^2}}{\frac{1}{T_2} + \omega^2 \frac{T_2^2}{T_2^2}} = 2\pi \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{T_2}}{\frac{1}{T_2} + \omega^2} = 2\pi \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{T_2}}{\frac{1}{2} \frac{2}{T_2} + \omega^2}$$

che a meno del fattore moltiplicativo 2π è ancora una Lorenziana, con larghezza a metà altezza pari a $2/T_2$ e centro in $\omega=0$.

Ricordando che pulsazione e campo sono legati dalla relazione $\omega = \gamma \vec{H}$, δh , larghezza della distribuzione dei campi locali, è data dalla:

$$\delta h_l = \frac{2}{\gamma T_2}$$

Si può dunque dire che T_2 è una misura dei campi locali e che la banda di risonanza è tanto più stretta quanto minore è la variabilità locale del campo. La precedente equazione si può riscrivere:

$$\frac{\delta h_l}{H} = \frac{2}{\gamma H T_2} = \frac{2}{\omega T_2}$$

Ricordando che per l'atomo di idrogeno in acqua ^1H il raggio giromagnetico è pari a 42.57 MHz/T, per un campo magnetico di un Tesla e per una costante di tempo $T_2 = 1 \text{ ms} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ si hanno circa 37 ppm.

Il passo successivo consiste nel mettere semplicemente insieme le equazioni della precessione in un campo magnetico con quelle del rilassamento, ovviamente scritte in forma differenziale:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma(\vec{M} \times \vec{H}) - \frac{1}{T_2} \vec{M}_\perp - \frac{1}{T_1} (\vec{M}_p - \vec{M}_{eq})$$

dove M_p è la componente del vettore magnetizzazione parallela al campo applicato e M_{eq} è il valore di equilibrio termico di questa componente.

Ponendosi in un sistema di riferimento Oxyz con l'asse z parallelo al campo magnetico applicato, la componente di magnetizzazione parallela al campo magnetico si può allora indicare come M_z e quella perpendicolare si può esprimere come M_{xy} e M_{eq} come M_0 , si può allora scrivere:

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma(\mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0)_z - \frac{M_z - M_0}{T_1}$$

$$\frac{dM_{xy}}{dt} = \gamma(\mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0)_{xy} - \frac{M_{xy}}{T_2}$$

C.2 Calcolo della magnetizzazione di un volume di materiale

Per calcolare la magnetizzazione dei nuclei nel volume interessato è possibile utilizzare la seguente formula:

$$M_0 = \frac{N(-\gamma\hbar)^2 H_0 I(I+1)}{3kT_0}$$

dove N è il numero di spin per unità di volume (pari al numero di Avogadro moltiplicato per il numero di moli contenute nel volume), γ è il rapporto giromagnetico, h tagliata è la costante di Plank ridotta, k è la costante di Boltzmann e T è la temperatura in gradi Kelvin.

Qui di seguito è riportato il codice di una routine MATLAB per il calcolo della magnetizzazione.

```
% CALCOLO DEL VALORE DI MAGNETIZZAZIONE
% N = numero di atomi pari a numero di moli
% per il numero di Avogadro = 6.023 * 10^23 mol^-1
% h costante di Plank = 6.626 * 10^-34 JK^-1
% gamma = 42.5749 * 10^6 Hz (è pari al gamma diviso per 2 pigreco)
% H campo in Tesla = 1 T
% I spin nucleare = .5 (1/2)
% k costante di Boltzmann = 1.380 * 10^-23 jK^-1
% T temperatura in gradi Kelvin
%
```

% Memorizzazione del valore delle costanti

%

$$N_A = 6.023 * 10^{23};$$

$$h = 6.626 * 10^{-34};$$

$$\gamma = 42.5749 * 10^6;$$

$$H = 1;$$

$$I = .5;$$

$$k = 1.380 * 10^{-23};$$

$$T = 37 + 273.2;$$

$$N = 1000 * N_A; \% 1000 \text{ moli} == 1 \text{ KMoli}$$

%

% Calcolo Magnetizzazione

%

$$M = (N * \gamma^2 * h^2 * H * I * (I+1))/(3 * k * T)$$

NOTA: di seguito si riporta una tabella con i nomi più comunemente attribuiti a B ed H

Nomi alternativi per B ed H		
Nome italiano	Nome inglese	Usato da
B		
Densità di flusso magnetico	Magnetic flux density	Ingegneri elettrici
Induzione magnetica	Magnetic induction	Ingegneri elettrici
Campo magnetico	Magnetic field	Fisici
H		
Intensità del campo magnetico	Magnetic field intensity	Ingegneri elettrici
Forza del campo magnetico	Magnetic field strength	Ingegneri elettrici
Campo magnetico ausiliario	Auxiliary magnetic field	Fisici
Campo di magnetizzazione	Magnetizing field	Fisici