

**FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE: DEFINIZIONE DI PARTICOLARI
PROPRIETÀ ED ESTREMI**

1. FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE.

Funzione reale: una funzione $f: x \in A \rightarrow y = f(x) \in B$ è detta *funzione reale* se e solo se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, cioè se e solo se le immagini sono numeri reali.

Funzione reale è ad esempio la funzione che ad ogni individuo appartenente ad un insieme S di studenti universitari associa il numero di esami superati:

$$f: x \in S \rightarrow f(x) = \text{"numero esami superati da } x\text{"} \in \mathbb{N}_0.$$

Anche l'operazione di addizione in $\mathbb{R}$ è una funzione reale: essa associa ad ogni coppia di numeri reali il numero reale loro somma

$$+: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow + (x, y) = x + y \in \mathbb{R}$$

Funzione in una variabile reale: una funzione $f: x \in A \rightarrow y = f(x) \in B$ è detta *funzione in una variabile reale* se e solo se $A \subseteq \mathbb{R}$ cioè il dominio è un insieme di numeri reali e quindi la *variabile indipendente è reale*.

Sono, ad esempio, funzioni in una variabile reale le funzioni:

$$f: n \in \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \in P(\mathbb{N}) \quad e \quad g: x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) = (x, x+1) \in \mathbb{R}^2$$

Funzione reale di una variabile reale: è una funzione $f: x \in A \rightarrow y = f(x) \in B$ in cui dominio e codominio sono insiemi di numeri reali, cioè: $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Sono funzioni reali di una variabile reale, ad esempio, le funzioni:

$$f: n \in \mathbb{N} \rightarrow f(n) = 2n \in \mathbb{P} \quad e \quad g: x \in \mathbb{R} \rightarrow 1+x^2 \in [1, +\infty[$$

Una funzione reale di una variabile reale si identifica con un insieme di coppie di numeri reali, ogni coppia avente come prima componente un numero x del dominio (valore della variabile indipendente) e come seconda componente la corrispondente immagine (cfr. Esempio E1.1 pag. 2); il dominio è allora l'insieme delle prime coordinate delle coppie e il codominio è l'insieme delle seconde coordinate. Per definizione di funzione ogni elemento del dominio ha una sola immagine e quindi per ogni x del dominio si ha una sola coppia di prima componente x .

1.1 Grafico di una funzione reale di una variabile reale.

Sia $f: x \in A \rightarrow y = f(x) \in B$ una funzione reale di una variabile reale e sia Π un piano nel quale sia stato fissato un riferimento cartesiano, che conveniamo di scegliere monometrico e ortogonale. Indichiamo f attraverso l'insieme di coppie di numeri reali,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in A \text{ e } y = f(x)\};$$

allora l'insieme

$$G_f = \{P(x, y) \in \Pi: x \in A \text{ e } y = f(x)\},$$

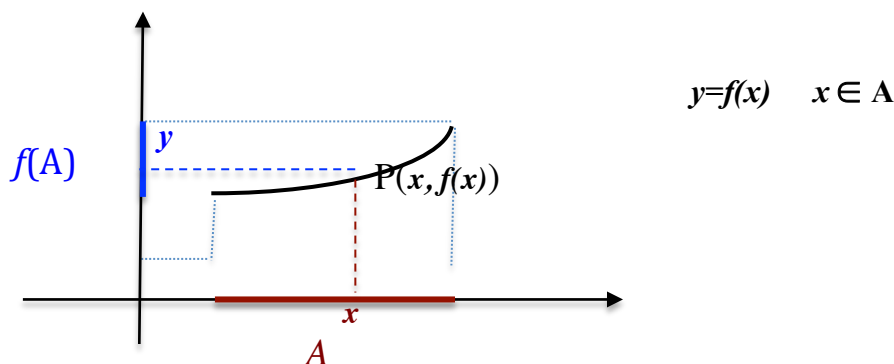
dei punti del piano cartesiani è, per definizione, il **grafico cartesiano della funzione f** e $y = f(x)$, $x \in A$, è l'**equazione del grafico G_f**

G_f , con scrittura più breve, può essere indicato con la scrittura

$$G_f = \{P(x, f(x))\}_{x \in X}$$

L'ascissa di un punto del grafico è allora un valore della variabile indipendente, *l'ordinata è la corrispondente immagine*.

Proiettando il grafico sull'asse delle ascisse secondo la direzione dell'asse delle ordinate,

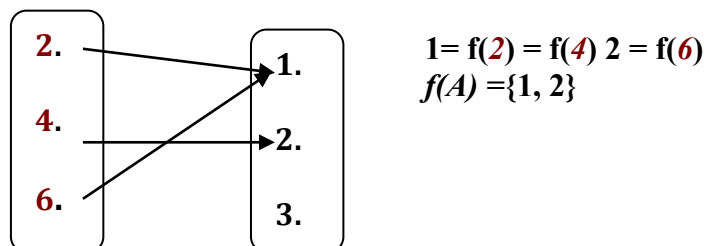


otteniamo la rappresentazione del dominio **A** sull'asse delle ascisse (tratto in rosso nel disegno); proiettando il grafico sull'asse delle ordinate secondo la direzione dell'asse delle ascisse otteniamo la rappresentazione sull'asse delle ordinate dell'insieme delle immagini o codominio **f(A)** (tratto in blu nel disegno).

Per definizione di funzione al grafico non possono appartenere due punti con la stessa ascissa x , perché ciò significherebbe che x ha due corrispondenti e ciò non può essere; pertanto una retta verticale, cioè parallela all'asse y , non può incontrare il grafico di una funzione in più di un punto (cfr. esempi E1.2 , E1.4, E1.5).

Esempi

E1.1 La funzione f definita in $A=\{2, 4, 6\}$ e a valori in $B=\{1, 2, 3\}$ di seguito indicata



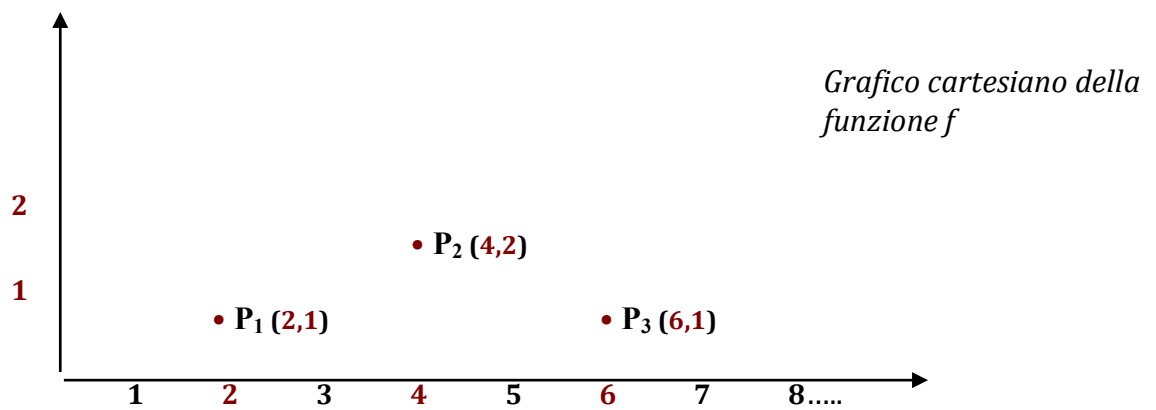
ha per insieme delle immagini $\{1, 2\}$ ed è, dal punto di vista della teoria degli insiemi, la parte di $A \times B$ qui di seguito indicata

$$f \equiv \{(2, f(2)), (4, f(4)), (6, f(6))\} = \{(2, 1), (4, 2), (6, 1)\} \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R}^2.$$

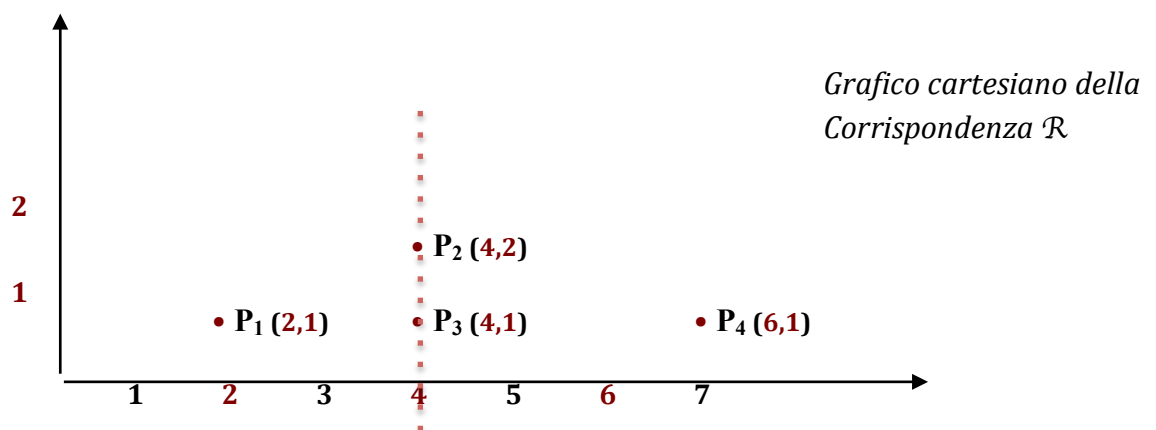
Allora assegnato un riferimento cartesiano nel piano, f può essere rappresentata dall'insieme di punti del piano

$$G_f = \{P_1(2, 1), P_2(4, 2), P_3(6, 1)\},$$

che è il *grafico cartesiano della funzione*



E1.2 La corrispondenza tra $A=\{2, 4, 6\}$ e $B=\{1, 2, 3\}$, indicata dall'insieme $\mathcal{R}=\{(2, 1), (4, 1), (4, 2), (6,1)\} \subseteq A \times B$ non è una funzione perché **4** ha due corrispondenti, **1** e **2**. Tuttavia anche $\mathcal{R}$ può essere rappresentata nel piano cartesiano

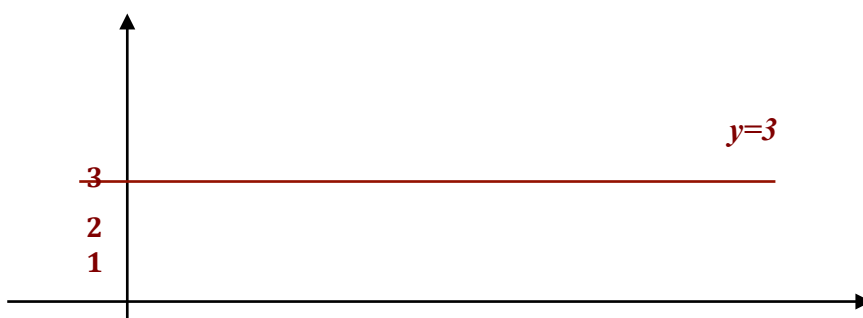


*Poiché a **4** sono associati due distinti corrispondenti al grafico appartengono due punti della retta $x=4$ parallela all'asse y*

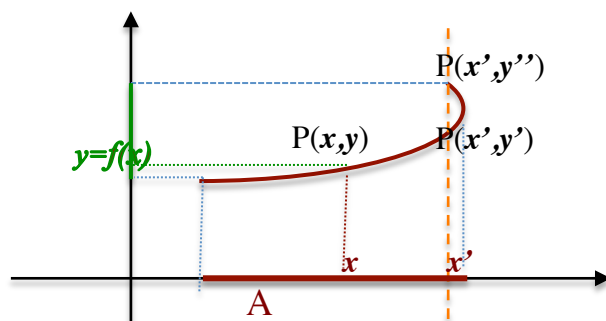
E 1.3 La funzione **costante** $f: x \in \mathbf{R} \rightarrow 3 \in \mathbf{R}$ è descritta dall'insieme di coppie $(x, 3)$ ottenute al variare di x in $\mathbf{R}$ e il suo grafico nel piano cartesiano

$$G_f = \{P(x, y) \in \Pi: x \in \mathbf{R} \text{ e } y = 3\} = \{P(x, 3)\}_{x \in \mathbf{R}}.$$

è la retta di equazione $y=3$



E1.4. Il seguente grafico Γ

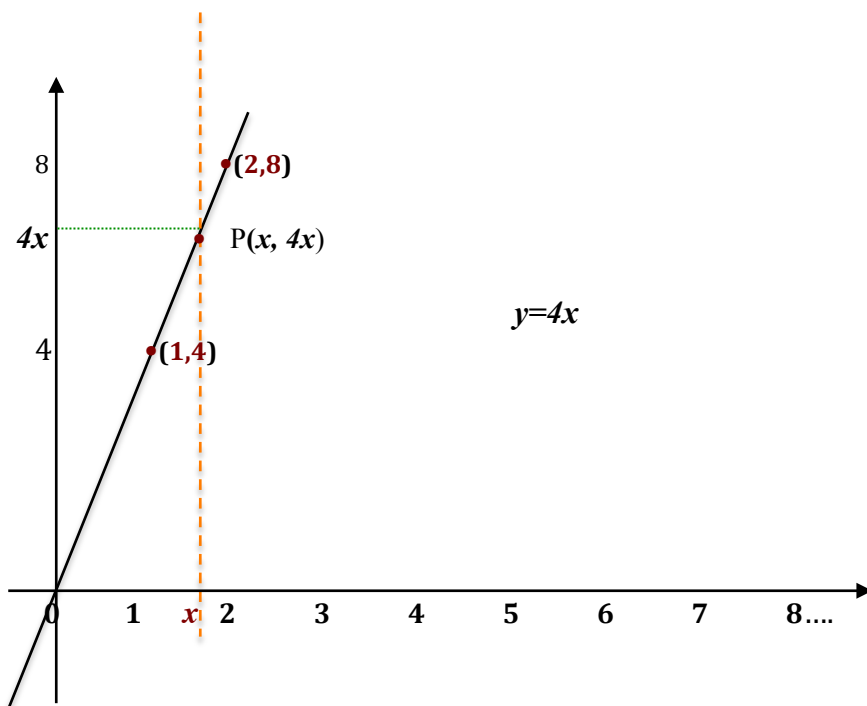


rappresenta una relazione: ad ogni x dell'insieme A delle ascisse dei punti del grafico corrispondere l'ordinata di ogni punto di ascissa x . Può Γ essere il grafico di una funzione definita in X ?

LA RISPOSTA è NO. Infatti c'è almeno una retta verticale che incontra il grafico in due punti e quindi una ascissa $x' \in A$ cui corrispondono due diverse ordinate y' e y'' .

E1.5. La retta di equazione $y = 4x$ è il grafico di una funzione perché ogni retta verticale la incontra in un sol punto: essendo la retta l'insieme costituito dai punti $P(x, 4x)$ essa è il grafico della funzione

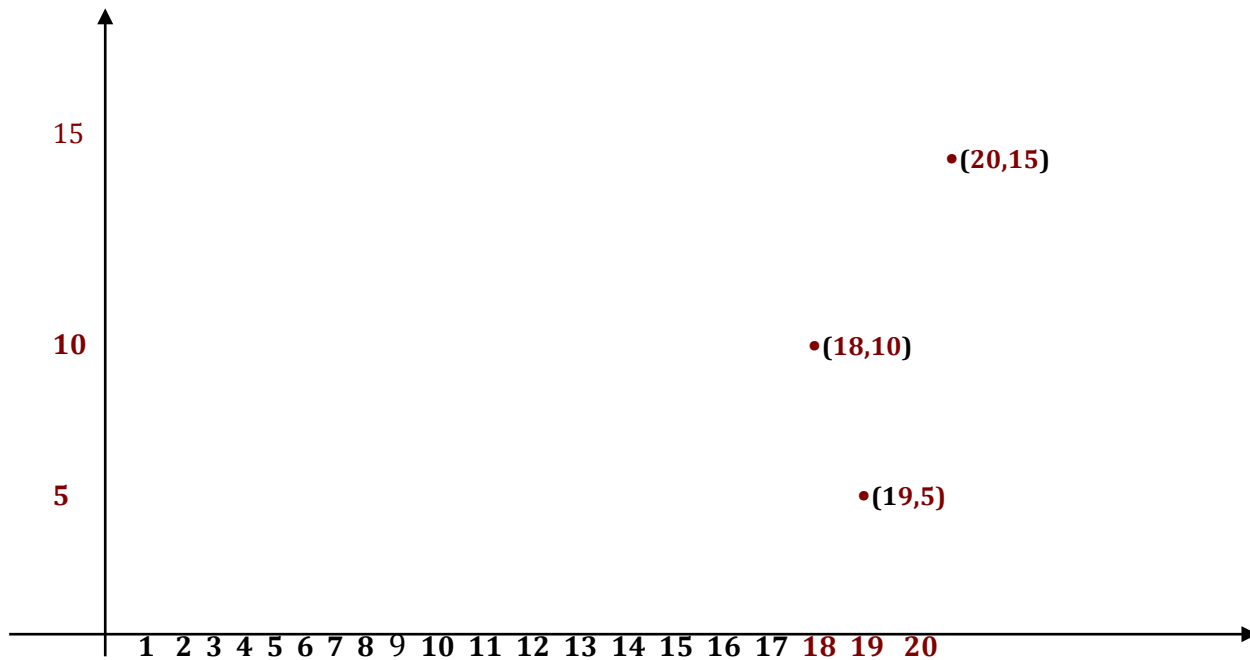
$$f: x \in \mathbb{R} \rightarrow 4x$$



E 1.7 Consideriamo la variabile età e rileviamo i valori che può assumere in un gruppo di 30 studenti. Supponiamo che 10 studenti abbiano 18 anni, cinque 19 anni e quindici 20 anni; allora i valori che la variabile età assume sono solo tre: 18, 19, 20; associamo ad ognuno dei valori rilevati il numero di studenti che ha per età il valore considerato, e otteniamo la funzione

$$f_a : x \in \{18, 19, 20\} \rightarrow f_a(x) = \text{numero studenti che ha età } x = \begin{cases} 10 & \text{se } x = 18 \\ 5 & \text{se } x = 19 \\ 15 & \text{se } x = 20 \end{cases}$$

Il numero di studenti che ha età x è detto **frequenza assoluta** del valore x (sul gruppo considerato) e la funzione f_a è detta **distribuzione di frequenza assoluta** della variabile età il suo grafico è il seguente



1.2 Successione di numeri reali

Una **successione di numeri reali** è una funzione definita nell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali che ha per immagini **numeri reali**, cioè tale che $f(\mathbf{N}) \subseteq \mathbf{R}$:

$$f: n \in \mathbf{N} \rightarrow f(n) \quad f(n) \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

L'immagine $f(n)$ di n è in genere indicata con una lettera minuscola avente indice n : $f(n) = a_n$ o $f(n) = y_n$ o ...

La successione viene quindi indicata con l'allineamento delle sue immagini, ponendo l'immagine di ogni n prima dell'immagine del successivo $n+1$:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_n \quad a_{n+1} \quad \dots$$

a_n è detto **termine n -simo** della successione. La successione può essere indicata anche con la scrittura :

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

Esempio.**E 1.8** La funzione

$$a: n \in \mathbb{N} \rightarrow a(n) = 1/n.$$

è una successione di numeri reali; poiché le immagini sono numeri razionali possiamo dire che è una successione di numeri razionali. Essendo $a(n) = a_n = 1/n$, la successione può essere indicata attraverso l'allineamento delle immagini

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_n \quad a_{n+1} \quad \dots$$

Cioè con:

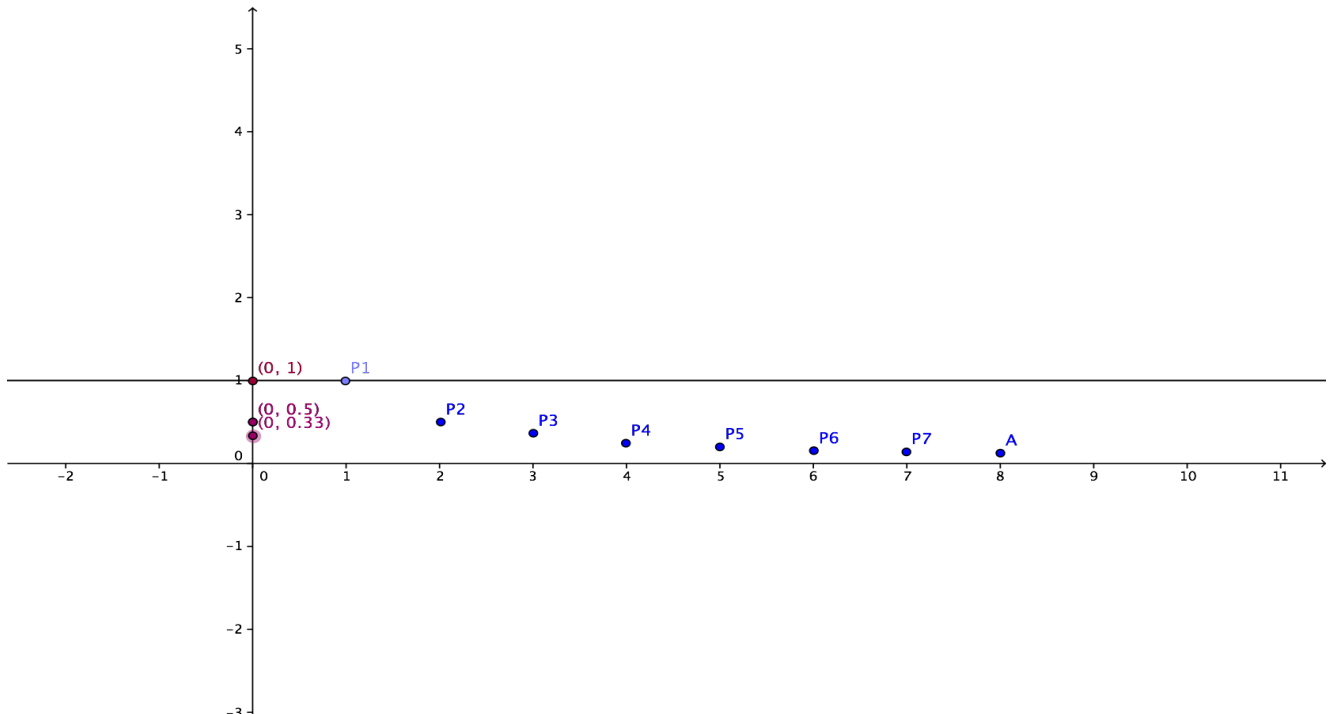
$$1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \dots \quad 1/n \quad \dots$$

Il termine n -esimo della successione è $1/n$ e la successione può essere indicata anche con

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Il grafico cartesiano della successione è l'insieme dei punti $\left\{ P_n \left(n, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$P_1(1, 1), P_2\left(2, \frac{1}{2}\right), \dots, P_n\left(n, \frac{1}{n}\right)$$



2. FUNZIONE INVERTIBILE E RELAZIONE TRA I GRAFICI DI f e di f^{-1}

- Come si riconosce attraverso il grafico che una funzione $f: x \in A \rightarrow y = f(x)$ è invertibile?

Ricordiamo che f è invertibile se e solo se è iniettiva e cioè

per ogni y in $f(A)$ esiste un solo x in A di cui y è immagine; (1)

Allora: per ogni $y \in f(A)$, esiste un solo punto $P(x, y)$ di ordinata y appartenente al grafico

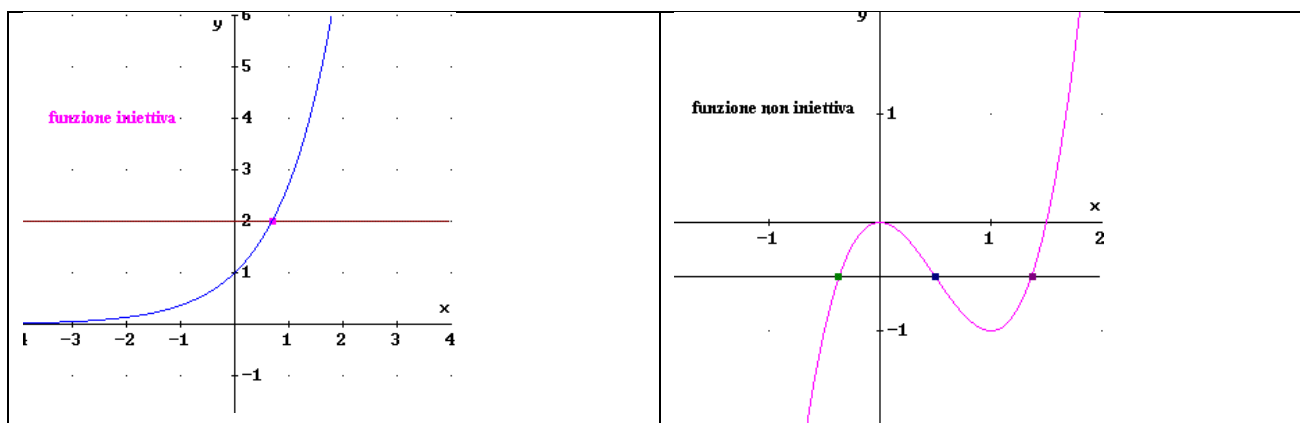
$$G_f = \{P(x, y) \in \Pi: x \in A \text{ e } y = f(x)\} = \{P(x, f(x))\}_{x \in A}. \quad (2)$$

Ciò si traduce nel fatto che

ogni retta orizzontale che incontra il grafico lo incontra in un solo punto.

L'elemento x di cui y è immagine è detto *controimmagine* di y e indicato con $f^{-1}(y)$. Quindi

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \quad (3)$$



Sia f invertibile. Per (1), associando a ogni $y \in f(A)$ la sua contro immagine $x = f^{-1}(y) \in A$ costruiamo una funzione che è detta *funzione inversa* di f :

$$f^{-1}: y = f(x) \in f(A) \rightarrow x = f^{-1}(y) \in A \quad \text{funzione inversa}$$

il cui grafico è l'insieme

$$G_{f^{-1}} = \{P(y, x) \in \Pi: y \in f(A) \text{ e } x = f^{-1}(y)\} = \{P(y, f^{-1}(y))\}_{y \in f(A)} \quad (4)$$

- Che relazione c'è tra i grafici di f e di f^{-1} ?

Confrontando gli insiemi (2) e (4) e applicando l'equivalenza (3), deduciamo che il grafico di f^{-1} è il seguente insieme

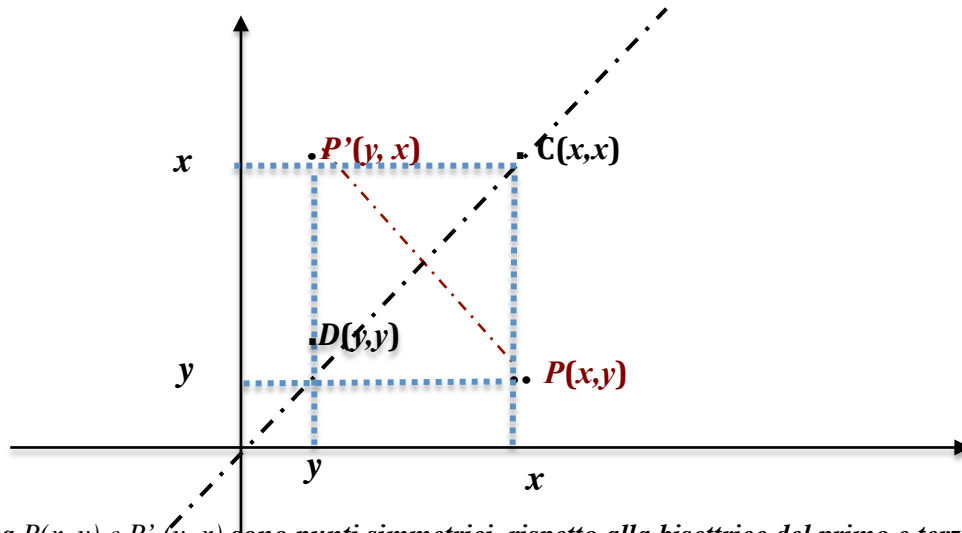
$$G_{f^{-1}} = \{P(f(x), x)\}_{x \in A} \quad \text{grafico di } f^{-1}$$

costituito dai punti del piano che si ottengono dai punti del grafico G_f di f scambiando tra loro le coordinate .

Perciò, per rispondere alla domanda dobbiamo conoscere come si dispongono nel piano i punti del tipo $P(x, y)$ e $P'(y, x)$

Nota sulla posizione reciproca di $P(x, y)$ e $P'(y, x)$ nel piano cartesiano con riferimento monometrico ortogonale

Se disegniamo la bisettrice del primo e terzo quadrante (retta di equazione $y=x$) ci rendiamo conto che tali punti sono vertici opposti di un quadrato con i lati paralleli agli assi e con gli altri vertici sulla bisettrice: quindi $P(x, y)$ e $P'(y, x)$ sono gli estremi di una diagonale del quadrato, che (per proprietà del quadrato) è perpendicolare alla altra diagonale giacente sulla bisettrice ed è da questa divisa in due parti uguali.



Allora $P(x, y)$ e $P'(y, x)$ sono punti simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Possiamo ora rispondere alla domanda sulla relazione intercorrente tra i grafici di f e f^{-1}

Poiché i grafici di f e f^{-1}

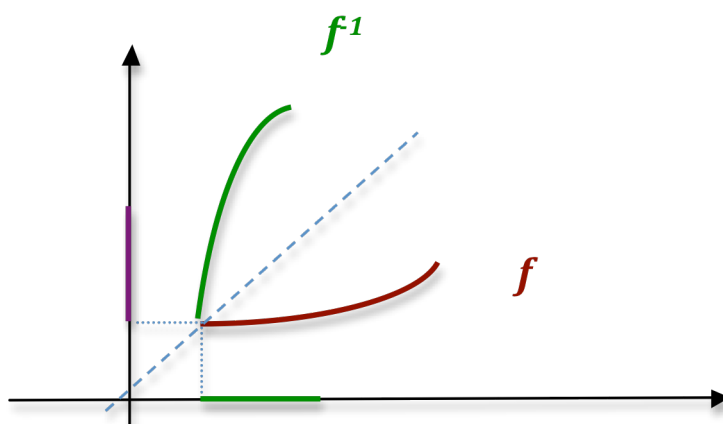
$$G_f = \{P(x, f(x))\}_{x \in A} = \{P(f^{-1}(y), y)\}_{y \in f(A)}$$

↑
Per (3)

$$G_{f^{-1}} = \{P(y, f^{-1}(y))\}_{y \in f(A)} = \{P(f(x), x)\}_{x \in A}$$

↑
Per (3)

si ottengono l'uno dall'altro invertendo le coordinate dei loro punti, si ha che il grafico $G_{f^{-1}}$ è costituito dai punti che sono simmetrici dei punti del grafico G_f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e viceversa.



3. FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE DENOMINATE ATTRAVERSO LORO PROPRIETÀ

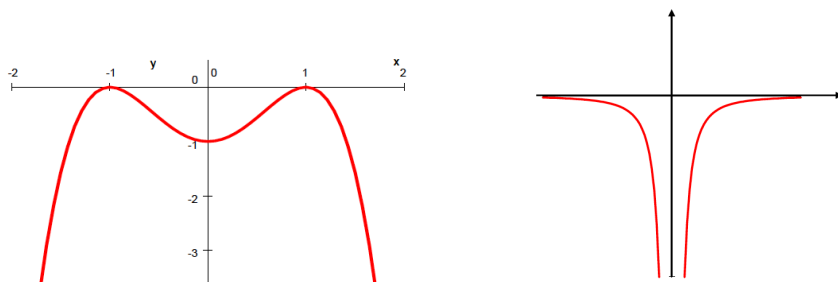
3.1 Funzione pari e funzioni dispari

Si consideri una funzione reale di una variabile reale e il suo grafico nel piano cartesiano $f: x \in A \rightarrow y = f(x)$ e il suo grafico

$$G_f = \{P(x, y) \in \Pi: x \in A \text{ e } y = f(x)\} = \{P(x, f(x))\}_{x \in A}.$$

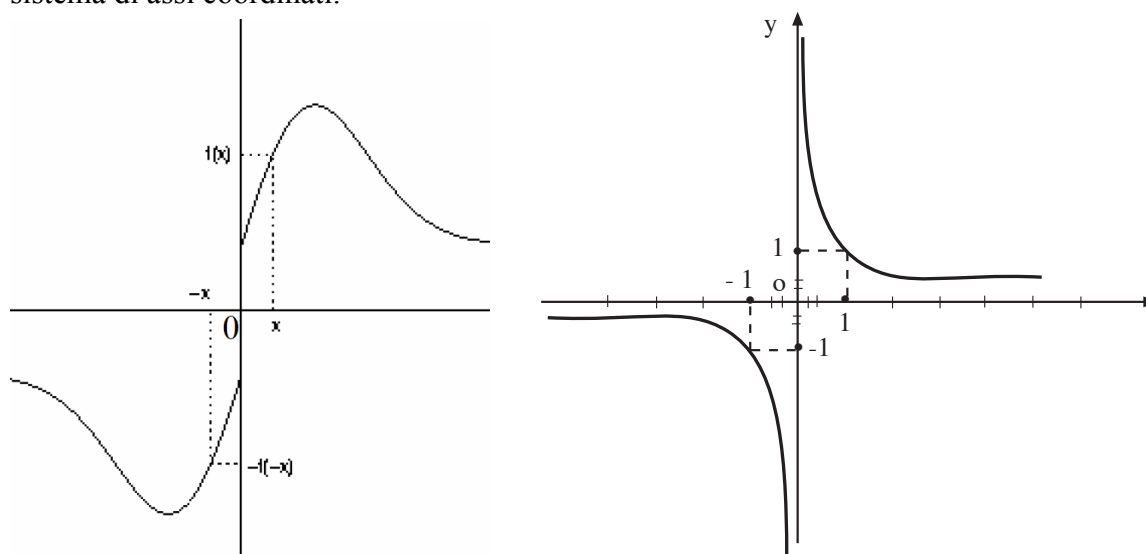
Definizione di funzione pari. La funzione f è detta **pari** se e solo, per ogni $x \in A$ anche $-x \in A$ e risulta $f(-x) = f(x)$.

Il grafico di una funzione pari è allora costituito da coppie di punti $(P(x, f(x)), P(-x, f(x)))$ che sono simmetrici rispetto all'asse delle ordinate perché hanno ascisse opposte ma uguale ordinata. Pertanto, **da un punto di vista grafico**, dire che una funzione è pari equivale a dire che il suo grafico è costituito da due rami che sono l'uno simmetrico dell'altro rispetto all'asse delle ordinate



Definizione di funzione dispari. La funzione f è detta **dispari** se e solo, per ogni $x \in A$ anche $-x \in A$ e risulta $f(-x) = -f(x)$.

Il grafico di una funzione pari è allora costituito da coppie di punti $(P(x, f(x)), P(-x, -f(x)))$ che hanno coordinate opposte e quindi sono simmetrici rispetto all'origine $O(0, 0)$ del riferimento. Pertanto, **da un punto di vista grafico**, dire che una funzione è dispari equivale a dire che il suo grafico è costituito da due rami che sono l'uno simmetrico dell'altro rispetto all'origine $O(0, 0)$ del sistema di assi coordinati.



3.2. Funzioni monotone

Il dominio A e il codominio $f(A)$ di una funzione reale di una variabile reale, $f: x \in A \rightarrow y = f(x)$, sono insiemi numerici e quindi totalmente ordinati; è possibile allora studiare come variano i valori $f(x)$ in $f(A)$ quando la variabile indipendente x assume valori via via maggiori o via via minori in A . Se l'immagine $f(x)$ varia in modo concorde al variare della variabile x (cioè $f(x)$ cresce se x cresce, $f(x)$ decresce se x decresce) ci si trova di fronte ad una particolare funzione che è detta funzione *crescente*; se invece $f(x)$ varia in modo discorde al variare della variabile x (cioè $f(x)$ decresce se x cresce, $f(x)$ cresce se x decresce) ci si trova di fronte ad una particolare funzione, detta funzione *decrescente*.

❖ Funzioni crescenti e strettamente crescenti

Definizione. Sia $f: x \in A \rightarrow y = f(x)$ una funzione reale di una variabile reale:

- f è **crescente** se, per ogni coppia (x_1, x_2) di punti di A , tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$, cioè:

$$c) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{o, equivalentemente,} \quad c') \quad x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

- f è **strettamente crescente** se, per ogni coppia (x_1, x_2) di punti, $x_1 \in A, x_2 \in A$, tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$, cioè

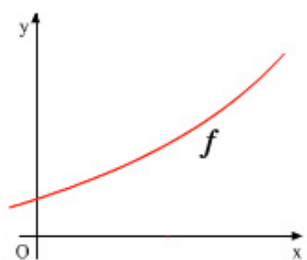
$$sc) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{o, equivalentemente,} \quad sc') \quad x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Una funzione strettamente crescente è ovviamente una funzione crescente, perché per essa sono vere le implicazioni $c)$ e $c')$ con la particolarità che le disuguaglianze al secondo membro sono sempre disuguaglianze strette.

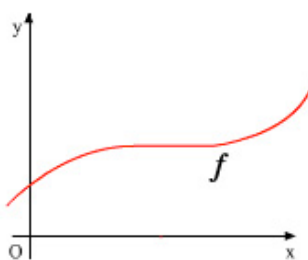
Sulle funzioni costanti: Una funzione costante, $f: x \in A \rightarrow k$, è una particolare funzione crescente: al secondo membro della implicazione $c)$ o $c')$ vale sempre l'uguaglianza.

Sul grafico di una funzione strettamente crescente: al crescere dei valori della variabile indipendente x (cioè allo spostarsi di x verso destra sull'asse delle ascisse) cresce l'immagine $f(x)$, perciò spostandosi da sinistra verso destra i punti del grafico si trovano ad ordinate via via più grandi e il grafico sale.

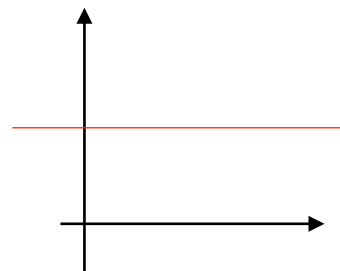
Sul grafico di una funzione crescente: spostandosi x da sinistra verso destra sull'asse delle ascisse, i punti del grafico si trovano ad ordinate via via crescenti o costanti, perciò il grafico sale o staziona.



f strettamente crescente



f crescente



f costante

La funzione parte intera (cfr. fascicolo su Funzioni elementari e loro grafici) è un esempio di funzione crescente e non strettamente crescente

Una definizione equivalente di funzione crescente o strettamente crescente.

Le implicazioni $c)$ e $c')$, $sc)$ e $sc')$ sono equivalenti rispettivamente alle implicazioni

$$c) \quad x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$c') \quad x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0,$$

$$sc) \quad x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$sc') \quad x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Una definizione equivalente di funzione crescente o strettamente crescente è allora data dalle seguenti equivalenze che coinvolgono il rapporto incrementale $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$f \text{ è crescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \quad (5)$$

$$f \text{ è strettamente crescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \quad (6)$$

Esercizio. Dimostrare che la funzione $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = 3x+2$ è strettamente crescente.

Occorre provare, in base alla definizione, che, per ogni coppia (x_1, x_2) di numeri reali tali che $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) = 3x_1+2 < f(x_2) = 3x_2+2$. Essendo infinite le coppie (x_1, x_2) di numeri reali, non si può procedere a una verifica coppia per coppia, ma sviluppare un breve ragionamento che partendo dall'assunzione $x_1 < x_2$ porti alla disuguaglianza $f(x_1) = 3x_1+2 < f(x_2) = 3x_2+2$.

Dimostrazione 1: "Sia: $x_1 < x_2$; moltiplicando i membri della disuguaglianza per 3, numero positivo, il segno della disuguaglianza non cambia, quindi è $3x_1 < 3x_2$; aggiungendo ad entrambi i membri di quest'ultima disuguaglianza il numero 2 il senso di essa non cambia, allora è $3x_1+2 < 3x_2+2$ e cioè $f(x_1) < f(x_2)$. L'asserto è così dimostrato."

La stretta crescita di f può essere dimostrata, in base all'equivalenza (6) provando che il rapporto $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ è positivo indipendentemente dalla scelta di x_1 e x_2 .

Dimostrazione 2: Studiamo il segno del rapporto $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3x_2 + 2 - (3x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{3x_2 - 3x_1}{x_2 - x_1} = \frac{3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 3 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2$$

Poiché il rapporto vale 3 indipendentemente dalla scelta di x_1 e x_2 e quindi è sempre positivo, la funzione è strettamente crescente $\square$

Esercizio. Verificare che la funzione $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = 3x^2+2$ **non** è strettamente crescente, né crescente

Per dimostrare che non è strettamente crescente (risp. crescente), occorre verificare che non è vero che per ogni coppia (x_1, x_2) di numeri reali tali che $x_1 < x_2$, risulti $f(x_1) < f(x_2)$ (risp. $f(x_1) \leq f(x_2)$): al tal fine è sufficiente far vedere che esiste almeno una coppia (x_1, x_2) tale che è $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$ (risp. $f(x_1) > f(x_2)$)

Dimostrazione "Se consideriamo $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ osserviamo che è $-1 < 1$ ma $f(-1) = 3(-1)^2 + 2 = 5 = f(1) = 3(1)^2 + 2 = 5$. Quindi f non è strettamente crescente.

Se consideriamo $(x_1, x_2) = (-2, 1)$, risulta $-2 < 1$ ma $f(-2) = 3(-2)^2 + 2 = 13 > f(1) = 3(1)^2 + 2 = 5$. Quindi f non è crescente.

❖ Funzioni decrescenti e strettamente decrescenti

Definizione. Sia $f: x \in A \rightarrow y = f(x)$ una funzione reale di una variabile reale.

- f è **decrescente** se, per ogni coppia (x_1, x_2) di punti di A , tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$, cioè:

$$dc) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{o, equivalente mente,} \quad dc') \quad x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- f è **strettamente decrescente** se, per ogni coppia (x_1, x_2) di punti di A , tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$, cioè:

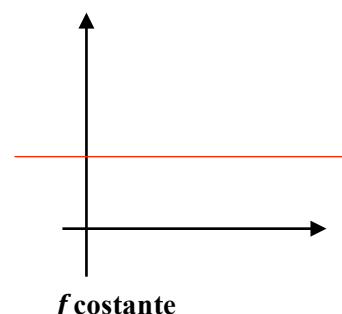
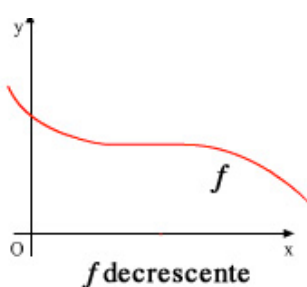
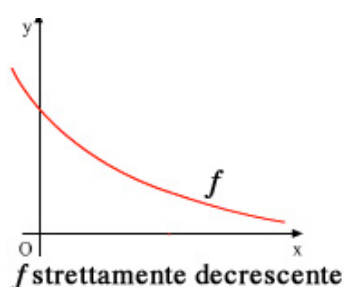
$$sdc) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \text{o, equivalente mente,} \quad sdc') \quad x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Una funzione strettamente decrescente è ovviamente una funzione decrescente, perché per essa sono vere le implicazioni $dc)$ e $dc')$ con la particolarità che le disuguaglianze al secondo membro sono sempre disuguaglianze strette.

Sulle funzioni costanti: Una funzione costante, $f: x \in A \rightarrow k$, è una particolare funzione decrescente: al secondo membro della implicazione $dc)$ o $dc')$ vale sempre l'uguaglianza.

Sul grafico di una funzione strettamente decrescente: al crescere dei valori della variabile indipendente x , le immagini $f(x)$ decrescono, perciò spostandosi da sinistra verso destra i punti del grafico si trovano ad ordinate via via più piccole e quindi il grafico scende.

Sul grafico di una funzione decrescente: spostandosi da sinistra verso destra sull'asse delle ascisse, i punti del grafico si trovano ad ordinate via via decrescenti o costanti.



Una definizione equivalente di funzione crescente o strettamente crescente è data dalle seguenti equivalenze

$$f \text{ è decrescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \quad (7)$$

$$f \text{ è strettamente decrescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \quad (8)$$

Esercizio. Dimostrare che la funzione $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = 1 - 3x$ è strettamente decrescente.

Esercizio. Dimostrare che la funzione $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$ non è decrescente.

Nota alla definizione di funzione strettamente crescente o strettamente decrescente: Se sono vere le implicazioni $sc)$ e $sdc)$ che definiscono rispettivamente una funzione strettamente crescente e una funzione strettamente decrescente sono vere le implicazioni inverse. Consideriamo ad esempio una funzione strettamente crescente per la quale vale l'implicazione $sc)$:

supposto $f(x_1) < f(x_2)$ non può essere $x_1 = x_2$ perché si avrebbe $f(x_1) = f(x_2)$ contro l'ipotesi, e non può essere $x_1 > x_2$ perché per l'implicazione $sc')$ equivalente alla $sc)$ si avrebbe $f(x_1) > f(x_2)$ contro l'ipotesi; allora è $x_1 < x_2$. L'implicazione $sc)$ si può scrivere allora come **equivalenza** $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

❖ Funzioni monotone e strettamente monotone

Definizione.- Una funzione è detta **monotona** se è **crescente o decrescente**.

Una funzione è detta **strettamente monotona** se è **strettamente crescente o strettamente decrescente**

Teorema- Una funzione f strettamente monotona è invertibile e la sua inversa f^{-1} è strettamente crescente se f è strettamente crescente, è strettamente decrescente se f è strettamente decrescente.

Dimostrazione. Per la prima parte dell'asserto, occorre dimostrare che se f è strettamente monotona allora f è iniettiva, cioè è vera l'implicazione

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Sia $x_1 \neq x_2$; possiamo supporre $x_1 < x_2$; allora risulta $f(x_1) < f(x_2)$, se f è strettamente crescente, mentre risulta $f(x_1) > f(x_2)$, se f è strettamente decrescente, quindi in ogni caso è $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Alla stessa conclusione si giunge supponendo $x_1 > x_2$; pertanto l'implicazione suindicata è vera e la funzione è invertibile

Dimostriamo la seconda parte dell'asserto limitatamente alle funzioni strettamente crescenti, perché per le funzioni strettamente decrescenti la dimostrazione è analoga.

Sia $f: x \in A \rightarrow y = f(x) \in f(A)$ strettamente crescente e quindi tale che:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2). \quad (9)$$

e sia $f^{-1}: y \in f(A) \rightarrow x = f^{-1}(y) \in A$ la funzione inversa di f . Dimostriamo che f^{-1} è strettamente crescente, cioè che:

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

I valori di f e i valori dell'inversa f^{-1} sono per definizione, legati dall'equivalenza:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

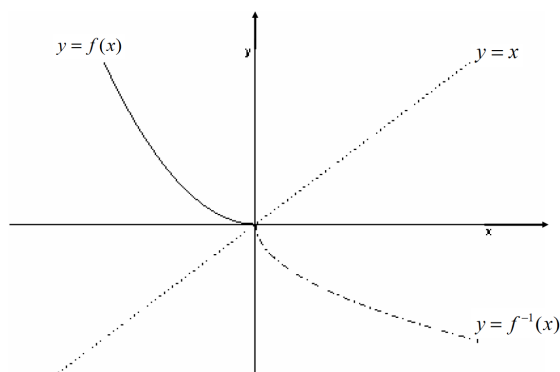
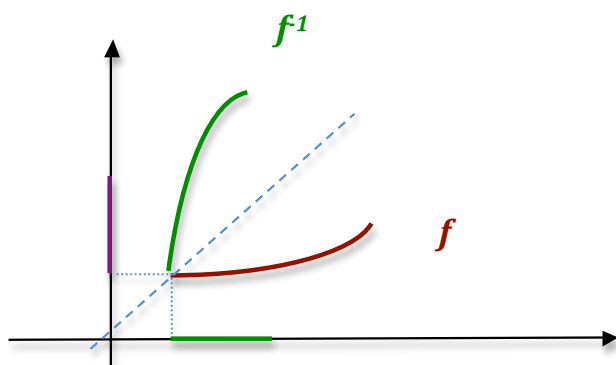
Pertanto se (y_1, y_2) è una coppia di punti di $f(A)$ esiste una coppia (x_1, x_2) di punti di A tale che

$$y_1 = f(x_1) \text{ e } y_2 = f(x_2) \text{ e quindi } x_1 = f^{-1}(y_1) \text{ e } x_2 = f^{-1}(y_2). \quad (10)$$

Allora, applicando le uguaglianze (10) e l'equivalenza (9) si ha:

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

ciò prova che f^{-1} è strettamente crescente.



3.3 Funzioni affini, convesse, concave

- La funzione affine

La funzione *affine* (cfr. fascicolo rette e funzioni lineari e affini) è la funzione

$$f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = mx + n$$

che ha per grafico la retta di equazione $y = mx + n$. Essa è caratterizzata dalla seguente proprietà di *affinità*

$$f(hx_1 + kx_2) = hf(x_1) + kf(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall h, k \in \mathbb{R}: h+k=1 \quad (11)$$

Conseguenza della (11) è la seguente proprietà geometrica:

a) comunque si scelgano due *punti distinti del grafico* di f $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, *tutto il segmento di estremi* $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ *giace sul grafico*.

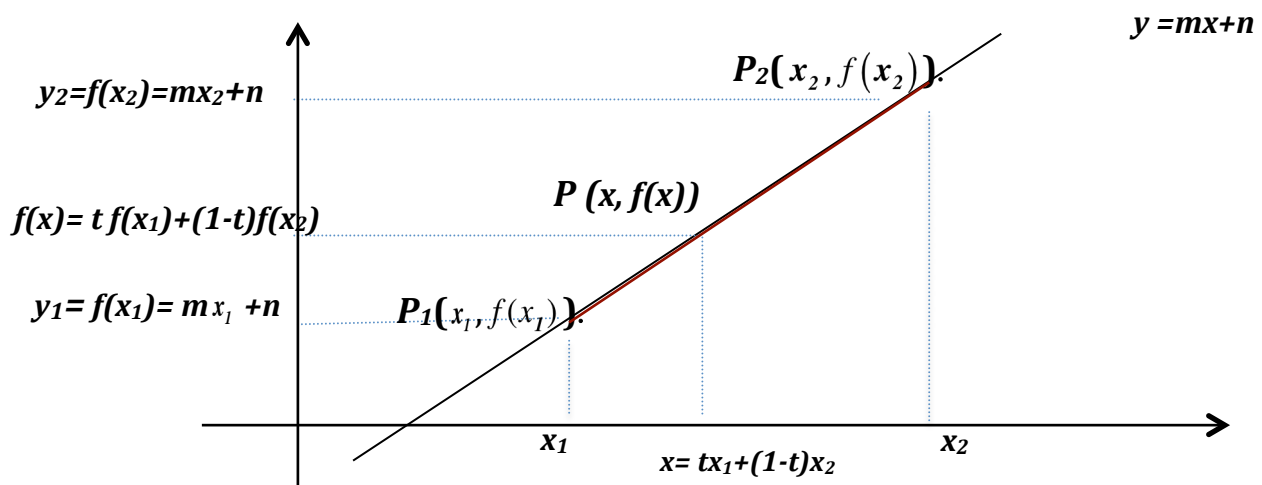
Osserviamo che l'ascissa di un punto $P(x, f(x))$ del segmento $\overline{P_1P_2}$ ha un'ascissa x compresa tra x_1 e x_2 ; ne consegue che $0 \leq t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \leq 1$, e che quindi x è così esprimibile:

$$x = tx_1 + (1-t)x_2, \text{ con } t \in [0, 1]. \quad (\text{cioè } x \text{ combinazione convessa di } x_1 \text{ e } x_2)$$

Poiché $t + (1-t) = 1$, per la proprietà di affinità (11), l'ordinata di P è allora

$$f(x) = t f(x_1) + (1-t) f(x_2). \quad (\text{cioè } f(x) \text{ combinazione convessa di } f(x_1) \text{ e } f(x_2) \text{ con gli stessi coefficienti})$$

Dall'ultima uguaglianza segue che $\frac{f(x) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = t \in [0, 1]$ e $f(x)$ cade tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.



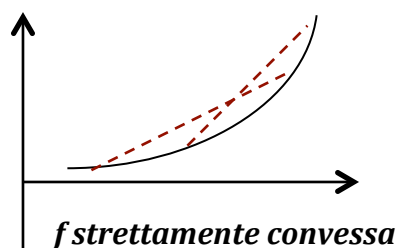
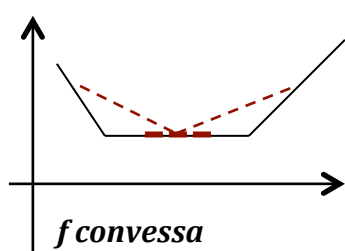
Considereremo ora particolari funzioni, le funzioni convesse e concave, che comprendono come caso particolare le funzioni affini. Introduciamo tali funzioni proprio attraverso una proprietà geometrica caratteristica del grafico e daremo poi la proprietà analitica che le definisce.

- **Funzione convessa o concava su un intervallo dal punto di vista grafico**

Una funzione **convessa** è una *funzione definita in un intervallo I di $\mathbb{R}$* e caratterizzata dal punto di vista grafico dalla seguente condizione: *comunque si scelgano due punti distinti P_1 e P_2 sul grafico si verifica uno dei seguenti fatti:*

- a) il segmento $\overline{P_1P_2}$ giace sul grafico,
- b) tutti i punti del segmento $\overline{P_1P_2}$ diversi dagli estremi sono al di sopra del grafico .

Una funzione **strettamente convessa** è, per definizione, una funzione **convessa** tale che, *per ogni scelta di P_1 e P_2 sul grafico, si verifica solo la situazione b): cioè il segmento $\overline{P_1P_2}$ ha tutti i punti diversi dagli estremi al di sopra del grafico*

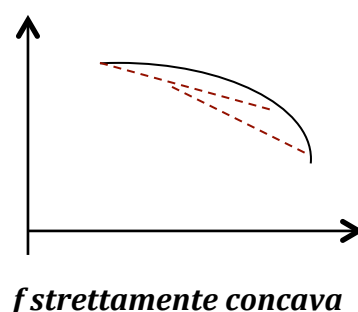
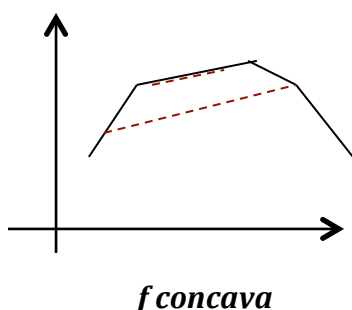


- **Nota 1-** Una funzione tale che, *per ogni scelta di P_1 e P_2 sul grafico, si verifica solo il , fatto a),* ha necessariamente per grafico una retta o una semiretta o un segmento, perciò è *una funzione affine o una sua restrizione ad un intervallo: allora le funzione affini e le loro restrizioni a intervalli sono particolari funzioni convesse.*

Una funzione **concava** è una *funzione definita in un intervallo I di $\mathbb{R}$* e caratterizzata dal punto di vista grafico dalla seguente condizione: *comunque si scelgano due punti distinti P_1 e P_2 sul grafico si verifica una delle seguenti situazioni:*

- a) il segmento $\overline{P_1P_2}$ giace sul grafico,
- b') tutti i punti del segmento $\overline{P_1P_2}$ diversi dagli estremi sono al di sotto del grafico .

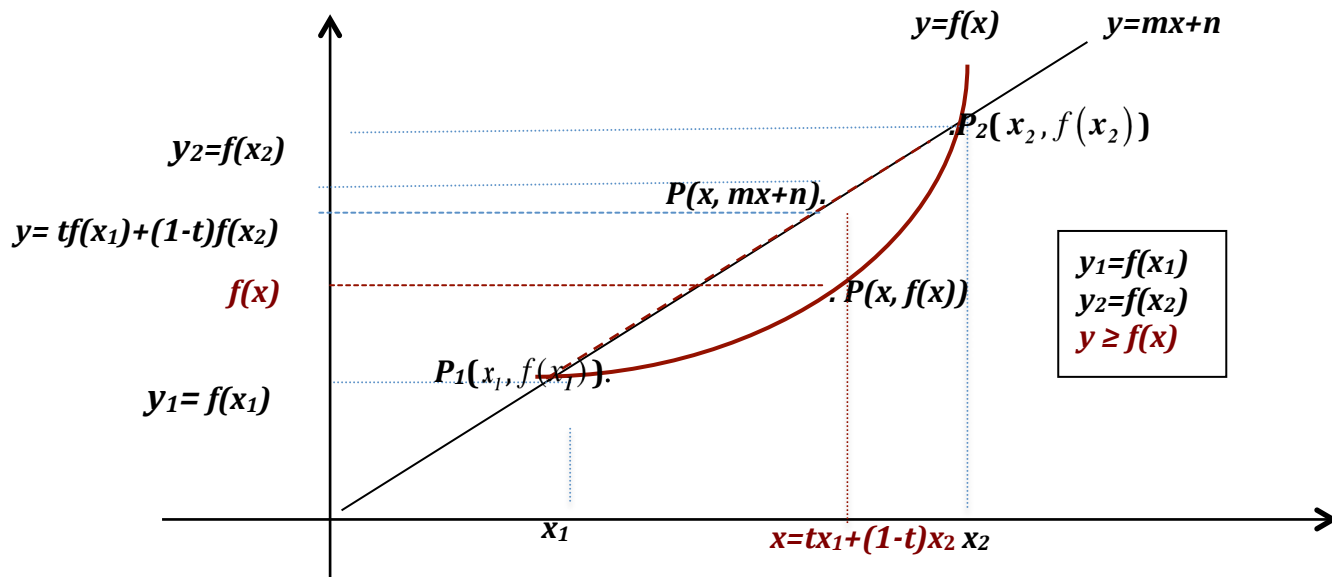
Una funzione **strettamente concava** è una funzione **concava** tale che *tale che, per ogni scelta di P_1 e P_2 sul grafico, si verifica solo la situazione b': cioè il segmento $\overline{P_1P_2}$ ha tutti i punti diversi dagli estremi al disotto del grafico*



- **Nota 2-** Tra le funzioni concave rientrano le funzioni tali che *per ogni scelta di P_1 e P_2 sul grafico, si verifica solo il fatto a);* per quanto osservato nella nota 1, queste funzioni sono le funzioni affini o le loro restrizioni ad intervalli, perciò possiamo affermare che *le funzione affini e le loro restrizioni a intervalli sono particolari funzioni concave. Tali funzioni sono le uniche funzioni ad essere contemporaneamente funzioni convesse e funzioni concave.*

- **Funzione convessa su un intervallo e proprietà analitica che la definisce:**

$$f: x \in I \rightarrow f(x)$$



Siano $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ due punti del grafico di f e $g(x) = mx + n$ la funzione affine che ha per grafico la retta passante per P_1 e P_2 .

Sul **segmento** di estremi $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ che giace sul grafico di $g(x) = mx + n$, per il punto $P(x, y)$ di ascissa x risulta:

$$\begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y = ty_1 + (1-t)y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y = tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Sull'**arco di curva** compreso tra $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, per il punto $P(x, f(x))$ risulta

$$\begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ f(x) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Quindi:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad t \in [0, 1]$$

L'immagine di una combinazione convessa di x_1 e x_2 è minore della combinazione convessa delle immagini o

Tale risultato vale per ogni scelta sul grafico dei punti $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ e di $P(x, f(x))$ compreso tra i suindicati punti (e perciò con ascissa $x = tx_1 + (1-t)x_2$, $t \in [0, 1]$). Quindi

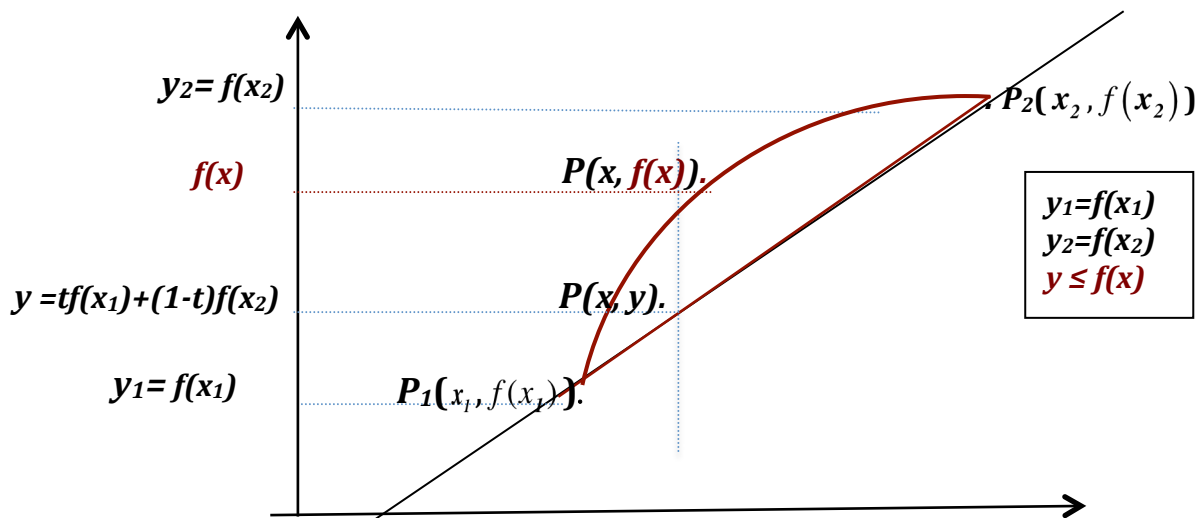
$$f \text{ convessa su } I \Leftrightarrow \left(f(x) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \right. \\ \left. \forall x_1, x_2 \in I, \text{ e } \forall t \in [0, 1] \right)$$

Definizione analitica di funzione convessa

Ovviamente:

$$f \text{ strett. convessa su } I \Leftrightarrow \left(f(x) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \right. \\ \left. \forall x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \text{ e } \forall t \in]0, 1[\right)$$

- Funzione concava su un intervallo e proprietà analitica che la definisce $f: x \in I \rightarrow f(x)$
 $y = mx + n$



Siano $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ due punti del grafico di f e $g(x) = mx + n$ la funzione affine che ha per grafico la retta passante per P_1 e P_2 .

Sul segmento di estremi $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ che giace sul grafico di $g(x) = mx + n$, per il punto $P(x, y)$ risulta

$$\begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y = ty_1 + (1-t)y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y = tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Sull'arco di curva sul grafico di f compreso tra $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, per il punto $P(x, f(x))$ risulta

$$\begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ f(x) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

e quindi

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad t \in [0, 1]$$

L'immagine di una combinazione convessa di x_1 e x_2 è maggiore della combinazione convessa delle immagini o ad essa uguale.

Tale risultato vale per ogni scelta sul grafico dei punti $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ e di $P(x, f(x))$ compreso tra i suindicati punti (e perciò con ascissa $x = tx_1 + (1-t)x_2, t \in [0, 1]$). Quindi

$$f \text{ concava su } I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\ \forall x_1, x_2 \in I, \quad e \quad \forall t \in [0, 1] \end{pmatrix}$$

Definizione analitica di funzione concava

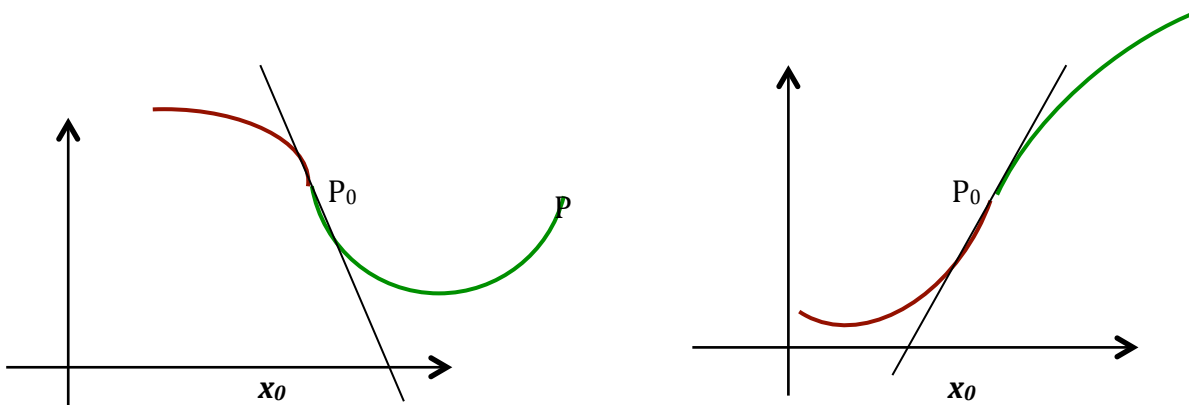
Ovviamente:

$$f \text{ strett. concava su } I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\ \forall x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \quad e \quad \forall t \in]0, 1[\end{pmatrix}$$

3.4 Punto di flesso

Sia $f: x \in I \rightarrow f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e sia x_0 un punto interno a I .

Allora: $P_0(x_0, f(x_0))$ punto del grafico di f , è detto **punto di flesso**, se esistono un intorno sinistro di x_0 , $]a, x_0]$, ed un intorno destro, $[x_0, b[$, tali che f risulti concava (risp. convessa) in $]a, x_0]$ e convessa (risp. concava) in $[x_0, b[$.



4. FUNZIONI LIMITATE E NON ED ESTREMI DELLA FUNZIONE

Sia $f: x \in A \rightarrow y = f(x) \in B$ una funzione reale di una variabile reale.

Il dominio A della funzione è trasformato da f nell'insieme $f(A)$ delle immagini o codominio. Si conviene che le proprietà di limitatezza o non limitatezza riguardanti $f(A)$ vengano riferite alla funzione alla funzione f , in particolare **gli estremi di $f(A)$** sono detti **estremi della funzione f** .

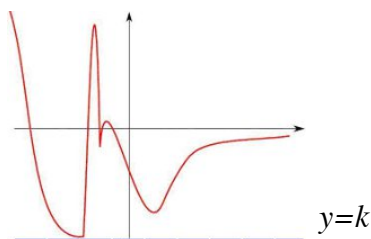
f limitata inferiormente $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f(A)$ insieme limitato inferiormente $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) \geq k, \forall x \in A$

f limitata superiormente $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f(A)$ insieme limitato superiormente $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R} : f(x) \leq h, \forall x \in A$

f limitata $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f(A)$ insieme limitato $\Leftrightarrow \exists k, h \in \mathbb{R} : k \leq f(x) \leq h, \forall x \in A$

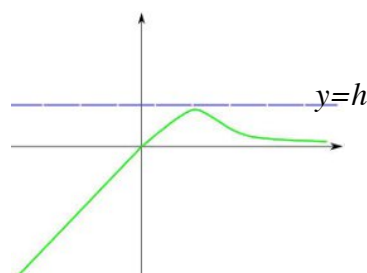
f non limitata inferiormente $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f(A)$ insieme non limitato inferiormente $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists x \in A : f(x) < k$

f non limitata superiormente $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} f(A)$ insieme non limitato superiormente $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists x \in A : f(x) > k$



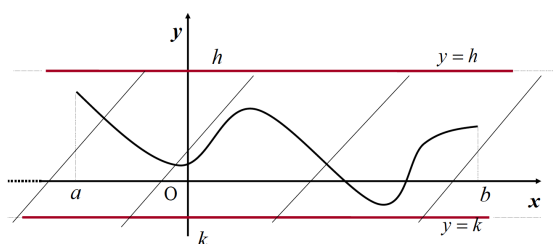
funzione limitata inferiormente

$f(x)$ è limitata inferiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sopra di una retta orizzontale $y=k$



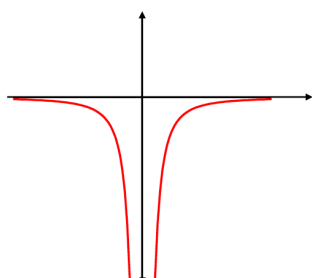
funzione limitata superiormente

$f(x)$ è limitata superiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sotto di una retta orizzontale $y=h$

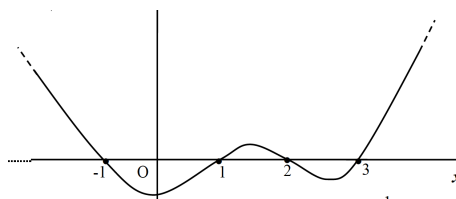


funzione limitata

$f(x)$ è limitata se e solo se il suo grafico è compreso tra due rette orizzontali



funzione non limitata inferiormente



funzione non limitata superiormente

- l'estremo inferiore di una funzione è, per definizione, l'estremo inferiore del codominio $f(A)$: esso è indicato con $\inf f$ o $\inf_{x \in A} f(x)$;
- l'estremo superiore di una funzione è, per definizione, l'estremo superiore del codominio $f(A)$: esso è indicato con $\sup f$ o $\sup_{x \in A} f(x)$;
- il minimo (assoluto) di una funzione, se esiste, è, per definizione, il minimo del codominio $f(A)$: esso è indicato con $\min f$ o $\min_{x \in A} f(x)$;
- il massimo (assoluto) di una funzione, se esiste, è, per definizione, il massimo del codominio $f(A)$: esso è indicato con $\max f$ o $\max_{x \in A} f(x)$;

Se massimo e minimo assoluto coincidono la funzione è costante

Il minimo e il massimo di una funzione sono detti estremi assoluti della funzione

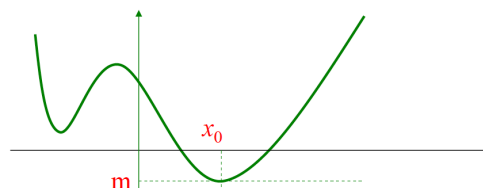
4.1 Punto di minimo e punti di massimo (assoluti)

Il minimo m di una funzione è, per definizione, il minimo dell'insieme delle immagini $f(A)$ ed è indicato con: $\min f$ o $\min_{x \in A} f(x)$.

Allora, per definizione di minimo di un insieme:

- m appartiene ad $f(A)$ (cioè è l'immagine di un x_0 di A);
 - m è minore o uguale di ogni altro elemento di $f(A)$ (cioè di ogni immagine $f(x)$, con $x \in A$).
- Quindi

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = m \\ m \leq f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$$

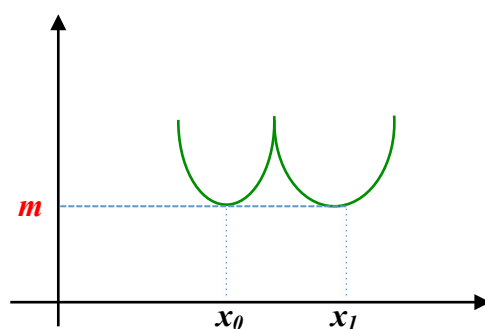


Definizione. Punto di minimo (assoluto) per f è ogni x_0 del dominio A in cui la funzione f assume il valore minimo m .

In altri termini:

$$x_0 \text{ punto di minimo (assoluto) per } f \Leftrightarrow f(x_0) = m = \min f \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \quad (12)$$

Il minimo di una funzione, se esiste è unico, mentre i punti di minimo possono essere più di uno.



$$m = \min f$$

$$m = f(x_0) = f(x_1)$$

x_0 e x_1 punti di minimo

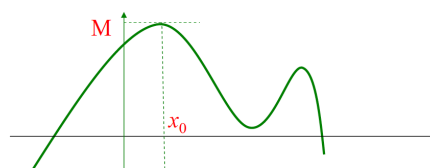
Il massimo M di una funzione è, per definizione, **il massimo dell'insieme delle immagini $f(A)$** ed è indicato con : **$\max f$ o $\max_{x \in A} f(x)$** .

Per definizione il massimo M di una funzione è il massimo dell'insieme delle immagini $f(A)$; allora, per definizione di massimo di un insieme:

- M appartiene ad $f(A)$ (cioè è l'immagine di un x_0 di A);
- M è maggiore o uguale di ogni altro elemento di $f(A)$ (cioè di ogni immagine $f(x)$, con $x \in A$).

Quindi

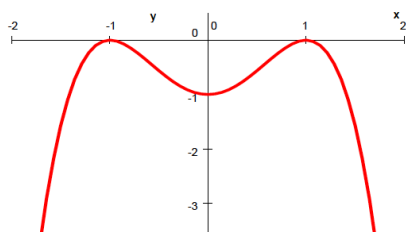
$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = M \\ M \geq f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$$



Definizione. Punto di massimo per f è ogni x_0 del dominio A in cui la funzione f assume il valore massimo M

$$x_0 \text{ punto di massimo (assoluto) per } f \Leftrightarrow f(x_0) = M = \max f \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \quad (13)$$

Il massimo di una funzione, se esiste, è unico, ma i punti di massimo possono essere più di uno.



$$\begin{aligned} 0 &= \max f \\ 0 &= f(-1) = f(1) \\ -1 \text{ e } 1 &\text{ punti di massimo} \end{aligned}$$

Il minimo e il massimo assoluti di una funzione f sono detti estremi assoluti di f .

I punti di minimo e massimo assoluti sono detti punti di estremo assoluto.

Quindi:

$$x_0 \text{ punto di estremo (assoluto) per } f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_0 \text{ punto di minimo o massimo (assoluto)}$$

4.2 Punti di minimo o massimo relativo

Se riguardiamo le definizioni (12) e (13) di punto di minimo o di massimo per f

$$x_0 \text{ punto di minimo per } f \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

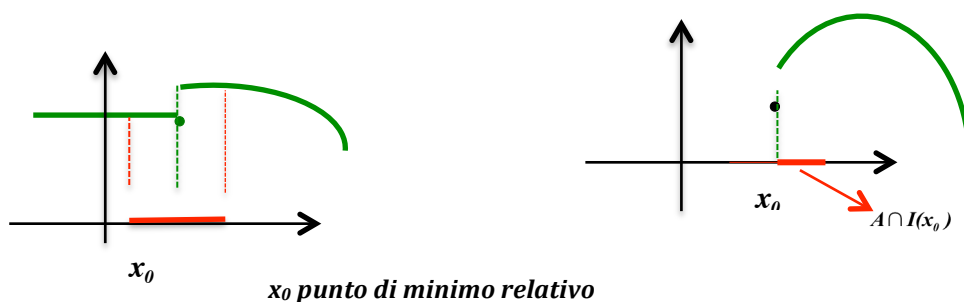
$$x_0 \text{ punto di massimo per } f \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

ci rendiamo conto che esse coinvolgono il confronto tra il valore della funzione nel punto di minimo o massimo x_0 e i valori in tutti gli altri punti. Si parla allora di **punto di minimo globale o assoluto** e **punto di massimo globale o assoluto** per rendere conto di tale situazione e per distinguere tali punti dai *punti di minimo relativo o massimo relativo* che andiamo a introdurre.

Definizione. $x_0 \in A$ è un **punto di minimo relativo** per $f: x \in A \rightarrow f(x)$ se e solo se esiste un intorno $I(x_0)$ nel quale i valori di f sono tutti maggiori o uguali a $f(x_0)$.

$$x_0 \text{ punto di minimo relativo per } f \Leftrightarrow \exists I(x_0) : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap I(x_0)$$

$f(x_0)$ è allora detto **minimo relativo**

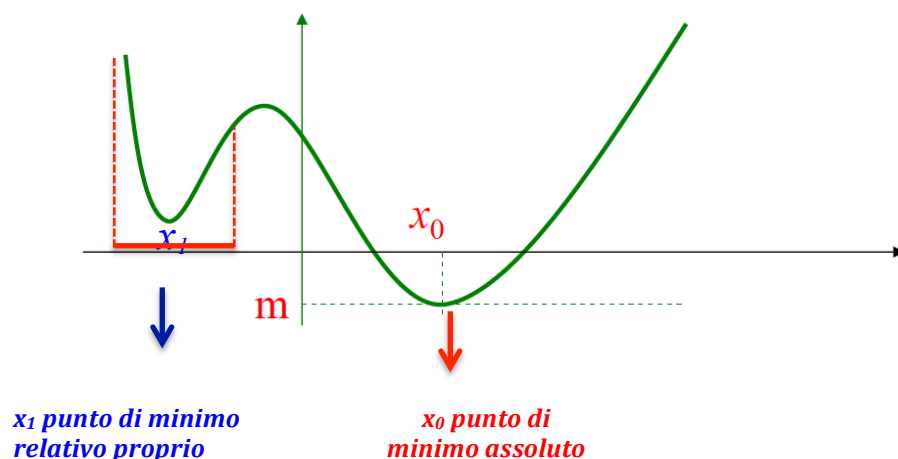


Un caso particolare di punto di minimo relativo è il punto di *minimo relativo proprio o forte*.

Definizione. $x_0 \in A$ è un **punto di minimo relativo proprio** per $f: x \in A \rightarrow f(x)$ se e solo se esiste un intorno $I(x_0)$ nel quale i valori di f in punti $x \neq x_0$ sono tutti maggiori di $f(x_0)$.

$$x_0 \text{ punto di minimo relativo proprio per } f \Leftrightarrow \exists I(x_0) : f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in A \cap I(x_0) - \{x_0\}$$

$f(x_0)$ è allora detto **minimo relativo proprio**



Nota:
un punto di minimo assoluto è anche di minimo relativo

Definizione. $x_0 \in A$ è un **punto di massimo relativo** per $f: x \in A \rightarrow f(x)$ se e solo se esiste un intorno $I(x_0)$ nel quale i valori di f sono tutti minori o uguali a $f(x_0)$.

$$x_0 \text{ punto di massimo relativo per } f \Leftrightarrow \exists I(x_0): f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap I(x_0)$$

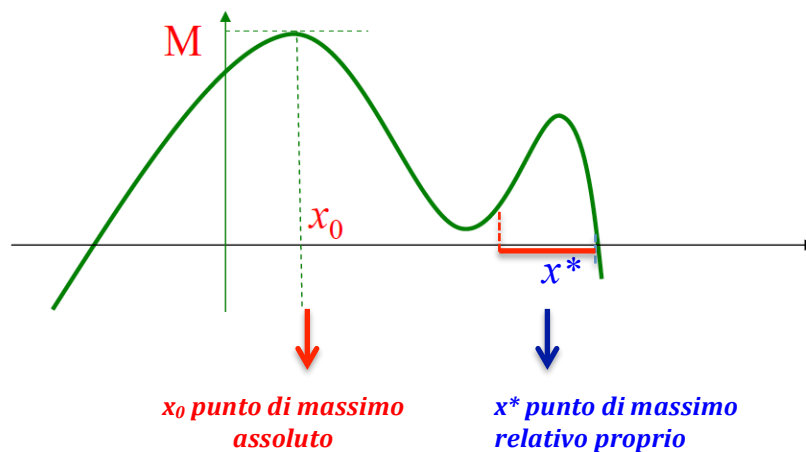
$f(x_0)$ è allora detto **massimo relativo**

Un caso particolare di punto di massimo relativo è il punto di *massimo relativo proprio* o *forte*.

Definizione. $x_0 \in A$ è un **punto di massimo relativo proprio** per $f: x \in A \rightarrow f(x)$ se e solo se esiste un intorno $I(x_0)$ nel quale i valori di f in punti $x \neq x_0$ sono tutti minori di $f(x_0)$.

$$x_0 \text{ punto di massimo relativo proprio per } f \Leftrightarrow \exists I(x_0): f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in A \cap I(x_0) - \{x_0\}$$

$f(x_0)$ è allora detto **massimo relativo proprio**.



Nota:
un punto di massimo assoluto è anche di massimo relativo

Diamo infine le seguenti definizioni

I punti di minimo e massimo relativi sono detti **punti di estremo relativo**.

Il minimo e il massimo relativi di una funzione f sono detti **estremi relativi di f** .

Quindi:

$$x_0 \text{ punto di estremo relativo per } f \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_0 \text{ punto di minimo o massimo relativo}$$

INDICE

1. FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE	pag. 1
1.1 Grafico di una funzione reale di una variabile reale	pag. 1
1.2 Successione di numeri reali.	pag. 5
2. FUNZIONE INVERTIBILE E RELAZIONE TRA I GRAFICI DI f e di f^{-1}	pag. 7
3. FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE DENOMINATE ATTRAVERSO LORO PROPRIETÀ	pag.9
3.1 Funzione pari e funzioni dispari	pag. 9
3.2. Funzioni monotone	pag.10
❖ Funzioni crescenti e strettamente crescenti	pag. 10
❖ Funzioni decrescenti e strettamente decrescenti	pag. 12
❖ Funzioni monotone e strettamente monotone	pag. 13
3.3 Funzioni affini, convesse, concave	pag. 14
• La funzione affine	pag. 14
• Funzione convessa o concava su un intervallo dal punto di vista grafico	pag. 15
○ Funzione convessa su un intervallo e proprietà analitica che la definisce	pag.16
○ Funzione concava su un intervallo e proprietà analitica che la definisce	pag.17
3.4 Punto di flesso	pag. 18
4. FUNZIONI LIMITATE E NON ED ESTREMI DELLA FUNZIONE	pag. 19
4.1 Punti di minimo e punti di massimo (assoluti)	pag. 20
4.2 Punti di minimo o massimo relativo	pag. 22