QUALCHE ESERCIZIO SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione

Ricordiamo che il:

Principio d'Induzione Matematica (PIM)
Sia $K \subseteq \mathbb{N}$.
Se:

(B) $0 \in K$ *e*

(P) per ogni $n \in K$ *risulta* $n + 1 \in K$,

allora $K = \mathbb{N}$.

è una delle proprietà/assiomi che individuano l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e che, come mostrato a lezione, può essere usato in vari modi per dimostrare teoremi riguardanti tali numeri.

Gli esercizi proposti nella sezione 1 servono a prendere dimestichezza con tale strumento.
I problemi proposti nella sezione 2, invece, sono un po' più difficili e servono per testare la maturità ed il grado di padronanza del materiale.

Nelle sezioni finali sono riportate le soluzioni sia degli esercizi sia dei problemi. Raccomandiamo comunque allo studioso lettore di leggerle solo dopo aver tentato (eventualmente più volte) di giungere autonomamente alla soluzione.

1. Esercizi

`Esercizio 1:` Dimostrare che la disuguaglianza:

$$3^n \geq n^2 \tag{1}$$

vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Date: 29 dicembre 2017.

`Esercizio 2:` Mostrare che le uguaglianze:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}\ n\ (n+1) \tag{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}\ n\ (n+1)\ (2n+1) \tag{3}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{1}{2}\ n\ (n+1)\right)^2 \tag{4}$$

valgono per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$.

`Esercizio 3 (Somma di una progressione geometrica):` Provare che, comunque si fissi il numero $q\neq 1$, risulta:

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{5}$$

per ogni $n\in\mathbb{N}$.

`Esercizio 4 (Disuguaglianza di Bernoulli):` Mostrare che, per ogni numero $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, comunque si scelgano n numeri reali $x_1,x_2,\ldots,x_n\geq -1$ aventi lo stesso segno[1] vale la disuguaglianza:

$$(1+x_1)\ (1+x_2)\ \cdots\ (1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n\ . \tag{6}$$

Dalla (6) ricavare la classica *disuguaglianza di Bernoulli*:

$$(1+x)^n\geq 1+n\ x\ , \tag{7}$$

ove $x\geq -1$.
Infine, esibire un controesempio che mostri che la disuguaglianza (6) non vale se gli $x_1,\ldots,x_n$ non hanno tutti lo stesso segno.

`Esercizio 5:` Analogamente, mostrare che, per ogni numero $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, comunque si scelgano n numeri reali $0\leq x_1,x_2,\ldots,x_n\leq 1$ vale la disuguaglianza:

$$(1-x_1)\ (1-x_2)\ \cdots\ (1-x_n)\leq\frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}\ . \tag{8}$$

Dalla (8) ricavare la *disuguaglianza di tipo Bernoulli*:

$$(1-x)^n\leq\frac{1}{1+n\ x}\ , \tag{9}$$

in cui $0\leq x\leq 1$.
Provare, inoltre, che per $0<x\leq 1$ nella (9) vale sempre la disuguaglianza stretta.

`Esercizio 6:` Dimostrare che ogni insieme finito e non vuoto di numeri reali[2] ha minimo e massimo.

2. Problemi

`Problema 1:` Trovare una formula che fornisca il valore del prodotto:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\ \left(1-\frac{1}{9}\right)\ \left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) \tag{10}$$

per ogni $n\in\mathbb{N}$ e dimostrarne la validità per induzione.

---

[1] Cioè o tutti ≥ 0 oppure tutti ≤ 0

[2] Si ricordi che un insieme $X\subseteq\mathbb{R}$ non vuoto è *finito* se e solo se esistono un numero $n\in\mathbb{N}$ ed una biiezione $f:\{1,\ldots,n\}\to X$.
In tal caso, si dice che X *ha* n *elementi* e si può usare l'applicazione f per *enumerare* (cioè elencare in successione) gli elementi di X, ponendo $x_1=f(1)$, …, $x_n=f(n)$.

`Problema 2:` Siano α, β, d e q numeri reali fissati.
Consideriamo le applicazioni $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definite in maniera ricorsiva[3] come segue:

$$\begin{cases} a(0) = \alpha \\ a(n+1) = a(n) + d & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{11}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} b(0) = \beta \\ b(n+1) = q\ b(n) & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases} . \tag{12}$$

Individuare le leggi di assegnazione *esplicite* di a e b e dimostrarne la validità usando il Principio d'Induzione.

`Problema 3:` Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita in maniera ricorsiva come segue:

$$\begin{cases} a(0) = \frac{1}{2} \\ a(n+1) = \frac{1}{2-a(n)} & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases} . \tag{13}$$

1. Dimostrare che le proprietà:

$$a(n) < 1 \tag{14}$$

$$a(n) \geq \frac{1}{2} \tag{15}$$

$$a(n+1) > a(n) \tag{16}$$

valgono per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Determinare una formula *esplicita* che fornisca la legge di assegnazione di a e dimostrarne la validità per induzione.

3 (Per chi ha studiato i limiti di successioni). Senza l'ausilio della formula determinata al punto **2**, dimostrare che la successione di termine generale $a_n := a(n)$ è convergente e determinarne il limite.

`Problema 4 (Algoritmo di Erone):` Siano $\alpha > 0$ ed $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita in maniera ricorsiva come segue:

$$\begin{cases} a(0) = \alpha \\ a(n+1) = \frac{1}{2}\ a(n) + \frac{\alpha}{2\ a(n)} & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases} . \tag{17}$$

1. Dimostrare che:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \min\{1, \alpha\} \leq a(n) \leq \max\{1, \alpha\} \tag{18}$$

$$\forall n \geq 2,\ a(n) \geq \sqrt{\alpha} \tag{19}$$

$$\forall n \geq 2,\ a(n+1) \leq a(n) \tag{20}$$

2 (Per chi ha già studiato i limiti di successioni). Provare che la successione di termine generale $a_n := a(n)$ è convergente e calcolarne il limite.

---

[3] Si dice che una funzione f avente dominio $\mathbb{N}$ è *definita in maniera ricorsiva* quando, al posto di specificare la legge di assegnazione $n \mapsto f(n)$, vengono assegnati il valore $f(0)$ ed una regola per calcolare il valore di $f(n+1)$ a partire da quello di $f(n)$.
È immediato intuire che, una volta assegnati $f(0)$ e la regola che consente di calcolare $f(n+1)$ partendo da $f(n)$, rimangono determinati *tutti* i valori assunti dalla funzione: infatti, da $f(0)$ è possibile calcolare $f(1) = f(0+1)$; conoscendo $f(1)$ è possibile calcolare $f(2) = f(1+1)$; partendo da $f(2)$ è possibile calcolare $f(3) = f(2+1)$; e così via...
Il lettore attento noterà che la possibilità di dare una definizione in maniera ricorsiva si basa sulla validità del Principio d'Induzione.

`Problema 5:` Dimostrare la seguente affermazione:

> PRINCIPIO DEL BUON ORDINAMENTO: Ogni sottoinsieme non vuoto contenuto in $\mathbb{N}$ è dotato di minimo; in altri termini, se $T \subseteq \mathbb{N}$ è $\neq \varnothing$, allora esiste un $t' \in \mathbb{N}$ tale che:
> $$\begin{cases} \forall t \in T, \quad t' \leq t \\ t' \in T \,. \end{cases}$$

`Problema 6:` Quanti sottoinsiemi ha un insieme finito costituito da n elementi?

`Problema 7 (di G. Polya[4]):` Si legga con attenzione seguente ragionamento induttivo.

> Vogliamo dimostrare che se esiste un gatto nero, allora tutti i gatti sono neri.
> Cominciamo col mostrare che, per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, vale la seguente proprietà:
> $$\mathcal{P}(n) = \text{“gli insiemi di } n \text{ gatti che contengono almeno un gatto nero sono costituiti da tutti gatti neri” .}$$
> Facciamo induzione su n.
>
> - Per $n = 1$, $\mathcal{P}(1)$ è evidentemente vera. Ciò costituisce la *base dell'induzione*.
>
> - Per verificare il *passo induttivo* dobbiamo mostrare che se è vera $\mathcal{P}(n)$ (*ipotesi induttiva*) allora è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$ (*tesi induttiva*), ossia che se tutti gli insiemi di n gatti che contengono almeno un gatto nero sono costituiti da tutti gatti neri, allora anche gli insiemi di $n+1$ gatti che contengono almeno un gatto nero sono costituiti da tutti gatti neri.
>   Sia G un insieme di $n+1$ gatti, diciamoli $g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}$, contenente almeno un gatto nero; senza ledere la generalità, possiamo supporre che g_1 sia un gatto nero. I due sottoinsiemi $G - \{g_2\}$ e $G - \{g_3\}$ sono insiemi di n gatti e contengono g_1 che è nero: ne consegue, per *ipotesi induttiva*, che gli insiemi $G - \{g_2\}$ e $G - \{g_3\}$ sono costituiti da tutti gatti neri; ciò implica che i gatti g_2, g_3, $\ldots$, g_{n+1} sono neri e, poiché g_1 pure è nero, tutti i gatti contenuti in G sono effettivamente neri.
>
> Acquisito ciò, concludiamo che vale quanto affermato all'inizio: infatti, l'esistenza di almeno un gatto nero è certa (se ne trovano parecchi in giro!) e ciò consente di applicare la $\mathcal{P}(n)$ iterativamente per ogni n e concludere che tutti i gatti sono neri.

Esso è evidentemente sbagliato, poiché giunge ad una conclusione che ognuno può smentire (semplicemente esibendo un gatto tigrato).
Dov'è l'errore?

3. Soluzioni degli Esercizi

Soluzione dell'`Esercizio 1`. Sia K l'insieme dei numeri naturali per cui la (1) è valida, cioè:
$$K = \{n \in \mathbb{N} : \; 3^n > n^2\} \; ;$$

[4] György “George” Pólya (1887 – 1985), matematico ungherese.

risolvere l'esercizio vuol dire mostrare che $K = \mathbb{N}$.
Usiamo il PIM. Per prima cosa notiamo che $3^0 = 1 > 0 = 0^2$, cosicché $0 \in K$; d'altro canto si ha pure $3^1 = 3 > 1 = 1^2$ e $3^2 = 9 > 4 = 2^2$, ergo è anche $1, 2 \in K$. Ciò costitusce una buona *base per l'induzione*.
Per il *passo induttivo* ci basta mostrare che se $n \in K$, ossia se è soddisfatta l'*ipotesi induttiva* $3^n > n^2$, allora è anche $n+1 \in K$, cioè è vera la *tesi induttiva* $3^{n+1} > (n+1)^2$; inoltre, dato che sappiamo già che $0, 1, 2 \in K$ per ispezione diretta, possiamo limitarci a mostrare che il passo induttivo è valido per $n \geq 2$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= \underbrace{3^n}_{>n^2} \cdot 3 \\ &\geq 3\ n^2 \end{aligned}$$

e, conseguentemente, per acquisire la tesi induttiva basta mostrare che per $n \geq 2$ vale la disuguaglianza:

$$3\ n^2 > (n+1)^2\ \ :$$

infatti, valendo tale disuguaglianza, avremmo $3^{n+1} \geq 3n^2 \geq (n+1)^2$ da cui discende la tesi (per la proprietà transitiva della relazione $\geq$). Una semplice manipolazione algebrica (*completamento del quadrato*) mostra che:

$$\begin{aligned} 3\ n^2 - (n+1)^2 &= 2\ n^2 - 2\ n - 1 \\ &= 2\ \left(n^2 - n\right) - 1 \\ &= 2\ \Big(\underbrace{n^2 - n + \frac{1}{4}}_{=(n-1/2)^2} - \frac{1}{4}\Big) - 1 \\ &= 2\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\ ; \end{aligned}$$

ma si ha:

$$\begin{aligned} n \geq 2 \quad &\Rightarrow \quad n - \frac{1}{2} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \quad \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \\ &\Rightarrow \quad 2\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 2\ \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

e dunque se $n \geq 2$ si ha:

$$3\ n^2 - (n+1)^2 \geq 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad 3\ n^2 > (n+1)^2\ ,$$

come volevamo. □

Soluzione dell'`Esercizio` 2. *Proviamo la* (2). Sia K l'insieme degli $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ che soddisfano la (2), cioè:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}\ n\ (n+1) \right\}\ .$$

Dimostrare che la (2) è valida per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ equivale a far vedere che $K = \mathbb{N} - \{0\}$; a tal uopo, usiamo il PIM.
Evidentemente $1 \in K$ e ciò costituisce una buona *base per l'induzione*.

Per dimostrare il *passo induttivo* mostriamo che dall'ipotesi $n \in K$, ossia dal verificarsi che $1+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$, segue che $n+1 \in K$, ovvero che $1+\cdots+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
1+\cdots+(n+1) &= \underbrace{1+\cdots+n}_{=1/2\ n\ (n+1)} +(n+1) \\
&= \frac{1}{2}\ n\ (n+1) + (n+1) \\
&= (n+1)\ \left(\frac{n}{2}+1\right) \\
&= (n+1)\ \frac{n+2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ (n+1)\ (n+2)
\end{aligned}$$

che è quanto chiedevamo. Quindi $K = \mathbb{N}$ e la (4) è dimostrata.

Proviamo la (3). Come prima, poniamo:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\ n\ (n+1)\ (2n+1) \right\}$$

e notiamo che provare la validità di (3) per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ equivale a dimostrare che $K = \mathbb{N} - \{0\}$, cosa che faremo usando il PIM.
Evidentemente $1 \in K$ e ciò costituisce una buona *base per l'induzione*.
Per il *passo induttivo*, mostriamo che da $n \in K$, ossia dall'uguaglianza $1^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, segue che anche $n+1 \in K$, cioè che $1^2+\cdots+(n+2)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
1^2+\cdots+(n+1)^2 &= \underbrace{1^2+\cdots+n^2}_{=\frac{1}{6}\ n\ (n+1)\ (2n+1)} +(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}\ n\ (n+1)\ (2n+1) + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\ \left[\frac{n\ (2n+1)}{6} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)\ \frac{n\ (2n+1) + 6(n+1)}{6} \\
&= (n+1)\ \frac{2n^2+7n+6}{6} \\
&= (n+1)\ \frac{2n^2+4n+3n+6}{6} \\
&= (n+1)\ \frac{2n(n+2)+3(n+2)}{6} \\
&= (n+1)\ \frac{(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

come volevamo. Perciò $K = \mathbb{N} - \{0\}$ e la (4) è dimostrata.

Proviamo la (4). Come sopra, posto:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ 1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}\ n\ (n+1)\right)^2 \right\},$$

osserviamo che dimostrare valida la (4) per ogni naturale $n \geq 1$ è del tutto equivalente a provare che $K = \mathbb{N} - \{0\}$, cosa che possiamo fare usando il PIM.
Evidentemente $1 \in K$ e questo costituisce una buona *base per l'induzione*.

Per il *passo induttivo*, proviamo che dall'*ipotesi induttiva* $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$, ossia da $n \in K$, segue necessariamente la *tesi induttiva* $1^3+\cdots+(n+1)^3 = \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2$, ovvero che $n+1 \in K$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
1^3+\cdots+(n+1)^3 &= \underbrace{1^3+\cdots+n^3}_{=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2}+(n+1)^3 \\
&= \left(\frac{1}{2}\ n\ (n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}\ n^2\ (n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\ \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2\ \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2\ \frac{(n+2)^2}{4}\ ,
\end{aligned}$$

che è quanto volevamo. Pertanto $K = \mathbb{N} - \{0\}$ e la (4) è dimostrata. □

Soluzione dell'`Esercizio 3`. La (5) è vera per $n=0$ ed $n=1$, poiché in tal caso essa si riduce alle identità:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1-q}{1-q}\ , \\
1+q &= \frac{1-q^2}{1-q}\ ;
\end{aligned}$$

ciò costituisce una buona *base per l'induzione*.
Per il *passo induttivo*, mostriamo che dall'*ipotesi induttiva* $1+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ segue necessariamente la *tesi induttiva* $1+\cdots+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
1+\cdots+q^{n+1} &= \underbrace{1+\cdots+q^n}_{=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}+q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

come volevamo. Pertanto la validità della (5) rimane provata per induzione. □

Soluzione dell'`Esercizio 4`. *Dimostriamo la* (6). Dobbiamo far vedere che l'insieme:

$$\begin{aligned}
K = \Big\{ n \in \mathbb{N} - \{0\} :\ &\forall x_1, \cdots, x_n \geq -1 \text{ aventi ugual segno}, \\
&(1+x_1)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+\cdots+x_n \Big\}
\end{aligned}$$

coincide con $\mathbb{N} - \{0\}$; perciò usiamo il PIM.
Evidentemente $1 \in K$: infatti, per $n=1$, comunque si fissi $x_1 \geq -1$ si ottiene la disuguaglianza:

$$1+x_1 \geq 1+x_1\ ,$$

la quale è vera (proprietà riflessiva di $\leq$). Ciò è una buona *base per l'induzione.*
Il *passo induttivo* chiede di dimostrare che da $n \in K$, ossia da:

$$\forall x_1, \cdots, x_n \geq -1 \text{ d'ugual segno}, \ (1+x_1)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_n \ ,$$

segue necessariamente $n+1 \in K$, cioè:

$$\forall x_1, \cdots, x_{n+1} \geq -1 \text{ d'ugual segno}, \ (1+x_1)\cdots(1+x_{n+1}) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_{n+1} \ .$$

Fissiamo ad arbitrio $n+1$ numeri $x_1, \cdots, x_{n+1} \geq -1$ d'ugual segno: essendo gli $x_1, \cdots, x_{n+1}$ o tutti ≥ 0 o tutti ≤ 0, il prodotto $x_{n+1}\ (x_1 + \cdots + x_n)$ è ≥ 0, quindi usando l'*ipotesi induttiva* troviamo:

$$\begin{aligned}
(1+x_1)\cdots(1+x_{n+1}) &= \underbrace{(1+x_1)\cdots(1+x_n)}_{\geq 1+x_1+\cdots+x_n}\ (1+x_{n+1}) \\
&\geq (1+x_1+\cdots+x_n)\ (1+x_{n+1}) \\
&= (1+x_1+\cdots+x_n)\ 1 + (1+x_1+\cdots+x_n)\ x_{n+1} \\
&= 1 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \\
&\quad + \underbrace{x_{n+1}\ (x_1+\cdots+x_n)}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \ ;
\end{aligned}$$

per la transititvità di $\geq$ la *tesi induttiva* segue, e con essa la validità della (6).

Dimostriamo la (7). Fissato $n \in \mathbb{N}$, nella (6) possiamo fissare $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x \geq -1$ ed ottenere:

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{n \text{ fattori}} \geq 1 + \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ addendi}} = 1 + n\ x$$

che è la disuguaglianza desiderata.[5]

Troviamo un controesempio. Basta prendere, ad esempio, $n = 2$, $x_1 = 1$ ed $x_2 = -1/2$ per ottenere da (6) una disuguaglianza falsa. □

Soluzione dell'`Esercizio` 5. *Dimostriamo la* (8). Occorre e basta far vedere che l'insieme:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} - \{0\} : \ \forall 0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1, \ (1-x_1)\cdots(1-x_n) \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots x_n} \right\}$$

coincide con $\mathbb{N} - \{0\}$: pertanto useremo il Principio d'Induzione.
Per verificare che $1 \in K$ dobbiamo mostrare che vale la seguente proposizione:

$$\forall 0 \leq x_1 \leq 1, \ 1 - x_1 < \frac{1}{1+x_1} \ .$$

A tal uopo, fissiamo ad arbitrio un numero x_1 in modo che soddisfi $0 \leq x_1 \leq 1$: dalle disuguaglianze appena scritte segue che $0 \leq x_1^2 \leq 1$ e dunque che $-1 \leq -x_1^2 \leq 0$, per cui:

$$0 \leq 1 - x_1^2 \leq 1 \ ;$$

dalla fattorizzazione $1 - x_1^2 = (1-x_1)(1+x_1)$, dalla positività del numero $1 + x_1$ e dalla compatibilità della relazione d'ordine con il prodotto segue che:

$$(1-x_1)(1+x_1) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - x_1 \leq \frac{1}{1+x_1} \ ,$$

[5] Il lettore volenteroso potrebbe fornire una dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli basata anch'essa sul PIM che non sfrutti la (6).

come volevamo. Stante l'arbitrarietà nella scelta di x_1, possiamo ben dire che il numero $n = 1$ gode della proprietà che esprime l'appartenenza a K, perciò $1 \in K$: ciò costituisce una buona *base per l'induzione*.
Per mostrare il *passo induttivo* dobbiamo provare che il verificarsi per n della proprietà:

$$\forall 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1,\ (1 - x_1) \cdots (1 - x_n) \leq \frac{1}{1 + x_1 + \cdots + x_n}$$

(*ipotesi induttiva*) implica il verificarsi per $n + 1$ della proprietà:

$$\forall 0 \leq x_1, \dots, x_{n+1} \leq 1,\ (1 - x_1) \cdots (1 - x_{n+1}) \leq \frac{1}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}}$$

(*tesi induttiva*). Fissati ad arbitrio $n + 1$ numeri $x_1, \dots, x_{n+1}$ soddisfacenti le disuguaglianze $0 \leq x_1, \dots, x_{n+1} \leq 1$ abbiamo:

$$\begin{aligned}(1 - x_1) \cdots (1 - x_{n+1}) &= \underbrace{(1 - x_1) \cdots (1 - x_n)}_{\leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}} (1 - x_{n+1}) \\ &\leq \frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_1 + \cdots + x_n}\ ,\end{aligned}$$

e ciò importa che basta provare la maggiorazione:

$$\frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_1 + \cdots + x_n} \leq \frac{1}{1 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}}$$

per concludere (difatti, se la precedente fosse valida, avremmo $(1 - x_1) \cdots (1 - x_{n+1}) \leq \frac{1 - x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}$, da cui la tesi induttiva per la proprietà transitiva della disuguaglianza). Ma, tenendo presente che $0 \leq x_1, \dots, x_{n+1} \leq 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}1 \geq \frac{1}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}} \quad &\Rightarrow \quad x_{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad -x_{n+1} \leq -\frac{x_{n+1}}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad 1 - x_{n+1} \leq 1 - \frac{x_{n+1}}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad 1 - x_{n+1} \leq \frac{1 + x_1 + \cdots + x_n + \cancel{x_{n+1}} - \cancel{x_{n+1}}}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad 1 - x_{n+1} \leq \frac{1 + x_1 + \cdots + x_n}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_1 + \cdots + x_n} \leq \frac{1}{1 + x_1 + \cdots + x_{n+1}}\end{aligned}$$

come volevamo. Pertanto il Principio d'Induzione implica che $K = \mathbb{N} - \{0\}$, ossia che la (8) vale per ogni numero naturale $n \geq 1$.

Dimostriamo la (9). Facendo nella (8) $x_1 = \cdots = x_n = x$, con $0 \leq x \leq 1$, troviamo che la disuguaglianza:

$$(1 - x)^n = \underbrace{(1 - x) \cdots (1 - x)}_{n \text{ volte}} \leq \frac{1}{1 + \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ addendi}}} = \frac{1}{1 - n\, x}$$

vale per ogni indice n, come era chiesto.

La disuguaglianza è stretta. Il fatto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, in (9) valga la disuguaglianza stretta $<$ non appena si scelga $0 < x < 1$ può essere ottenuto più facilmente modificando la dimostrazione appena data. □

Soluzione dell'`Esercizio` 6. Per dimostrare l'asserto basta far vedere che l'insieme:
$$K := \{n \in \mathbb{N} - \{0\} : \text{ogni sottoinsieme di } \mathbb{R} \text{ avente } n \text{ elementi ha minimo e massimo}\}$$
coincide con tutto $\mathbb{N} - \{0\}$ e, per fare ciò, usiamo il PIM.
Innanzitutto, notiamo che $1 \in K$: infatti, se X è un generico sottoinsieme di $\mathbb{R}$ formato da un unico elemento (cioè se $X = \{x_1\}$ per qualche $x_1 \in \mathbb{R}$) allora X ha necessariamente minimo e massimo (perchè $\min X = x_1 = \max X$).
Inoltre, osserviamo che la totalità della relazione d'ordine $\leq$ ci consente di affermare che anche $2 \in K$: invero, se X è il generico insieme costituito da due elementi distinti, ossia se $X = \{x_1, x_2\}$, allora è vera una ed una soltanto delle relazioni $x_1 < x_2$ oppure $x_2 < x_1$; nel primo caso abbiamo $\min X = x_1$ e $\max X = x_2$, mentre nel secondo troviamo $\min X = x_2$ e $\max X = x_1$; dunque, in ogni caso X è dotato di minimo e massimo.
Il fatto che $1, 2 \in K$ costituisce una buona *base per l'induzione*.
Per dimostrare il *passo induttivo* dobbiamo provare che la condizione $n \in K$ implica $n+1 \in K$, ossia che l'*ipotesi induttiva*:

ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ avente n elementi ha minimo e massimo

implica la *tesi induttiva*:

ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ avente $n+1$ elementi ha minimo e massimo.

Sia dunque $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme contenente $n+1$ elementi: in tal caso, possiamo scrivere $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, ove $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $\ldots$,$x_{n+1} = f(n+1)$ sono numeri reali tutti distinti ed $f : \{1, \ldots, n+1\} \to X$ è una biiezione (la cui esistenza segue dalla definizione di insieme finito). Posto:
$$X' := X - \{x_{n+1}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} ,$$
possiamo ben dire che X' è un insieme finito con n elementi (la biiezione di $\{1, \ldots, n\}$ in X è la f' che assegna $f'(k) = f(k)$ ad ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$) e che risulta:
$$X = X' \cup \{x_{n+1}\} \quad \text{e} \quad X' \cap \{x_{n+1}\} = \varnothing .$$
Per ipotesi induttiva, X' è dotato di minimo e di massimo, cosicché esistono due indici $\overline{k}, \underline{k} \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $\max X' = x_{\overline{k}}$ e $\min X' = x_{\underline{k}}$, cioè tali che:
$$x_{\underline{k}} \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq x_{\overline{k}} .$$
Pertanto, tornando all'insieme X, i casi possibili sono tre:

(1) se $x_{\underline{k}} < x_{n+1} < x_{\overline{k}}$, allora $\min X = x_{\underline{k}}$ e $\max X = x_{\overline{k}}$;

(2) se $x_{n+1} < x_{\underline{k}}$, allora $\min X = x_{n+1}$ e $\max X = x_{\overline{k}}$;

(3) se $x_{\overline{k}} < x_{n+1}$, allora $\min X = x_{\underline{k}}$ e $\max X = x_{n+1}$;

da ciò segue che, in ogni caso, X è dotato di minimo e massimo.
Dall'arbitrarietà nella scelta di X tra gli insiemi finiti con $n+1$ elementi segue che la tesi induttiva è certamente vera quando tale è l'ipotesi induttiva, perciò $K = \mathbb{N}$. $\square$

4. Soluzioni dei Problemi

Soluzione del `Problema` 1. Per comodità, chiamiamo $P(n)$ il prodotto in (10), i.e. poniamo:
$$P(n) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) .$$

Facendo un po' di conto, troviamo:

$$\begin{aligned}
P(0) &= \left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\\
P(1) &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\ \left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}\\
P(2) &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\ \left(1-\frac{1}{9}\right)\ \left(1-\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{8}\\
P(3) &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\ \left(1-\frac{1}{9}\right)\ \left(1-\frac{1}{16}\right)\ \left(1-\frac{1}{25}\right) = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

e la sequenza di valori:

$$\begin{aligned}
0 &\mapsto \frac{3}{4}\\
1 &\mapsto \frac{2}{3}\\
2 &\mapsto \frac{5}{8}\\
3 &\mapsto \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

non sembrerebbe mostrare alcuna regolarità[6]... Tuttavia, riscrivendo i termini di posto dispari con frazioni non ridotte ai minimi termini:

$$\begin{aligned}
0 &\mapsto \frac{3}{4}\\
1 &\mapsto \frac{4}{6}\\
2 &\mapsto \frac{5}{8}\\
3 &\mapsto \frac{6}{10}
\end{aligned}$$

ci accorgiamo di una certa regolarità nell'andamento di numeratori e denominatori: invero, i numeratori 3, 4, 5 e 6 si ricavano dagli indici 0, 1, 2 e 3 sommando 3 (e.g., $5 = 2 + 3$), mentre i denominatori 4, 6, 8 e 10 si ricavano dagli indici 0, 1, 2 e 3 sommandovi 2 e moltiplicando per 2 (e.g., $10 = 2 \cdot (3 + 2)$). Pertanto la formula:

$$P(n) = \frac{n+3}{2\ (n+2)} \tag{21}$$

vale per $n = 1, 2, 3, 4$ e possiamo **congetturare** che essa sia, in effetti, valida per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Mostriamo che la nostra congettura è vera: per fare ciò occorre e basta dimostrare che l'insieme:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ P(n) = \frac{n+3}{2\ (n+2)} \right\}\ ,$$

costituito da tutti i numeri naturali per cui vale la (21), coincide con $\mathbb{N}$.

Per quanto calcolato all'inizio, abbiamo $0, 1, 2, 3 \in K$ e ciò serve da ottima *base per l'induzione.*

Per il *passo induttivo*, dobbiamo mostrare che l'essere $P(n) = \frac{n+3}{2\ (n+2)}$ (ossia $n \in K$)

[6] Infatti, i numeratori ed i denominatori prima diminuiscono, poi aumentano, poi diminuiscono di nuovo...

implica l'essere $P(n+1) = \frac{n+4}{2\ (n+3)}$ (cioè $n+1 \in K$). Abbiamo:

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+3)^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)\ \left(1 - \frac{1}{(n+3)^2}\right) \\
&= \underbrace{P(n)}_{=\frac{n+3}{2(n+2)}}\ \left(1 - \frac{1}{(n+3)^2}\right) \\
&= \frac{\cancel{n+3}}{2\ (n+2)}\ \frac{(n+3)^2 - 1}{(n+3)^{\cancel{2}}} \\
&= \frac{1}{2\ (n+2)}\ \frac{\big((n+3)-1\big)\ \big((n+3)+1\big)}{n+3} \\
&= \frac{1}{2\ \cancel{(n+2)}}\ \frac{\cancel{(n+2)}\ (n+4)}{n+3} \\
&= \frac{n+4}{2\ (n+3)}
\end{aligned}$$

come volevamo. Perciò $K = \mathbb{N}$ e la (21) vale come formula per esprimere ogni prodotto $P(n)$. □

Soluzione del `Problema` 2. Facendo un po' di calcoli, dalla (11) segue che:

$$\begin{aligned}
a(0) &= \alpha \\
a(1) &= \alpha + d \\
a(2) &= \alpha + 2\ d \\
a(3) &= \alpha + 3\ d\ ;
\end{aligned}$$

nei secondi membri notiamo una certa regolarità: infatti, i primi addendi non cambiano (rimanendo sempre uguali ad α), mentre nei secondi addendi i coefficienti 0, 1, 2 e 3 di d sono uguali agli indici 0, 1, 2 e 3.
Pertanto la formula:

$$a(n) = \alpha + n\ d \tag{22}$$

è certamente valida per $n = 0, 1, 2, 3$ e possiamo ragionevolmente **congetturare** che essa valga per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Per provare la nostra congettura occorre e basta provare che l'insieme:

$$K = \{n \in \mathbb{N} :\ a(n) = \alpha + n\ d\}$$

coincide con tutto $\mathbb{N}$: perciò ragioniamo per induzione.
Chiaramente, il fatto che la (22) valga per $n = 0, 1, 2, 3$ ci dice che $0, 1, 2, 3 \in K$: ciò costituisce una buona *base per l'induzione*.
Dobbiamo ora mostrare il *passo induttivo* e cioè che dall'ipotesi $a(n) = \alpha + nd$ (equivalente a $n \in K$) segue necessariamente $a(n+1) = \alpha + (n+1)\ d$ (ossia $n+1 \in K$). Usando la ricorrenza (11) abbiamo:

$$\begin{aligned}
a(n+1) &= \underbrace{a(n)}_{=\alpha+nd} + d \\
&= \alpha + n\ d + d \\
&= \alpha + (n+1)\ d
\end{aligned}$$

come volevamo. Pertanto $K = \mathbb{N}$ e la formula *esplicita* (22) vale per ogni n.

Analogamente, con un po' d'algebra, dalla (12) segue che:

$$\begin{aligned}
b(0) &= \beta \\
b(1) &= \beta\, q \\
b(2) &= \beta\, q^2 \\
b(3) &= \beta\, q^3 \;;
\end{aligned}$$

nei secondi membri notiamo una certa regolarità: infatti, mentre i primi fattori rimangono sempre gli stessi (ed uguali a β), gli esponenti delle potenze di q che figurano come secondi fattori, cioè q^0, q^1, q^2 e q^3, sono uguali agli indici 0, 1, 2 e 3. Conseguentemente la formula:

$$b(n) = \beta\, q^n \tag{23}$$

vale per $n = 0, 1, 2, 3$ e possiamo ragionevolmente **congetturare** che essa valga in generale per ogni n.
La dimostrazione per induzione della (23) è lasciata al lettore. □

Soluzione del `Problema 3`. **1**. Innanzitutto, calcoliamo i primi valori assunti dalla funzione a definita dalla ricorrenza (13):

$$\begin{aligned}
a(0) &= \frac{1}{2} \\
a(1) &= \frac{2}{3} \\
a(2) &= \frac{3}{4} \\
a(3) &= \frac{4}{5} \;;
\end{aligned}$$

dai conti appena fatti segue che le proprietà espresse dalle (14), (15) e (16) sono certamente verificate per $n = 0, 1, 2, 3$; ciò fornisce un'ottima *base per l'induzione* per la dimostrazione di tutte e tre tali proprietà.
Rimangono, quindi, da provare i *passi induttivi*...

Cominciamo a provare che dall'*ipotesi induttiva* $a(n) < 1$ segue la *tesi induttiva* $a(n+1) < 1$. Dato che $a(n) < 1$ implica $2 - a(n) > 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
a(n+1) &= \frac{1}{\underbrace{2 - a(n)}_{>1}} \\
&< \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

da cui l'asserto. Pertanto, il Principio d'Induzione garantisce che la (14) vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passiamo adesso a provare che l'*ipotesi induttiva* $a(n) \geq \frac{1}{2}$ implica la *tesi induttiva* $a(n+1) \geq \frac{1}{2}$. Dato che $a(n) \geq \frac{1}{2}$ implica che $2 - a(n) \leq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, troviamo:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \frac{1}{\underbrace{2 - a(n)}_{\leq \frac{3}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

da cui la tesi. Perciò, invocando il Principio d'Induzione concludiamo che la (15) è valida per tutti i naturali n.

Infine, proviamo che dall'*ipotesi induttiva* $a(n+1) > a(n)$ segue la *tesi induttiva* $a(n+2) > a(n+1)$. Poiché da $a(n+1) > a(n)$ segue $2 - a(n+1) < 2 - a(n)$ e dalla (15) segue $2 - a(n), 2 - a(n+1) > 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} a(n+2) &= \frac{1}{\underbrace{2 - a(n+1)}_{<2-a(n)}} \\ &> \frac{1}{2 - a(n)} \\ &= a(n+1) \end{aligned}$$

come volevamo. Quindi il PIM assicura la validità della (16) per ogni indice n.

2. Dai calcoli effettuati all'inizio della *Soluzione* segue che la formula *esplicita*:

$$a(n) = \frac{n+1}{n+2} \tag{24}$$

vale per $n = 0, 1, 2, 3$; pertanto possiamo ragionevolmente **congetturare** che essa valga del tutto in generale.
Per provare tale congettura, procediamo per induzione.
Essendo la *base dell'induzione* già abbondantemente acquisita, passiamo direttamente al *passo induttivo*, cioè mostriamo che dall'*ipotesi induttiva* $a(n) = \frac{n+1}{n+2}$ segue la *tesi induttiva* $a(n+1) = \frac{n+2}{n+3}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \frac{1}{2 - \underbrace{a(n)}_{=\frac{n+1}{n+2}}} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{n+1}{n+2}} \\ &= \frac{n+2}{2(n+2) - n - 1} \\ &= \frac{n+2}{n+3} \end{aligned}$$

come volevamo; perciò il Principio d'Induzione assicura che il *guess* $a(n) = \frac{n+1}{n+2}$ vale per ogni numero $n \in \mathbb{N}$.

3. Notiamo innanzitutto che la (16) assicura che la successione (a_n) è strettamente crescente, giacché per ogni indice $n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$a_{n+1} = a(n+1) > a(n) = a_n \; ;$$

conseguentemente, il *Criterio di Regolarità delle Successioni Monotòne* assicura che (a_n) è dotata di limite e che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \; .$$

Le (14) e (15), d'altro canto, assicurano che $\frac{1}{2} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq 1$, cosicché l'estremo superiore di (a_n) è un numero reale $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \; .$$

Per calcolare l'esatto valore del limite a usiamo la ricorrenza (13): ricordato che, per un notevole risultato della teoria, la successione (a_{n+1}) (estratta da (a_n) sopprimendone il primo termine) ha lo stesso carattere e lo stesso limite di (a_n), possiamo passare al limite ambo i membri della ricorrenza (13) e trovare:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2-a_n} \\ &= \frac{1}{2-a} \; , \end{aligned}$$

cosicché il numero a è una soluzione dell'equazione fratta $a = \frac{1}{2-a}$ che appartiene all'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$.
L'equazione appena determinata è equivalente all'equazione $(a-1)^2 = 0$ che ha come unica soluzione $a = 1$; dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \; .$$[7]

□

Soluzione del `Problema` 4. **1**. La funzione:

$$\begin{cases} a(0) = \alpha \\ a(n+1) = \frac{1}{2}\, a(n) + \frac{\alpha}{2\, a(n)} & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

[7] Al risultato si poteva certamente trovare usando direttamente la legge di assegnazione determinata al punto **2**: infatti, con semplici passaggi avremmo avuto:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \; .$$

Perciò il metodo proposto al punto **3** potrebbe sembrare inutilmente complicato… Tuttavia, è bene notare che nella maggior parte dei casi è *impossibile* determinare esplicitamente la legge di assegnazione di una successione definita per ricorrenza (cfr. `Problema` 4 seguente): pertanto il metodo proposto in **3** rappresenta una valida alternativa che consente di ovviare a questo inconveniente.

Innanzitutto, proviamo a calcolare i primi valori assunti dalla funzione a: abbiamo:

$$\begin{aligned}
a(0) &= \alpha \\
a(1) &= \frac{\alpha+1}{2} \\
a(2) &= \frac{\alpha^2+6\alpha+1}{4(\alpha+1)} \\
a(3) &= \frac{\alpha^4+28\alpha^3+70\alpha^2+28\alpha+1}{16(\alpha+1)(\alpha^2+6\alpha+1)}
\end{aligned}$$

e da ciò notiamo che, pur essendoci alcune regolarità nelle espressioni esplicite di $a(0), \ldots, a(3)$, esse sono di difficile interpretazione.
Dunque non è possibile individuare un'espressione esplicita per la $a(n)$ che risulti utile nei calcoli.

Proviamo la (18). Chiaramente $a(0) = \alpha$ soddisfa le (18) e ciò costituisce una buona *base per l'induzione.*
Verifichiamo il passo induttivo, provando che l'*ipotesi induttiva* $\min\{1, \alpha\} \leq a(n) \leq \max\{1, \alpha\}$ implica la *tesi induttiva* $\min\{1, \alpha\} \leq a(n+1) \leq \max\{1, \alpha\}$. Supponiamo, tanto per cominciare, che $\alpha \geq 1$; in tal caso si ha $\min\{1, \alpha\} = \alpha$, $\max\{1, \alpha\} = 1$, quindi:

$$\begin{aligned}
1 \leq a(n) \leq \alpha \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{a(n)} \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2\alpha} \leq \frac{1}{2a(n)} \leq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{\alpha}{2a(n)} \leq \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

ed anche $\frac{1}{2} \leq \frac{a(n)}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$, da cui, sommando membro a membro, otteniamo:

$$1 \leq \underbrace{\frac{a(n)}{2} + \frac{\alpha}{2a(n)}}_{=a(n+1)} \leq \alpha \; ,$$

che è la tesi.
Se $\alpha < 1$ si può ripetere lo stesso ragionamento invertendo le disuguaglianze.

Proviamo la (19). Per $n = 1$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
a(1) - \sqrt{\alpha} &= \frac{a(1)}{2} + \frac{\alpha}{2a(1)} - \sqrt{\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha} - \sqrt{\alpha} \\
&= \frac{(\alpha - \sqrt{\alpha})^2}{2\alpha} \geq 0
\end{aligned}$$

cosicché $a(2) \geq \sqrt{\alpha}$ e ciò costituisce una buona *base per l'induzione.*
Verifichiamo che la validità della (19) per un certo indice $n \geq 1$ implica la validità della stessa per $n + 1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
a(n+1) - \sqrt{\alpha} &= \frac{a(n)}{2} + \frac{\alpha}{2a(n)} - \sqrt{\alpha} \\
&= \frac{(a(n) - \sqrt{\alpha})^2}{2a(n)} \geq 0
\end{aligned}$$

come volevamo.

Proviamo la (20). Per ogni fissato $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} a(n+1) - a(n) &= \frac{a(n)}{2} + \frac{\alpha}{2a(n)} - a(n) \\ &= \frac{\alpha - a^2(n)}{2a(n)} \ ; \end{aligned}$$

se $n \geq 1$ per la (19) abbiamo $a(n) \geq \sqrt{\alpha}$ e ciò implica $a(n+1) - a(n) \leq 0$, che è la (20).

2. Per le (18) ed (20), la successione di termine generale $a_n = a(n)$ è monotòna e limitata; conseguentemente, il *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne* implica che (a_n) è convergente verso un valore $a \in \mathbb{R}$. D'altra parte, le (19) ed il *Teorema della Permanenza del Segno Inverso* assicurano che $0 < \min\{1, \alpha\} \leq a \leq \max\{1, \alpha\}$.
Dato che da (a_n) si estraggono solo successioni convergenti ed aventi lo stesso limite, la successione di termine generale (a_{n+1}) è anch'essa convergente verso a.
Passando al limite ambo i membri della ricorrenza si trova:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} + \frac{\alpha}{2a_n} = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{2a}$$

cosicché il valore a è una soluzione positiva dell'equazione:

$$a = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \alpha$$

perciò $a = \sqrt{\alpha}$. □

Soluzione del `Problema` 5. Ragioniamo *per assurdo*, supponendo che il Principio del Buon Ordinamento non sia vero, cioè che esista un sottoinsieme non vuoto $T \subseteq \mathbb{N}$ non dotato di minimo.
In tal caso $0 \notin T$, perché altrimenti 0 sarebbe certamente il minimo di T[8]; ciò implica che:

$$\forall t \in T,\ 0 < t$$

perciò l'insieme dei minoranti "stretti" di T:

$$K = \{n \in \mathbb{N} :\ \forall t \in T,\ n < t\}$$

è non vuoto ed, in particolare, $0 \in K$.
Sia ora $n \in K$ e mostriamo che $n+1 \in K$. Se, *per assurdo*, non fosse $n+1 \in K$, esisterebbe un $\tau \in T$ tale che $n+1 \not< \tau$ e ciò, per il Principio di Tricotomia, implicherebbe $\tau \leq n+1$; poiché T non è dotato di minimo, esisterebbe certamente un numero $\vartheta \in T$ più piccolo di τ, sicché risulta:

$$\vartheta < \tau \leq n+1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta < n+1 \ ;$$

d'altro canto, dato che $n \in K$ per *ipotesi induttiva*, si ha $n < \vartheta$ e dunque il numero ϑ soddisferebbe la catena di disuguaglianze:

$$n < \vartheta < n+1 \ ;$$

ma ciò è assurdo, poiché è ben noto che tra i due numeri naturali consecutivi n ed $n+1$ non è compreso alcun altro numero naturale!
Conseguentemente, dall'*ipotesi induttiva* $n \in K$ segue necessariamente $n+1 \in K$ ed il Principio d'Induzione ci consente di affermare che $K = \mathbb{N}$.
Ma ciò è assurdo: infatti, essendo T non vuoto, possiamo scegliere almeno un elemento $\Theta \in T$; dato che $K = \mathbb{N}$ si avrebbe $\Theta \in K$ e dunque $\Theta < \Theta$, contro il

[8] Si ricordi che 0 è il numero naturale più piccolo!

Principio di Tricotomia!

Ne consegue che, non appena T è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, non può in alcun modo presentarsi l'eventualità che esso sia privo di minimo, e ciò implica la validità del PRINCIPIO DEL BUON ORDINAMENTO. □

Soluzione del `Problema` 7. Cominciamo ad esaminare la questione partendo da insiemi con "pochi" elementi.
Ad esempio, se X è costituito da un solo elemento, cioè se $X = \{x_1\}$, allora i sottoinsiemi di X sono:

$$\begin{aligned} &\varnothing, \\ &\{x_1\} \end{aligned} \tag{25}$$

dunque $|\mathcal{P}(X)| = 2$.
Se, invece, X è costituito da due elementi, cioè se $X = \{x_1, x_2\}$, allora i sottoinsiemi di X sono:

$$\begin{aligned} &\varnothing, \\ &\{x_1\},\ \{x_2\}, \\ &\{x_1, x_2\}, \end{aligned} \tag{26}$$

perciò $|\mathcal{P}(X)| = 4$.
Quando X ha tre elementi, ossia quando $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, allora i sottoinsiemi di X sono:

$$\begin{aligned} &\varnothing, \\ &\{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\}, \\ &\{x_1, x_2\},\ \{x_1, x_3\},\ \{x_2, x_3\}, \\ &\{x_1, x_2, x_3\}, \end{aligned} \tag{27}$$

cosicché $|\mathcal{P}(X)| = 8$.
Infine, quando X ha quattro elementi, cioè quando $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, allora i sottoinsiemi di X sono:

$$\begin{aligned} &\varnothing, \\ &\{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_4\} \\ &\{x_1, x_2\},\ \{x_1, x_3\},\ \{x_1, x_4\},\ \{x_2, x_3\},\ \{x_2, x_4\},\ \{x_3, x_4\}, \\ &\{x_1, x_2, x_3\},\ \{x_1, x_2, x_4\},\ \{x_1, x_3, x_4\},\ \{x_2, x_3, x_4\}, \\ &\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \end{aligned} \tag{28}$$

cosicché $|\mathcal{P}(X)| = 16$.
Riassumendo in uno schema quano trovato:

$$\begin{aligned} |X| = 1 &\mapsto |\mathcal{P}(X)| = 2 \\ |X| = 2 &\mapsto |\mathcal{P}(X)| = 4 \\ |X| = 3 &\mapsto |\mathcal{P}(X)| = 8 \\ |X| = 4 &\mapsto |\mathcal{P}(X)| = 16\ , \end{aligned}$$

ci accorgiamo di una certa regolarità: invero, essendo $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$, possiamo scrivere $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Pertanto, possiamo **congetturare** che la relazione:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}\ , \tag{29}$$

valida per $n = 1, 2, 3, 4$, rimanga valida del tutto in generale per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
Per provare vera la nostra congettura, occorre e basta mostrare che l'insieme:

$$K := \{n \in \mathbb{N} - \{0\} :\ \text{ogni insieme di } n \text{ elementi ha } 2^n \text{ sottoinsiemi}\}$$

coincide con $\mathbb{N} - \{0\}$.
Per quanto visto all'inizio, abbiamo $1, 2, 3, 4 \in K$ e ciò costituisce un'ottima *base per l'induzione*.
Per acquisire il *passo induttivo* dobbiamo mostrare che se $n \in K$ allora anche $n + 1 \in K$, ossia che assunta l'*ipotesi induttiva*:

$$\text{ogni insieme di } n \text{ elementi ha } 2^n \text{ sottoinsiemi}$$

risulta vera anche la *tesi induttiva*:

$$\text{ogni insieme di } n+1 \text{ elementi ha } 2^{n+1} \text{ sottoinsiemi.}$$

Fissiamo allora un generico insieme finito X avente $n + 1$ elementi, ossia $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$; procedendo come nell'`Esercizio` 6 poniamo:

$$X' := X - \{x_{n+1}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} ,$$

di modo che $X = X' \cup \{x_{n+1}\}$, $X' \cap \{x_{n+1}\} = \varnothing$ e X' è finito ed ha n elementi.
Per ipotesi induttiva X' ha esattamente 2^n sottoinsiemi e, dato che, $X' \subset X$, tali sottoinsiemi sono anche sottoinsiemi di X; ne consegue che X ha sicuramente almeno 2^n sottoinsiemi.
Tuttavia, è immediato constatare che i sottoinsiemi di X' non esauriscono *tutti* i sottoinsiemi di X: infatti, nessun sottoinsieme di X' contiene x_{n+1} (che pure è un elemento di X!).
Pertanto, per completare il conto dei sottoinsiemi di X ci basta trovare quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono l'elemento x_{n+1} escluso dal computo precedente.
Confrontando la lista (26) con (25), la (27) con (26) e la (28) con (27), possiamo ben dire che ogni sottoinsieme di X contenente l'elemento x_{n+1} si può ottenere unendo ad un opportuno sottoinsieme di X' l'insieme $\{x_{n+1}\}$: ad esempio, l'insieme $\{x_{n+1}\}$ si ottiene mediante l'unione $\varnothing \cup \{x_{n+1}\}$, e l'insieme $\{x_1, x_{n+1}\}$ si ottiene come $\{x_1\} \cup \{x_{n+1}\}$. Conseguentemente, i sottoinsiemi di X che contengono l'elemento x_{n+1} sono tanti quanti i sottoinsiemi di X', cioè 2^n.
Ne viene che il numero di sottoinsiemi di X si ottiene raddoppiando il numero di sottoinsiemi di X', cioè che:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(X')| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} .$$

L'arbitrarietà nella scelta di X tra gli insiemi finiti con $n + 1$ elementi ci assicura che il ragionamento ora condotto è ripetibile per ogni insieme di tal fatta; pertanto $n + 1 \in K$.
Per il PIM abbiamo $K = \mathbb{N}$ e ciò conclude la dimostrazione, provando che il *guess* (29) è valido del tutto in generale. □

Soluzione del `Problema` 7. Il ragionamento è minato (irrimediabilmente!) dal seguente errore: il *passo induttivo* nella dimostrazione della proposizione $\mathcal{P}(n)$ non funziona per $n = 1$. Infatti, la tecnica usata per la dimostrazione non si applica ad insiemi del tipo $G = \{g_1, g_2\}$, cioè ad insiemi formati da due soli gatti. □

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: `guglielmo.dimeglio@unina.it`