QUALCHE ESERCIZIO SUI DOMINI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI E SULLE FUNZIONI DEFINITE PER CASI

G. DI MEGLIO

1. Esercizi

`Esercizio 1:` Determinare il dominio delle seguenti funzioni elementari:

$$F(x) = \frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\cos^2 x + 2\cos x + 1\right)}}{1 + \log^2\left(5^{\sqrt{2}+2\sin x} - 1\right)} \tag{1}$$

$$F(x) = \log_2\left(\frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1}\right) \tag{2}$$

$$F(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\cos^2 x + 2\cos x + 1\right)}\ \arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2} - \sin x}\right) \tag{3}$$

$$F(x) = \left(\frac{x^2 - \sin x^2}{\mathbf{e}^{2x} - 4\mathbf{e}^x + 3}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5}} \quad [1] \tag{4}$$

$$F(x) = \log_{10}\left(\arccos\frac{x-1}{x+2} - \arccos\frac{x+1}{x-2}\right) \tag{5}$$

$$F(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{4-x}}\right) \tag{6}$$

$$F(x) = \left(\sqrt[3]{x^3 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{\sqrt{2}} \tag{7}$$

`Esercizio 2:` Determinare il dominio ed esplicitare le leggi di assegnazione delle seguenti funzioni distinguendo opportunamente i casi:

$$F(x) = \left|\frac{x^2 - 16}{x^3 + 27}\right| \tag{8}$$

$$F(x) = x + \frac{1}{|x-2|} \tag{9}$$

$$F(x) = \left|x^2 - 2|x| - 3\right| \tag{10}$$

$$F(x) = \max\left\{\log(x^2 - 1), 2\right\} \tag{11}$$

$$F(x) = \min\left\{\sin x, \cos x\right\} \tag{12}$$

$$F(x) = \arcsin(\sin x) \quad [2] \tag{13}$$

Date: 29 dicembre 2017.

[1] Si tenga presente che per ogni $y \geq 0$ vale la disuguaglianza $\sin y \leq y$.

[2] Si tenga presente che arcsin è la funzione inversa del sin solo *limitatamente all'intervallo* $[-\pi/2, \pi/2]$, intervallo in cui sin è strettamente crescente. Si noti, tuttavia, che per ogni $x \in \mathbb{R}$ è possibile determinare un numero intero k in modo che $x - 2k\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ oppure $x - 2k\pi \in [\pi/2, 3\pi/2]$; da ciò e dalle formule degli archi associati segue che. . .

$$F(x) = \arctan(\tan x)\ ^{3}. \tag{14}$$

`Esercizio 3:` Studiare le proprietà del dominio di ognuna delle funzioni proposte negli `Esercizi 1` e `2`.
In altre parole, stabilire di volta in volta se $\operatorname{Dom} F$ è:

(1) limitato (inferiormente/superiormente) o illimitato (inferiormente/superiormente),

(2) aperto o chiuso,

(3) compatto o no,

motivando *adeguatamente* le risposte.[4]

2. Risposte

In questa sezione sono riportate unicamente le soluzioni degli esercizi, senza gli svolgimenti.

`Esercizio 1`

$$\operatorname{Dom} F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + 2k\pi \right[\cup \left] \pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + k2\pi \right[\right) \ ; \tag{1}$$

$$\operatorname{Dom} F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left] -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right[\cup \left] \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\right) \ ; \tag{2}$$

$$\operatorname{Dom} F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right] \ ; \tag{3}$$

$$\operatorname{Dom} F =]-\infty, 0[\cup] \log 3, +\infty[\ ; \tag{4}$$

$$\operatorname{Dom} F = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right[\ ; \tag{5}$$

$$\operatorname{Dom} F = \left[\frac{1}{4}, 1 \right] \ ; \tag{6}$$

$$\operatorname{Dom} F = [1, +\infty[\ . \tag{7}$$

[3]Si tenga presente che arctan è la funzione inversa di tan solo *limitatamente all'intervallo* $]-\pi/2, \pi/2[$, intervallo in cui tan è strettamente crescente. Si noti, tuttavia, che per ogni $x \in \mathbb{R}$ è possibile determinare un numero intero k in modo che $x - k\pi \in]-\pi/2, \pi/2[$; da ciò e dalle formule degli archi associati segue che. . .

[4]Ad esempio, se un dominio è limitato inferiormente si può giustificare la risposta esibendo esplicitamente (cioè scrivendo sul foglio!) un minorante dell'insieme; oppure, se l'insieme è compatto si può giustificare la risposta affermativa scrivendo che esso è chiuso e limitato.

`Esercizio 2`

(8) $\operatorname{Dom} F = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x^2-16}{x^3+27} & \text{, se } -4 \le x < -3 \text{ opp. } x \ge 4 \\ -\frac{x^2-16}{x^3+27} & \text{, se } x < -4 \text{ opp. } -3 < x < 4 \end{cases} ;$$

(9) $\operatorname{Dom} F = \mathbb{R} - \{2\}$

$$F(x) := \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x-2} & \text{, se } x > 2 \\ \frac{x^2-2x-1}{x-2} & \text{, se } x < 2 \end{cases} ;$$

(10) $\operatorname{Dom} F = \mathbb{R}$

$$F(x) := \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{, se } x \le -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{, se } -3 < x < 0 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{, se } 0 \le x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{, se } x \ge 3 \end{cases} ;$$

(11) $\operatorname{Dom} F =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$F(x) := \begin{cases} \log(x^2 - 1) & \text{, se } x \le -\sqrt{1+\mathbf{e}^2} \text{ opp. } x \ge \sqrt{1+\mathbf{e}^2} \\ 2 & \text{, se } -\sqrt{1+\mathbf{e}^2} < x < -1 \text{ opp. } 1 < x < \sqrt{1+\mathbf{e}^2} \end{cases} ;$$

(12) $\operatorname{Dom} F = \mathbb{R}$

$$F(x) := \begin{cases} \cos x & \text{, se } \frac{\pi}{4} + k2\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x & \text{, se } -\frac{3\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} ;$$

(13) $\operatorname{Dom} F = \mathbb{R}$

$$F(x) := \begin{cases} x & \text{, se } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi & \text{, se } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \text{, se } \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2} \\ \vdots & \quad \vdots \\ (-1)^k x + (-1)^{k+1} k\pi & \text{, se } -\frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} ;$$

(14) $\operatorname{Dom} F = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$$F(x) := \begin{cases} x & \text{, se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x - \pi & \text{, se } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \text{, se } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x - k\pi & \text{, se } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} .$$

`Esercizio 3`

(1) $\operatorname{Dom} F$ è illimitato sia inferiormente sia superiormente, non è né aperto né chiuso e non è compatto;

(2) $\operatorname{Dom} F$ è illimitato sia inferiormente sia superiomente, è aperto e non è compatto;

(3) $\operatorname{Dom} F$ è illimitato sia superiormente sia inferiormente, è chiuso e non è compatto;

(4) Dom F è illimitato sia superiormente sia inferiormente, è aperto e non è compatto;

(5) Dom F è limitato, non è né aperto né chiuso e non è compatto;

(6) Dom F è limitato, è chiuso e compatto;

(7) Dom F è limitato inferiormente ma non superiormente, è chiuso e non è compatto;

(8) Dom F è illimitato sia inferiormente sia superiormente, è aperto e non è compatto;

(9) Dom F è illimitato sia inferiormente sia superiormente, è aperto e non è compatto;

(10) Dom F è illimitato sia inferiormente sia superiormente, è aperto e non è compatto;

(11) Dom F è illimitato sia inferiormente sia superiormente, è aperto e non è compatto;

(12) Dom F è illimitato sia inferiormente sia superiormente, è aperto e non è compatto;

(13) Dom F è illimitato sia inferiormente sia superiormente, è aperto e non è compatto;

(14) Dom F è illimitato sia inferiormente sia superiormente, è aperto e non è compatto.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80,
80126 Napoli – ITALY
email: `guglielmo.dimeglio@unina.it`