QUALCHE ESERCIZIO SUI LIMITI DI SUCCESSIONE

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione

In questi fogli sono proposti alcuni esercizi sul calcolo dei limiti di successione con gli strumenti visti a lezione. Nelle ultime due sezioni sono presentati alcuni esercizi "di teoria" ed alcune applicazioni delle successioni a problemi di interesse fisico, biologico ed ingegneristico.

1. Esercizi

`Esercizio 1:` Utilizzando l'appropriata definizione di limite, dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

(1)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n-2)^2} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = -\infty$$

(2)

$$\lim_{n\to+\infty} \log(n^2+1) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{-\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^4}{n^4+n^2+1} = 2$$

(3)

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{-n} - n = -\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{n} - 1} = -\infty\,.$$

`Esercizio 2:` Usando i *Teoremi sui Limiti* (i.e., Confronto, Carabinieri, Regolarità delle Successioni Monotòne), le regole viste a lezione, i *Teoremi sulle Operazioni coi*

Date: 29 dicembre 2017.

Limiti ed i limiti fondamentali delle TABELLE 3 & 4, calcolare i seguenti limiti:

$$(4)\qquad \lim_{n\to+\infty} n^2+\cos 2^n \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\ \sin n$$

$$(5)\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{4n-n^2} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{9^{\frac{5n+2}{5n-1}}-2\cdot 3^{\frac{2n-1}{2n}}-3}{3^{\frac{n+1}{n}}}\right)$$

$$(6)\qquad \lim_{n\to+\infty} \arctan\frac{n^2+\sqrt{n}-1}{n-\mathbf{e}^{-n}} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \tan\frac{1-\pi n}{2n+1}+\cos\frac{1-\pi n}{2n+1}$$

$$(7)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(\pi-n)}{\log_4|1-n|} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\log_3\frac{1}{n}}$$

$$(8)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^n}{\arctan n} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n}{(2n+1)^3}$$

$$(9)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^3-n}}{\sqrt[3]{n^4+3n}} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{8^{-n}+3\cdot 2^{-n}}}{\sqrt[3]{16^{-n}+2\cdot 4^{-n}}}$$

$$(10)\qquad \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{1+100n-n^2}{\pi-n^2}\right) \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} 5^{4^{3^{2^{-n}}}}$$

$$(11)\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+n^{20}} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n-3^n}$$

$$(12)\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+10}-\sqrt{n+3} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ \left(\sqrt{n+10}-\sqrt{n+3}\right)$$

$$(13)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^3+n+2}{\sqrt{n^6-3}} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \arctan\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}+\arctan\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}}{1-\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$(14)\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{\frac{3-2^{-n}}{2^{-n}}} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2(3^n+1)}{\log_3(2^n+1)}$$

$$(15)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 n+\log_4 n}{\log_3 n+\log_{27} n}\ .$$

`Esercizio 3:` Calcolare i seguenti limiti individuando gli infiniti d'ordine superiore, utilizzando la *gerarchia degli infiniti*[1] ed applicando i Teoremi sui Limiti e sulle

---

[1] Si chiama usualmente *gerarchia degli infiniti* lo schema (già stabilito a lezione) che riassume le relazioni di dominanza tra le funzioni elementari che tendono ad infinito per $n\to+\infty$, cioè:

$$\log_a n \prec n^\alpha \prec b^n \prec n! \prec n^n$$

in cui $a,b,\alpha\in\mathbb{R}$ soddisfano le condizioni $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha>0$ e $b>1$. Alla precedente si possono inoltre aggiungere:

$$\begin{aligned} n^\alpha \prec n^\beta &\quad \text{se e solo se } 0<\alpha<\beta \\ b^n \prec c^n &\quad \text{se e solo se } 1<b<c \end{aligned}$$

che riassumono la relazione di dominanza tra coppie di potenze e coppie di esponenziali.

Operazioni coi Limiti:

(16)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4-2n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sin n - 3n^4} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^n+n^2}{n^5-1}$$

(17)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+\log_3 n}{3^{-n}+\frac{1}{\sqrt{3}}n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2\log^{100} n}\ \mathbf{e}^n$$

(18)
$$\lim_{n\to+\infty} n^{100}\log_3^{27}(n^2+1)\ \mathbf{e}^{-n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\mathbf{e}^n-4^{-n}}{4^n+\mathbf{e}^{-n}+n^2}$$

(19)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2(n^3+2)+\log_4(n^2+4)+\log_8(n+8)}{\log_3(n^3-3)+\log_9(n^2-9)+\log_{27}(n-27)}$$

(20)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+\pi n+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}-2n^2+\sqrt{\mathbf{e}n}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-\mathbf{e}^{-n}-\log_2|1-n|}{2^n+n^{12}+\log_3|2-n|}\ .$$

`Esercizio 4:` Dopo aver constatato che si presentano in forma indeterminata, calcolare i limiti seguenti usando i *Limiti Notevoli* delle TABELLE 5 & 6 ed i Teoremi sui Limiti:

(21) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\arctan\frac{3}{n}} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2\ \sin\frac{1}{n^2}$$

(22) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\sin(\mathbf{e}^{1/n}-1))}{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}-1} \qquad \lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sin(x^2-1)}$$

(23) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{1+\mathbf{e}^{-2n}}-1}{\log_2(1+\mathbf{e}^{-2n})} \qquad \lim_{n\to+\infty} -n\ \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

(24) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(\cos\frac{1}{n}-1)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(25) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\mathbf{e}^{-n})}{1-\mathbf{e}^{1/n}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\sqrt{\frac{1}{n}}}{\mathbf{e}^{1/n^2}-1}$$

(26) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(-\frac{1}{n})}{\arcsin\frac{1}{n^3}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\cos\pi^{-n}+3}\ \log(1+\frac{2}{n^2})}{\frac{1}{n}\ \arctan\frac{1}{n}\ \mathbf{e}^{1+1/n^5}}$$

(27) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(1/n)}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2\frac{2}{n}}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)^2}$$

(28) $$\lim_{n\to+\infty} n\ \left(1-\mathbf{e}^{\frac{1+3n}{n^2}}\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\arcsin(2^{3^{-n}}-1))}{\sin(\sqrt{1+\arctan 3^{1-n}}-1)}$$

(29) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\mathbf{e}^{-n}\right)^{2\mathbf{e}^n} \qquad \lim_{n\to0} (\cos\frac{3}{\sqrt[3]{n}})^{\frac{1}{\sin^2\frac{2}{\sqrt[3]{n}}}}$$

(30) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n\log n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\ \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\ .$$

`Esercizio 5:` Calcolare o stimare gli ordini di infinito od infinitesimo delle successioni di termine generale:

(31) $\sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\qquad \arctan 2^{-n}$

(32) $\dfrac{\pi}{2} - \arctan n$ $\qquad 1 - \cos \dfrac{1}{n^3}$

(33) $\log(1 + \mathbf{e}^{n-3\sqrt{n}})$ $\qquad \log(1 + \mathbf{e}^{1-\log n})$

(34) $\dfrac{\mathbf{e}^n\ n!}{n^n}$ $\qquad \dfrac{(2n)!}{n^n}$

(35) $\dfrac{\arcsin(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} - 1)}{\sqrt{n}}$ $\qquad n\ \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right) + 2n^{-\frac{1}{3}}$

(36) $\log_2(1 + 2^n) - \log_4(1 + 2^n) + \log_8(1 + 2^n)$ $\qquad (\sqrt{\cos \dfrac{1}{n^2}} - 1)\mathbf{e}^{\frac{1}{n^4}}$.

2. Limiti di Successione

`Esercizio 6:` Sia (a_n) una successione.

1. Provare che se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora (a_n) è limitata inferiormente e dotata di minimo.

2. Provare che se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, allora (a_n) è limitata superiormente e dotata di massimo.

3. Esibendo due controesempi, mostrare che i risultati precedenti non si invertono; in altre parole, determinare esplicitamente una successione dotata di minimo [risp. di massimo] che non diverge positivamente [risp. negativamente].

`Esercizio 7:` In generale, i teoremi sulle operazioni coi limiti *non* possono essere usati per ricavare informazioni sulla non regolarità di somme, differenze, prodotti e quozienti di successioni non regolari.
Mostrare ciò esibendo qualche controesempio alle seguenti congetture:

(1) se (a_n) e (b_n) non sono regolari, allora nemmeno $(a_n + b_n)$ è regolare;

(2) se (a_n) e (b_n) non sono regolari, allora nemmeno $(a_n - b_n)$ è regolare;

(3) se (a_n) e (b_n) non sono regolari, allora nemmeno $(a_n \cdot b_n)$ è regolare;

(4) se (a_n) e (b_n) non sono regolari e $b_n \neq 0$, allora nemmeno $(\frac{a_n}{b_n})$ è regolare.

`Esercizio 8 (Estensioni dei Teoremi sulle Operazioni coi Limiti):` I teoremi sulle operazioni coi limiti possono essere estesi in molti modi: alcuni di essi sono proposti in questo esercizio.

Siano (a_n) e (b_n) successioni reali.

1. Provare che se (a_n) è limitata inferiormente e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$.

2. Mostrare che se (a_n) è limitata superiormente e $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = -\infty$.

3. Dimostrare che se (a_n) ha un minorante positivo e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ [risp. $-\infty$], allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$ [risp. $-\infty$].

4. Provare che se (a_n) ha un maggiorante negativo e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ [risp. $-\infty$], allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$ [risp. $+\infty$].

5. Dimostrare che se (a_n) è limitata e se $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

6. Mostrare che se (a_n) è limitata e se $\lim_{n\to+\infty} |b_n| = +\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

7. Provare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, allora la successione di termine generale $|a_n|$ è regolare ed ha $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$.

8. Mostrare che il viceversa del punto **7** non vale; in altri termini, trovare un controesempio per rendere evidente che, in generale, l'esistenza del $\lim_{n\to+\infty} |a_n|$ non implica l'esistenza di $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

9. Dimostrare che risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ se e solo se $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

`Esercizio 9 (Teorema della Permanenza del Segno Generalizzato):` Sia (a_n) una successione regolare di numeri reali.

1. Provare che se:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n > \alpha \ ,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, allora esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\forall n > \nu,\ a_n > \alpha \ .$$

2. Analogamente, mostrare che se:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n < A \ ,$$

con $A \in \mathbb{R}$, allora esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\forall n > \nu,\ a_n < A \ .$$

3. I risultati **1** & **2** si invertono con le solite accortezze, cioè indebolendo le disuguaglianze che vi figurano.
Enunciare e dimostrare tali teoremi inversi.

`Esercizio 10:` Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} b_n \ .$$

1. Se risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \ ,$$

è vero che si ha pure:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{a_n}}{\mathbf{e}^{b_n}} = 1 \ ?$$

In caso affermativo, motivare la risposta; altrimenti, esibire qualche controesempio.

2 Se, viceversa, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{a_n}}{\mathbf{e}^{b_n}} = 1 \ ,$$

è vero che risulta anche:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \ ?$$

In caso affermativo, motivare la risposta; altrimenti, esibire qualche controesempio.

`Esercizio 11 (Successioni e Topologia):` Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $c \in \mathbb{R}$.

1. Provare che c è un punto di accumulazione per X se e solo se esiste una successione $(x_n) \subseteq X - \{c\}$ tale che $x_n \to c$.

2. Mostrare che c è un punto di accumulazione per X da sinistra [risp. da destra][2] se e solo se esiste una successione strettamente crescente [risp. decrescente] $(x_n) \subseteq X - \{c\}$ tale che $x_n \to c$.

3. Mostrare che c è un punto isolato di X se e solo se le uniche successioni $(x_n) \subseteq X$ che convergono verso c sono quelle che godono della proprietà:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0, \quad x_n = c$$

(le quali vengono chiamate *successioni definitivamente costanti*).

4. Provare che un insieme X non limitato inferiormente [risp. superiormente] contiene una successione (x_n) negativamente divergente [risp. positivamente divergente].

[`Suggerimento`: Per costruire la successione (x_n) sfruttare opportunamente la definizione di insieme non limitato inferiormente/superiormente.]

5. Mostrare che se X non è chiuso allora esiste una successione di punti di X convergente verso un punto $c \notin X$.

[`Suggerimento`: Dato che X non è chiuso, esiste $c \in \mathbb{R} - X$ che è di accumulazione per X; per concludere, usare il punto **1**.]

Usualmente, si conviene di dire che un sottoinsieme non vuoto $X \subseteq \mathbb{R}$ è *sequenzialmente compatto* (o *compatto per successioni*) se da ogni successione $(x_n) \subseteq X$ è possibile estrarre una successione (x_{n_k}) convergente verso un punto $c \in X$.
Adottata tale terminologia, il *Teorema di Heine*[3] - *Pincherle*[4] - *Borel*[5] stabilisce che un insieme X è compatto (cioè chiuso e limitato) se e solo se esso è sequenzialmente compatto.

6. Mostrare che la compattezza sequenziale implica la compattezza.

[`Suggerimento`: Sia X sequenzialmente compatto e, *per assurdo*, si supponga che X non sia compatto, cosicché esso o non è limitato o non è chiuso; sfruttare i risultati **4** & **5** per mostrare che ciò conduce ad un assurdo.]

---

[2] Si ricordi che c è detto *punto di accumulazione per X da sinistra* [risp. *destra*] se e solo se esso è di accumulazione per l'insieme $X \cap]-\infty, c[$ [risp. per $X \cap]c, +\infty[$].

[3] Heinrich Eduard Heine (1821 – 1881), matematico tedesco.

[4] Salvatore Pincherle (1853 – 1936), matematico italiano fondatore dell'Unione Matematica Italiana.

[5] Félix Eduard Justin Èmile Borel (1871 – 1956), matematico francese.

`Esercizio 12 (Successioni Monotòne di Numeri Naturali):` Sia (n_k) una successione di numeri naturali.

1. Provare che se (n_k) è strettamente crescente, allora risulta:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ n_k \geq k\ .$$

[`Suggerimento`: Fare induzione su k.]

2. Esistono successioni di numeri naturali strettamente decrescenti?

`Esercizio 13 (Criterio della Radice per Successioni):` Sia (a_n) una successione di numeri reali ≥ 0 tale che:

(37)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]\ .$$

1. Provare che se $l > 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

[`Suggerimento`: Nella definizione di limite per la successione di termine generale $\sqrt[n]{a_n}$ si può scegliere $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$; in tal modo si vede che (a_n) è minorata, da un certo indice in poi, dai termini di una successione positivamente divergente.]

2. Dimostrare che se $0 \leq l < 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

[`Suggerimento`: Come sopra, ma ponendo $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ e maggiorando con una successione infinitesima.]

3. Considerare le tre successioni di termini generali:

$$x_n := \frac{n+1}{n^2} \qquad y_n := \frac{n+1}{n} \qquad z_n := \frac{n^2}{n+1}\ ;$$

provare che risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{z_n} = 1$$

e calcolare i limiti $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
Conforntare i risultati e poi rispondere alla domanda seguente: cosa si può dire, in generale, se $l = 1$ in (37)?

`Esercizio 14 (Criterio della Rapporto per Successioni):` Sia (a_n) una successione di numeri reali > 0 tale che:

(38)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]\ .$$

1. Provare che se $l > 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

[`Suggerimento`: Nella definizione di limite per la successione di termine generale a_{n+1}/a_n si può scegliere $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$; in tal modo si vede che (a_n) è minorata, da un certo indice in poi, dai termini di una successione positivamente divergente. Occorre ragionare per ricorrenza!]

2. Dimostrare che se $0 \leq l < 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

[`Suggerimento`: Come sopra, ma ponendo $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ e maggiorando con una successione infinitesima.]

3. Considerare le tre successioni di termini generali:

$$x_n := \frac{n+1}{n^2} \qquad y_n := \frac{n+1}{n} \qquad z_n := \frac{n^2}{n+1}\ ;$$

provare che risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = 1$$

e calcolare i limiti $\lim_{n\to+\infty} x_n$, $\lim_{n\to+\infty} y_n$ e $\lim_{n\to+\infty} z_n$.
Confrontare i risultati ottenuti e poi rispondere alla domanda seguente: cosa si può dire, in generale, se $l = 1$ in (38)?

4. Sfruttando il Criterio del Rapporto ed i Limiti Notevoli di Tabella 5, dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$ ed $a > 1$.

`Esercizio 15 (Successioni Definitivamente Nulle):` Si dice che una successione (a_n) è *definitivamente nulla* se e solo se a partire da un certo indice in poi i suoi elementi sono tutti nulli, cioè se:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0,\ a_n = 0\ .$$

L'insieme delle successioni definitivamente nulle si denota col simbolo $c_{00}(\mathbb{R})$.

1. Provare che se $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora le successioni di termini generali $\alpha a_n + \beta b_n$ ed $a_n \cdot b_n$ sono definitivamente nulle.

2. Mostrare che $c_{00}(\mathbb{R}) \subset c_0(\mathbb{R})$, l'insieme $c_0(\mathbb{R})$ essendo quello costituito dalle successioni infinitesime.

3. Fissate $(a_n), (b_n) \in c_{00}(\mathbb{R})$, si costruisca la successione (c_n) (detta *prodotto secondo Cauchy di* (a_n) *e* (b_n)) ponendo:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\ .$$

Dimostrare che $(c_n) \in c_{00}(\mathbb{R})$.

4 (Facoltativo). Provare che esiste una biiezione tra l'insieme $c_{00}(\mathbb{R})$ e l'insieme dei polinomi a coefficienti reali.

`Esercizio 16:` Sia (a_n) una successione reale.
Per ogni $p \in \mathbb{N}$ consideriamo la successione estratta da (a_n) dagli indici $n_k := p+k$, i.e. (a_{p+k}).[6]

[6]Tale successione si ottiene da (a_n) considerandone solo i termini da a_p in poi, i.e. selezionando i termini $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}, \ldots, a_{p+k}, \ldots$

Detti $\lambda_p, \Lambda_p \in \widehat{\mathbb{R}}$, rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di (a_{p+k}), cioè:

$$\lambda_p := \inf_{k\in\mathbb{N}} a_{p+k}$$
$$\Lambda_p := \sup_{k\in\mathbb{N}} a_{p+k} \ ,$$

è evidente che se (a_n) non è limitata inferiormente [risp. superiormente] allora $\lambda_p = -\infty$ [risp. $\Lambda_p = +\infty$] per ogni indice p; d'altra parte, se (a_n) è limitata inferiormente [risp. superiormente] allora $\lambda_p \in \mathbb{R}$ [risp. $\Lambda_p \in \mathbb{R}$] per ogni indice p.

1. Supposto che (a_n) sia limitata inferiormente [risp. superiormente], mostrare che la successione di numeri reali (λ_p) [risp. (Λ_p)] è crescente [risp. decrescente].

[`Suggerimento`: Per provare che $\lambda_p \leq \lambda_{p+1}$ basta notare il sostegno della successione (a_{p+1+k}) è un sottoinsieme del sostegno di (a_{p+k}) e che l'estremo inferiore è decrescente rispetto all'inclusione[7]; un ragionamento del tutto analogo mostra che $\Lambda_{p+1} \leq \Lambda_p$.]

2. Supposto che (a_n) sia limitata, provare che entrambe le successioni (λ_p) e (Λ_p) sono convergenti.

[`Suggerimento`: Si noti che risulta $\lambda_0 \leq \lambda_p \leq \Lambda_p \leq \Lambda_0$ per ogni indice p e si sfrutti il *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne*.]

3. Mostrare che se (λ_p) e (Λ_p) convergono allo stesso limite $a \in \mathbb{R}$, allora anche (a_n) converge verso a.

[`Suggerimento`: Osservare che se $n, m > p$ allora i termini a_n ed a_m sono contenuti nella successione (a_{p+k}) e che $|a_n - a_m| \leq \Lambda_p - \lambda_p$; da ciò dedurre che (a_n) è una successione di Cauchy e che converge verso un $\alpha \in \mathbb{R}$. Per mostrare che $\alpha = a$ si tenga presente che $a_p - \lambda_p \leq \Lambda_p - \lambda_p$ e che $\Lambda_p - a_p \leq \Lambda_p - \lambda_p$ e da ciò, con un opportuno passaggio al limite, si deduca che $0 \leq a - \alpha \leq 0$.]

Osservazione 1 (Minimo e Massimo Limite di una Successione)**:** Gli elementi di $\widehat{\mathbb{R}}$ definiti ponendo:

$$\operatorname{minlim}_{n\to+\infty} a_n := \begin{cases} -\infty & \text{, se } (a_n) \text{ non è limitata inferiormente} \\ \lim_{p\to+\infty} \lambda_p & \text{, se } (a_n) \text{ è limitata inferiormente} \end{cases}$$
$$\operatorname{maxlim}_{n\to+\infty} a_n := \begin{cases} +\infty & \text{, se } (a_n) \text{ non è limitata superiormente} \\ \lim_{p\to+\infty} \Lambda_p & \text{, se } (a_n) \text{ è limitata superiormente} \end{cases}$$

vengono, rispettivamente, detti *minimo limite* e *massimo limite di* (a_n) e sono coinvolti nella dimostrazione di alcune questioni (piuttosto fini) di Analisi Reale. Si dimostra che per ogni successione (a_{n_k}) estratta da (a_n) e regolare, risulta sempre:

$$\operatorname{minlim}_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \operatorname{minlim}_{n\to+\infty} a_n$$

e che esistono successioni (a_{n_k}) ed (a_{n_h}) estratte da (a_n) tali che:

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \operatorname{minlim}_{n\to+\infty} a_n$$
$$\lim_{h\to+\infty} a_{n_h} = \operatorname{maxlim}_{n\to+\infty} a_n \ ;$$

[7] Ciò significa che, per ogni $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti, se $A \subseteq B$ allora $\inf A \geq \inf B$.

ciò giustifica il nome delle due quantità, poiché esse sono effettivamente il minimo ed il massimo tra i limiti possibili per le successioni regolari estratte da (a_n). Inoltre, si prova che una successione (a_n) è regolare se e solo se $\operatorname{minlim}_{n\to+\infty} a_n = \operatorname{maxlim}_{n\to+\infty} a_n$ e che, in tal caso, il limite di (a_n) coincide col comune valore di minimo e massimo limite. ♦

`Esercizio 17 (Dimostrazione di un Limite Notevole):` Si vuole dimostrare che $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Seguire lo schema seguente:

(1) porre $a_n := \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\sqrt{n}}$ ed osservare che $a_n > 1$ e $a_n^2 = \sqrt[n]{n}$ per ogni $\mathbb{N} - \{0,1\}$;

(2) posto $x_n := a_n - 1$, notare che $x_n > 0$ e che $a_n = 1 + x_n$ cosicché:
$$(1 + x_n)^n = \sqrt{n}$$
per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$;

(3) usare la *disuguaglianza di Bernoulli*, i.e. $(1+x)^n \geq 1 + nx$ con $x \geq -1$, per stabilire che la disuguaglianza:
$$\sqrt{n} \geq 1 + nx_n$$
vale per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$;

(4) dedurne che:
$$x_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}$$
e calcolare il $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$;

(5) concludere calcolando il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

`Esercizio 18 (Proprietà delle Successioni di Cauchy):` Sia (a_n) una successione di numeri reali che gode della *proprietà di Cauchy*, cioè tale che:

$$\text{(C)} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > \nu,\ |a_n - a_m| < \varepsilon\ .$$

1. Dimostrare *direttamente*[8] che (a_n) è limitata.

[`Suggerimento`: Sfruttare la (C) in modo analogo a come si è usata la definizione di limite nel dimostrare che ogni successione convergente è limitata.]

2. Provare *direttamente*[9] che se da (a_n) si può estrarre una successione (a_{n_k}) convergente verso $a \in \mathbb{R}$, allora (a_n) converge verso a.

[`Suggerimento`: Bisogna usare il risultato di cui all'`Esercizio` 12.]

`Esercizio 19 (Alcune Ricorrenze del Primo Ordine Lineari):` Siano $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ ed $a \neq 0$.

---

[8]Cioè, usando la (C) e non il noto Teorema che garantisce la convergenza di ogni successione di Cauchy.

[9]Cioè, usando la (C) e non i noti risultati sulle successioni estratte e sulla convergenza delle successioni di Cauchy.

1. Determinare l'espressione esplicita della successione definita per ricorrenza ponendo:

$$\begin{cases} a\ a_{n+1} = b\ a_n & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

e provare che essa converge se e solo se $|b| < |a|$. Cosa accade negli altri casi?

[`Suggerimento`: Usando la ricorrenza a ritroso si ha $a_{n+1} = \frac{b}{a}a_n = (\frac{b}{a})^2 a_{n-1} = (\frac{b}{a})^3 a_{n-2}$ etc... Da cui non è difficile indovinare un'espressione esplicita per a_n; ragionando per induzione, dimostrare che l'espressione individuata è corretta.]

2. Determinare l'espressione esplicita della successione definita per ricorrenza ponendo:

$$\begin{cases} a\ a_{n+1} = b\ a_n + c & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

e studiare il suo comportamento al limite.

[`Suggerimento`: Usando la ricorrenza a ritroso si ha $a_{n+1} = \frac{b}{a}a_n + \frac{c}{a} = (\frac{b}{a})^2 a_{n-1} + \frac{c}{a}(1 + \frac{b}{a}) = (\frac{b}{a})^3 a_{n-2} + \frac{c}{a}(1 + \frac{b}{a} + (\frac{b}{a})^2)$ etc... Da cui non è difficile indovinare un'espressione esplicita per a_n; ragionando per induzione, dimostrare che l'espressione individuata è corretta.]

`Esercizio 20:` Sia (a_n) la successione definita per ricorrenza ponendo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Provare che se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$, la (a_n) è costante e calcolarne il limite.

2. Mostrare che se $0 < \alpha < 1$ allora risulta:

(i) $0 < a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (a_n) è strettamente decrescente;

(iii) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

[`Suggerimento`: Per dimostrare (i) & (ii), ragionare per induzione. Per (iii), sfruttare il *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne*, la relazione $a_{n+1} = a_n^2$, il *Teorema sulle Successioni Estratte* ed i *Limiti Fondamentali*.]

3. Provare che se $\alpha > 1$ allora si ha:

(i) $a_n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (a_n) è strettamente crescente;

(iii) $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

[`Suggerimento`: Procedere come per il punto **2**.]

4. Cosa succede per $\alpha < 0$?

`Esercizio 21:` Sia (a_n) la successione definita per ricorrenza ponendo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^3 & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Provare che se $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$, la (a_n) è costante e calcolarne il limite.

2. Mostrare che se $0 < \alpha < 1$ allora risulta:

(i) $0 < a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (a_n) è strettamente decrescente;

(iii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

[`Suggerimento`: Per dimostrare (i) & (ii), ragionare per induzione. Per (iii), sfruttare il *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne*, la relazione $a_{n+1} = a_n^3$, il *Teorema sulle Successioni Estratte* ed i *Limiti Fondamentali*.]

3. Provare che se $\alpha > 1$ allora si ha:
(i) $a_n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (a_n) è strettamente crescente;

(iii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

[`Suggerimento`: Procedere come per il punto **2**.]

4. Cosa succede per $\alpha < 0$?

`Esercizio 22:` Sia (a_n) la successione definita per ricorrenza da:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{8}{a_n^2} & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Provare che (a_n) è costante se e solo se $\alpha = 2$ e calcolarne il limite.

2. Dimostrare che, comunque si scelga $\alpha \neq 0$, risulta $a_n > 0$ per ogni indice $n \geq 1$.

3. Mostrare che, comunque si scelga $\alpha \neq 0$, i termini della successione risultano alternativamente maggiori e minori di 2.
Per fare ciò, posto $b_k := a_{2k}$ e $c_h := a_{2h+1}$ (di modo che (b_k) e (c_h) sono le estratte da (a_n) contenenti i termini di posto pari e quelli di posto dispari), verificare che le successioni (b_k) e (c_h) sono definite dalle ricorrenze:

$$\begin{cases} b_{k+1} = \frac{b_k^2}{8} & \text{, per ogni } k \in \mathbb{N} \\ b_0 = \alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c_{h+1} = \frac{c_h^2}{8} & \text{, per ogni } h \in \mathbb{N} \\ c_0 = \frac{8}{\alpha^2} \end{cases}$$

e provare che per ogni coppia di indici $h, k \in \mathbb{N}$ risulta $b_k < 2 < c_h$ se $\alpha < 2$ e $c_k < 2 < b_h$ se $\alpha > 2$.

4. Provare che (a_n) non è regolare.
Per fare ciò, mostrare che le successioni estratte (b_k) e (c_h) hanno limiti diversi per $h, k \to +\infty$ ed invocare il *Teorema sulle Successioni Estratte*.

`Esercizio 23:` Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed (x_n) la successione definita per ricorrenza ponendo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ x_0 = \alpha \ . \end{cases}$$

1. Provare che se (x_n) è convergente, allora il limite l di (x_n) è una soluzione dell'*equazione dei punti uniti di* f:

$$x = f(x) \ ,$$

cioè risulta $l = f(l)$.

2. Mostrare che se f è crescente, allora (x_n) è strettamente crescente se $\alpha < f(\alpha)$, strettamente decrescente se $\alpha > f(\alpha)$ e costante se $\alpha = f(\alpha)$.
Cosa accade se f è decrescente?

`Esercizio 24 (Soluzione Generale di una Ricorrenza Lineare del Secondo Ordine):` Fissata una successione (u_n) e dei numeri $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo la *ricorrenza lineare non omogenea del secondo ordine*:

$$\text{(RL)} \qquad \begin{cases} a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = u_n & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ x_0 = \alpha \\ x_1 = \beta \end{cases} ,$$

la quale consente di definire almeno una successione (x_n) detta *soluzione della ricorrenza*; i numeri a, b, c vengono detti *coefficienti della ricorrenza*, la successione (u_n) *termine noto* ed i numeri α, β *condizioni iniziali*. Ora ci occuperemo di stabilire alcune proprietà delle ricorrenze lineari del secondo ordine, come l'unicità della soluzione e la possibilità di una sua rappresentazione esplicita.

1. Dimostrare che la *ricorrenza omogenea con condizioni iniziali nulle associata ad* (RL), i.e. il problema:

$$\text{(RLO)} \qquad \begin{cases} a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0 & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

(che ha il termine noto identicamente nullo e nulle anche le condizioni iniziali), ha come unica soluzione la successione identicamente nulla.

[`Suggerimento`: Si vede facilmente che la successione identicamente nulla risolve la (RLO); perciò basta provare che se (x_n) è una qualsiasi altra soluzione di (RLO) allora si ha $x_n = 0$ per ogni indice n. Fare induzione su n, sfruttando la ricorrenza.]

2 [`Unicità della Soluzione di` (RL)]. Provare che se (x_n) ed (y_n) sono due soluzioni di (RL), allora risulta $x_n = y_n$ per ogni indice n.

[`Suggerimento`: Mostrare che la successione di termine generale $w_n := x_n - y_n$ soddisfa la (RLO) e concludere.]

3. Mostrare che comunque si scelgano $(\bar{x}_n)$ soluzione di:

$$\begin{cases} ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ x_0 = \alpha \\ x_1 = \beta \end{cases} \tag{39}$$

e (ξ_n) soluzione di:

$$\begin{cases} ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = u_n & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 0\,, \end{cases} \tag{40}$$

allora la successione di termine generale $x_n := \xi_n + \bar{x}_n$ è una soluzione di (RL).

4. Viceversa, mostrare che per ogni soluzione (x_n) di (RL) esistono un'unica soluzione $(\overline{x}_n)$ di (39) ed un'unica soluzione (ξ_n) di (40) tali che $x_n = \xi_n + \bar{x}_n$ per ogni indice n.

[`Suggerimento`: La prima delle due ricorrenze ha unica soluzione $(\overline{x}_n)$; posto $\xi_n := x_n - \overline{x}_n$, provare che (ξ_n) soddisfa la seconda ricorrenza.]

5 [`Rappresentazione delle Soluzioni di` (RL)]. Confrontando i risultati **2**, **3** & **4**, dedurre che l'unica soluzione di (RL) si rappresenta sommando l'unica soluzione di (39) ed (40).

`Esercizio 25 (Ricorrenze Lineari Omogenee del Secondo Ordine):` Siano $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ e si consideri la ricorrenza:

$$\begin{cases} a\ x_{n+2} + b\ x_{n+1} + c\ x_n = 0 & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ x_0 = \alpha \\ x_1 = \beta \end{cases} . \tag{41}$$

1. Provare che una successione del tipo $x_n = \lambda^n$, con $\lambda \neq 0$, soddisfa una relazione del tipo $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ se e solo se λ è soluzione dell'equazione di secondo grado $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, detta *equazione caratteristica*.

2. Se il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ dell'equazione caratteristica è positivo, allora l'equazione ha due soluzioni reali e distinte $\lambda_1 < \lambda_2$.
In tal caso, provare che ogni successione del tipo $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarie, soddisfa la relazione $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$.

3. Se $\Delta = 0$, allora l'equazione caratteristica ha un'unica soluzione reale λ_1 (di molteplicità 2).
In tal caso, mostrare che ogni successione del tipo $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarie, soddisfa la relazione $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$.

4 (Facoltativo). Se $\Delta < 0$, allora l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \mathbf{i}\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$. In tal caso, posto:

$$r := \sqrt{\frac{c}{a}}$$

e detto ϑ l'unico angolo in $]-\pi,\pi]$ tale che:

$$\begin{cases} \cos\vartheta = -\frac{b}{2a}\sqrt{\frac{a}{c}} \\ \sin\vartheta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\sqrt{\frac{a}{c}} \end{cases},$$

far vedere che ogni successione del tipo $x_n := C_1 r^n \cos(n\vartheta) + C_2 r^n \sin(n\vartheta)$ soddisfa la ricorrenza $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$.

5. Provare che in ogni caso, è sempre possibile determinare le costanti $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ in modo che ognuna delle successioni determinate ai punti **2** – **4** soddisfi anche le condizioni iniziali $x_0 = \alpha$ ed $x_1 = \beta$.

[`Suggerimento`: Imponendo le condizioni iniziali si ottiene un sistema lineare di due equazioni nelle incognite C_1 e C_2; tale sistema ha sempre unica soluzione, in quanto è di Cramer.]

6. Risolvere esplicitamente:

$$\begin{cases} x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases},$$ [10]

$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \\ x_0 = 2 \\ x_1 = -1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}.$$

3. Applicazioni

`Esercizio 26 (Legge di Raffreddamento di Newton):` Supponiamo di avere un oggetto $\mathcal{E}$ ad una temperatura iniziale $T_0 = \alpha$ assegnata, posto in una stanza mantenuta a temperatura costantemente uguale a β, e di misurare la temperatura di $\mathcal{E}$ ad intervalli regolari, ricavandone le temperature T_1, T_2, T_3, etc...
La *Legge di Raffreddamento di Newton* stabilisce che la differenza tra la $n+1$-esima temperatura misurata di $\mathcal{E}$ e la temperatura n-esima è direttamente proporzionale alla differenza tra la temperatura n-esima e la temperatura ambiente β, con la costante di proporzionalità k che dipende unicamente dalle caratteristiche del corpo $\mathcal{E}$.

1. Scrivere la ricorrenza che rappresenta la *Legge di Raffreddamento di Newton.*

2. Mostrare che se $\alpha = \beta$ allora la successione delle temperature di $\mathcal{E}$ è costante.

3. Mostrare che se $\alpha > \beta$ e $k < 0$, allora la successione delle temperature di $\mathcal{E}$ è strettamente decrescente e calcolarne il limite.

4. Viceversa, provare che se $\alpha < \beta$ e $k > 0$, allora la successione delle temperature di $\mathcal{E}$ è strettamente crescente e calcolarne il limite.

[10] Questa è la cosiddetta *successione di Fibonacci*, che prende il nome da Leonardo Pisano (1175 ca. – 1235), matematico italiano che introdusse in Europa il sistema di numerazione arabo tuttora in uso.

In tal caso, è corretto parlare di *raffreddamento*?

5 (Facoltativo). I casi presentati ai punti **3** e **4** sono quelli fisicamente interessanti, ma altre alternative sono possibili. Analizzarle.

In moti casi, avendo a disposizione una piccola quantità di dati parziali (e.g., i primi due valori della temperatura di $\mathcal{E}$ e la temperatura ambiente, oppure i primi tre valori della temperatura di $\mathcal{E}$), è possibile scrivere esplicitamente la ricorrenza che descrive il raffreddamento di $\mathcal{E}$ e determinare le sue temperature future.
In quest'ottica, si risolvano i seguenti problemi:

6. Una tazza di tè a temperatura iniziale $T_0 = 82°$C è posta in una stanza a temperatura 27°C; dopo un minuto, la sua temperatura è scesa a 80°C. Quale sarà la temperatura del tè dopo 20 minuti?

7. Un bicchiere di Cola a 4°C è dimenticato sul tavolo della cucina, in una giornata molto calda. Se la temperatura della stanza è di 26°C e dopo 2.5 minuti la sua temperatura è di 10°C. Dopo quanti minuti la Cola raggiunge la temperatura di 25.5°C?

8. Durante una partita del Napoli, una pinta di birra a temperatura 7°C è lasciata sul bancone di un pub. Dopo un minuto, la birra è a 11°C e dopo due minuti è a 14°C. Qual è la temperatura del pub?

`Esercizio 27 (Decadimento Radioattivo):` Il Radio è un elemento radioattivo che decade con un tasso dello 1% ogni 25 anni: ciò significa che la massa rimanente all'inizio di un periodo di 25 anni è uguale a quella che ce n'era all'inizio dei 25 anni precedenti diminuita dello 1%.

1. Detta $M_0 = m$ la massa di Radio sotto osservazione, scrivere la ricorrenza che ne descrive il decadimento di 25 anni in 25 anni.

È detto *tempo di dimezzamento* del Radio il numero totale di anni necessari affinché decada almeno metà della massa iniziale osservata o, detto altrimenti, il numero di anni dopo i quali la massa osservata è minore od uguale alla metà della massa iniziale.

2. Si calcoli il tempo di dimezzamento del Radio.

3. Più in generale, ogni elemento chimico radioattivo decade con tasso percentuale k ogni N anni. Se la massa iniziale è $M_0 = m$, si scriva la ricorrenza che descrive il decadimento e se ne calcoli il tempo di dimezzamento in termini dei parametri k, m ed N.

`Esercizio 28 (Evoluzione di Popolazioni):` Supponiamo di voler studiare l'evoluzione della popolazione di una data specie $\mathcal{S}$, osservandone il numero di individui ad intervalli di tempo sempre della stessa ampiezza (e.g., ogni anno, ogni mese, ogni decennio, etc...).
Detti ν e μ i cosiddetti *tassi di natalità* e *di mortalità di* $\mathcal{S}$ (i.e., il rapporto tra gli individui nati e quelli deceduti e la popolazione osservata), detta $x_0 = \overline{x}$ la popolazione iniziale e detto x_n il numero di individui presenti alla n-esima osservazione,

la ricorrenza che descrive l'andamento della popolazione è:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \nu\ x_n - \mu\ x_n & \text{, per ogni } n \in \mathbb{N} \\ x_0 = \overline{x} \end{cases} .$$

1. Studiare l'andamento della successione (x_n) al variare dei parametri ν, μ ed $\overline{x}$.

Nella ricorrenza precedente, i tassi di natalità e mortalità ν e μ sono supposti costanti, cosa che non si verifica quasi mai nelle applicazioni reali poiché contrasta con la limitatezza delle risorse disponibili per lo sviluppo di $\mathcal{S}$.
Una descrizione un po' più sensata del fenomeno si ottiene supponendo che ν e μ varino durante i periodi di osservazione, cioè che $\nu = \nu_n$ e $\mu = \mu_n$: in alcune applicazioni si suppone che:

$$\begin{aligned} \nu_n &= \nu_0 - a\ x_n \\ \mu_n &= \mu_0 + b\ x_n\ , \end{aligned}$$

in cui $\nu_0, \mu_0 > 0$ misurano i tassi di natalità e mortalità "assoluti" e le costanti $a, b > 0$ misurano, in un certo senso, il *grado di competizione per le risorse* all'interno della specie $\mathcal{S}$.[11]

2. Scrivere la ricorrenza che descrive l'andamento della popolazione con ν_n e μ_n dati dalle precedenti relazioni.
Mostrare che se x_n è regolare, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\nu_0 - \mu_0}{a+b} =: x_\infty\ .$$

3. Provare che se $x_n \geq 0$ risulta anche:

$$x_n \leq \frac{1 + \nu_0 - \mu_0}{a+b} =: x_{\max}\ ,$$

e che $x_{\max} > x_\infty$.
Quanto trovato, sempre nell'ipotesi di convergenza, si può interpretare come segue: la popolazione $\mathcal{S}$, nella fase transitoria (cioè prima di stabilizzarsi attorno al valore x_∞), può assumere valori superiori al valore limite x_∞.

`Esercizio 29 (Resistenza Equivalente d'Infiniti Resistori in Parallelo):`
Supponiamo di avere a disposizione un generatore con d.d.p. $V > 0$ ed un'infinità numerabile di resistori, ognuno dei quali con resistenza $r_n > 0$.
Cominciamo a collegare il primo resistore al generatore, ottenendo un circuito con resistenza $R_0 = r_0$; in parallelo al primo resistore colleghiamo quello con resistenza r_1, in modo da ottenere un circuito con resistenza equivalente R_1 data dalla nota formula:

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}}\ ;$$

colleghiamo, in parallelo coi due resistori già presenti, il resistore con resistenza r_2 in modo che la resistenza equivalente del circuito diviene:

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}\ \ldots$$

[11] In particolare, si nota che la presenza di un numero di individui "grande" influenza negativamente il tasso di natalità e positivamente quello di mortalità in $\mathcal{S}$. Ciò è abbastanza ragionevole nell'ottica di risorse limitate, in quanto maggiore è la popolazione, minore è la quantità di risorse pro capite disponibili: questo causa una maggiore probabilità di decesso degli individui (per carenza di accesso alle risorse, e.g. a quelle alimentari) ed una minore natalità.

Procediamo per ricorrenza: supponendo di aver già connesso in parallelo i resistori con resistenze r_0, r_1, r_2, …, r_n, in parallelo ad essi colleghiamo quello di resistenza r_{n+1}, ottenendo un circuito con resistenza equivalente data da:

$$R_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n+1}}} \, ;$$

ed immaginiamo di procedere oltre.

1. Scrivere la ricorrenza che descrive l'andamento della successione di resistenze equivalenti R_n.

2. Provare che la successione (R_n) ha tutti i termini positivi ed è strettamente decrescente.

3. Supporre che $r_n \to r \in]0, +\infty[$. Mostrare che (R_n) è convergente e calcolarne il limite.

Appendice A. Regole di Calcolo e Forme Indeterminate

Tabella 1. Regole di Calcolo (valide quando i secondi membri non si presentano in *forma indeterminata*).

Operazione	Regola
Prodotto per costante	$\lim\limits_{n\to+\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$
Somma	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$
Prodotto	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$
Quoziente	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$
Elevamento a potenza	$\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to+\infty} b_n}$

Tabella 2. Forme Indeterminate.

Operazione	Forma Indeterminata
Somma	$\infty - \infty$
Prodotto	$0 \cdot \infty$
Quoziente	$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$
Elevamento a potenza	0^0 , 1^∞ , ∞^0

Appendice B. Tabelle di Limiti Fondamentali e Notevoli

Tabella 3. Limiti Fondamentali.

Limite		Risultato
$\lim_{n\to+\infty} c$	$=$	c
$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha$	$=$	$\begin{cases} +\infty & \text{, se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{, se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{, se } \alpha < 0 \end{cases}$
$\lim_{n\to+\infty} a^n$	$=$	$\begin{cases} +\infty & \text{, se } a > 1 \\ 1 & \text{, se } a = 1 \\ 0 & \text{, se } 0 \le a < 1 \end{cases}$
$\lim_{n\to+\infty} \log_b n$	$=$	$\begin{cases} +\infty & \text{, se } b > 1 \\ -\infty & \text{, se } 0 < b < 1 \end{cases}$
$\lim_{n\to+\infty} n!$	$=$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} n^n$	$=$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$	$=$	$\begin{cases} 1 & \text{, se } a > 0 \\ 0 & \text{, se } a = 0 \end{cases}$

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80,
80126 Napoli – ITALY
email: guglielmo.dimeglio@unina.it

TABELLA 4. Limiti Fondamentali con le Funzioni Elementari "di Base".

Se	Allora			Condizioni
$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^k$	$=$	a^k	$(k \in \mathbb{N} - \{0\})$
	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{-k}$	$=$	a^{-k}	$(k \in \mathbb{N} - \{0\},\ a \neq 0)$
	$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n}$	$=$	$\sqrt[k]{a}$	$(k \in \mathbb{N} - \{0\},\ a \geq 0)$
	$\lim_{n\to+\infty} a_n^p$	$=$	a^p	($p > 0$ ed $a \geq 0$ opp. $p < 0$ ed $a > 0$)
	$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n}$	$=$	b^a	($b > 0$ e $b \neq 1$)
	$\lim_{n\to+\infty} \log_b a_n$	$=$	$\log_b a$	($b > 0$ e $b \neq 1$, $a > 0$)
	$\lim_{n\to+\infty} \sin a_n$	$=$	$\sin a$	
	$\lim_{n\to+\infty} \cos a_n$	$=$	$\cos a$	
	$\lim_{n\to+\infty} \tan a_n$	$=$	$\tan a$	$(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$
	$\lim_{n\to+\infty} \arcsin a_n$	$=$	$\arcsin a$	$(-1 \leq a \leq 1)$
	$\lim_{n\to+\infty} \arccos a_n$	$=$	$\arccos a$	$(-1 \leq a \leq 1)$
	$\lim_{n\to+\infty} \arctan a_n$	$=$	$\arctan a$	
$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^k$	$=$	$+\infty$	$(k \in \mathbb{N} - \{0\})$
	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{-k}$	$=$	0	$(k \in \mathbb{N} - \{0\})$
	$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n}$	$=$	$+\infty$	$(k \in \mathbb{N} - \{0\})$
	$\lim_{n\to+\infty} a_n^p$	$=$	$\begin{cases} +\infty & \text{, se } p > 0 \\ 0 & \text{, se } p < 0 \end{cases}$	
	$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n}$	$=$	$\begin{cases} +\infty & \text{, se } b > 1 \\ 0 & \text{, se } 0 < b < 1 \end{cases}$	
	$\lim_{n\to+\infty} \log_b a_n$	$=$	$\begin{cases} +\infty & \text{, se } b > 1 \\ -\infty & \text{, se } 0 < b < 1 \end{cases}$	
	$\lim_{n\to+\infty} \arctan a_n$	$=$	$\frac{\pi}{2}$	
$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$	$\lim_{n\to+\infty} a_n^k$	$=$	$\begin{cases} +\infty & \text{, se } k \text{ è pari} \\ -\infty & \text{, se } k \text{ è dispari} \end{cases}$	$(k \in \mathbb{N} - \{0\})$
	$\lim_{n\to+\infty} a_n^{-k}$	$=$	0	$(k \in \mathbb{N} - \{0\})$
	$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n}$	$=$	$-\infty$	($k \in \mathbb{N} - \{0\}$ dispari)
	$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n}$	$=$	$\begin{cases} 0 & \text{, se } b > 1 \\ +\infty & \text{, se } 0 < b < 1 \end{cases}$	
	$\lim_{n\to+\infty} \arctan a_n$	$=$	$-\frac{\pi}{2}$	

TABELLA 5. Limiti Notevoli per le Successioni.

Limite		Risultato
$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$	$=$	1
$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$=$	$\mathbf{e}$
$\lim_{n\to+\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}}$	$=$	$\mathbf{e}$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta}$	$=$	$\begin{cases} 0 & \text{, se } \alpha < \beta \\ 1 & \text{, se } \alpha = \beta \\ +\infty & \text{, se } \alpha > \beta \end{cases}$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{b^n}$	$=$	$\begin{cases} 0 & \text{, se } 0 < a < b \\ 1 & \text{, se } 0 < a = b \\ +\infty & \text{, se } a > b > 0 \end{cases}$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{\log_c n}$	$=$	$\frac{\log c}{\log b} = \log_b c = \frac{1}{\log_c b}$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha}$	$=$	$\begin{cases} 0 & \text{, se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{, se } \alpha \le 0 \text{ e } b > 1 \\ -\infty & \text{, se } \alpha \le 0 \text{ e } 0 < b < 1 \end{cases}$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$	$=$	$\begin{cases} 0 & \text{, se } a > 1 \text{ opp. se } a = 1 \text{ ed } \alpha < 0 \\ 1 & \text{, se } a = 1 \text{ ed } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{, se } 0 < a < 1 \text{ opp. se } a = 1 \text{ ed } \alpha > 0 \end{cases}$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$	$=$	0
$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$	$=$	0
$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbf{e}^{-n}}$	$=$	$\sqrt{2\pi}$ (Formula di Stirling)

TABELLA 6. Limiti Notevoli per le Funzioni. Possono essere utilizzati per calcolare i limiti di successione sfruttandoli insieme al *Teorema sul Limite della Funzione Composta*.

Limite	Risultato	Condizioni
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$	$= \log a$	$(a > 0)$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$	$= \log_a \mathbf{e} = \frac{1}{\log a}$	$(a > 0$ e $a \neq 1)$
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$	$= \alpha$	$(\alpha \in \mathbb{R})$
$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$= \mathbf{e}$	
$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$	$= \mathbf{e}$	