

SOLUZIONI A QUALCHE ESERCIZIO SUI LIMITI DI FUNZIONE

G. DI MEGLIO

INTRODUZIONE

In questi fogli sono proposte le soluzioni degli esercizi sui limiti di funzione. Le soluzioni sono organizzate come segue:

- di alcuni esercizi (quelli più semplici) sono riportati accanto ai testi solo i risultati;
- degli esercizi di media difficoltà sono riportati accanto ai testi i risultati ed alcuni passaggi non commentati;
- le risposte “estese” agli altri quesiti (quelli un po’ più difficili, inclusi quelli di “teoria”) si trovano in piccolo dopo il testo dei quesiti stessi.

1. ESERCIZI

Esercizio 1: Utilizzando l’appropriata definizione di limite, dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1-x} = -\infty \\ (2) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 + 1) = +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{x^2} = -\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^4 + x^2 + 1} = 2 \\ (3) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x - 1} = -\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x = +\infty. \end{aligned}$$

Risposta. Si tratta di provare valida, caso per caso, l’opportuna definizione di limite. Data la somiglianza tra i vari casi, analizziamo solo il primo, i.e.:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1.$$

Innanzitutto, osserviamo che il dominio della funzione definita ponendo $f(x) := \frac{1}{x-2}$ è $X = \mathbb{R} - \{2\}$ e che $x_0 = 3$ è un punto di accumulazione per X . Poiché entrambi x_0 ed $l = 1$ sono al finito, per provare valida l’uguaglianza dobbiamo mostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X \cap]3 - \delta, 3 + \delta[- \{3\}, \left| \frac{1}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon,$$

il che equivale a dire che è possibile individuare nell’insieme delle soluzioni della disequazione $\left| \frac{1}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon$ un opportuno intorno di 3 per ogni valore del parametro $\varepsilon > 0$.

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione $\left| \frac{1}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon$. Nella risoluzione supponiamo che $\varepsilon > 0$

sia “piccolo”¹ e che $x > 2$ ²: abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x-2} - 1 < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} - 1 > -\varepsilon \\ \frac{1}{x-2} - 1 < \varepsilon \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-\varepsilon)x-3+2\varepsilon}{x-2} < 0 \\ \frac{(1+\varepsilon)x-(3+2\varepsilon)}{x-2} > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\varepsilon)x < 3-2\varepsilon \\ (1+\varepsilon)x > 3+2\varepsilon \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ x > \frac{3+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{3+2\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \frac{3-2\varepsilon}{1-\varepsilon}; \end{aligned}$$

sottraendo 3 a tutti i membri dell'ultima catena, otteniamo:

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x-3 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

e scegliendo $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, 1\} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ risulta:

$$\begin{aligned} -\delta < x-3 < \delta &\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x-3 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x-2} - 1 \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

cosicché $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ è il numero che serve per soddisfare la definizione di limite. \square

Esercizio 2: Usando i *Teoremi sui Limiti* (i.e., Confronto, Carabinieri, Regolarità delle Funzioni Monotone, Limite della Funzione Composta) ed i *Teoremi sulle Operazioni coi Limiti*, calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \cos x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} &= 0 \\ (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4x-x^2} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 3} \tan \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x} \right) &= 0 \\ (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{x^2 - 1}{x} &= \frac{\pi}{2} & \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x + \cos x &= -\infty \end{aligned}$$

¹Ciò serve a fare a meno di discutere tutti i casi possibili che possono presentarsi nelle disequazioni contenenti il parametro ε . A posteriori, ciò si giustifica tenendo presente che se una definizione di limite vale per ogni $\varepsilon < C$ (con $C > 0$ fissato in modo da facilitare i conti), tale definizione vale anche per gli $\varepsilon \geq C$: infatti, se $\varepsilon \geq C$, in corrispondenza di $\varepsilon' = \frac{C}{2} < C$ esiste un intorno J' di x_0 tale che per ogni $x \in X \cap J' - \{x_0\}$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon'$; dato che $\varepsilon' < C \leq \varepsilon$, si ha pure $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in X \cap J' - \{x_0\}$, cosicché la definizione di limite vale pure per ε prendendo $J = J'$.

²Ciò serve a semplificare i calcoli. A posteriori ciò si giustifica come segue: supponiamo di aver verificato la validità della definizione di limite, riuscendo per ogni $\varepsilon > 0$ a determinare un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per $x \in X \cap]3 - \delta, 3 + \delta[- \{3\}$; ponendo $\delta' = \min\{\delta, |3 - 2|\} = \min\{\delta, 1\}$, l'intorno $]3 - \delta', 3 + \delta'[$ è contenuto in $]3 - \delta, 3 + \delta[$, dunque risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$ per $x \in X \cap]3 - \delta', 3 + \delta'[- \{3\}$ e perciò δ' è un numero positivo che serve a soddisfare la verifica del limite; scegliendo δ' anziché δ , abbiamo fatto in modo che l'insieme $X \cap]3 - \delta', 3 + \delta'[$ giaccia alla destra di 2, cioè che ogni elemento x di tale insieme risulti effettivamente > 2 .

- (7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{\log_4 |x|} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\log_3 x} = 0$
- (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\arctan x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x}{(2x + 1)^3} = \frac{1}{8}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^3 - x}}{\sqrt[3]{x^4 + 3x}} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + 3x}}{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2}} = +\infty$
- (10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\frac{1+x}{x} \right) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2}{x^2}} = +\infty$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x}{x^3} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \left(e^{\sqrt{1+\log x}} - x^7 \right)}{\sqrt[3]{x}} = 0$
- (12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 2}{\sqrt{x^6 - 3}} = -2$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 3}{x - 2} = +\infty$
- (13) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x}{1-x} = -\frac{\pi}{4}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3-x}{x}} = +\infty$
- (14) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{3-x}{x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \log_2 3$
- (15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x + \log_4 x}{\log_3 x + \log_{27} x} = \log_2 9$.

Esercizio 3: Calcolare i seguenti limiti individuando gli infiniti d'ordine superiore, utilizzando la *gerarchia degli infiniti*³ ed applicando i Teoremi sui Limiti e sulle Operazioni coi Limiti:

- (16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}{\sin x - 3x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{-3x^4} = -\frac{1}{3}$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5} = +\infty$
- (17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \log_3 x}{3^{-x} + \frac{1}{3}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\frac{1}{3}x} = 9$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} \stackrel{y=1/x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$
- (18) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + e^{-x} - 4^x}{4^{-x} + e^x + x^2} \stackrel{y=-x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{4^y} = 0$

³Si chiama usualmente *gerarchia degli infiniti* lo schema (già stabilito a lezione) che riassume le relazioni di dominanza tra le funzioni elementari che tendono ad infinito per $x \rightarrow +\infty$, cioè:

$$\log_a x \prec x^\alpha \prec b^x$$

in cui $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ soddisfano le condizioni $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha > 0$ e $b > 1$. Alla precedente si possono inoltre aggiungere:

$$\begin{aligned} x^\alpha \prec x^\beta & \text{ se e solo se } \alpha < \beta \\ b^x \prec c^x & \text{ se e solo se } 1 < b < c \end{aligned}$$

che riassumono la relazione di dominanza tra coppie di potenze e coppie di esponenziali.

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x}{\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x} = \log_2 3,$$

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \pi x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - 2x^2 + \sqrt{e}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - e^x - \log_2 |x|}{2^{-x} + x^{12} + \log_3 |x|} \stackrel{y=-x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{2^y} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log_2 x \stackrel{y=-\log_2 x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{2^y} = 0$$

$$(21) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \stackrel{y=-\log x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{-y}{e^y}} = 1.$$

Esercizio 4: Dopo aver constatato che si presentano in forma indeterminata, calcolare i limiti seguenti usando i *Limiti Notevoli* di TABELLA 2 ed i Teoremi sui Limiti:

$$(22) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{\sin(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^2 \cdot \frac{4x^2}{3x^2} \cdot \frac{3x^2}{\sin 3x^2} = \frac{4}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} \stackrel{y=1/x}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$(23) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \stackrel{y=x-\pi}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{\sin(x^2-1)} = \frac{1}{2}$$

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x^2}-1}{\log_2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x^2}-1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\log_2(1+x^2)} = \frac{\log 2}{5},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left(1 + \frac{-2}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x+1} \frac{\log \left(1 + \frac{-2}{x+1} \right)}{\frac{-2}{x+1}} = -2$$

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1-\cos x}{x^2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{\log(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\frac{(x-2\pi)^2}{\cos x - 1}}{\frac{\log(1+(\cos x - 1))}{\cos x - 1}} = -\frac{1}{2}$$

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{1 - e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin e^{-x}}{e^{-x}} \cdot \frac{x}{e^x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1 - e^{1/x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \sqrt{x}}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x^2} \cdot \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} = +\infty$$

$$(27) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\arcsin \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{1/x^2} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1/x^3}{\arcsin \frac{1}{x^3}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x + 3} \log(1 + 2x^2)}{x \arctan x e^{1+x^5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x^2)}{2x^2} \cdot \frac{\sqrt{\cos x + 3} 2x^2}{x^2 e^{1+x^5}} \cdot \frac{x}{\arctan x} = \frac{4}{e}$$

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right]^{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{\sin(2x)^2} = 1$$

$$(29) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{\frac{1+3x}{x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{x} \frac{1 - e^{\frac{1+3x}{x^2}}}{\frac{1+3x}{x^2}} = -3,$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \arcsin(2^x - 1))}{\sin(\sqrt{1 + \arctan 3x} - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \arcsin(2^x - 1))}{\arcsin(2^x - 1)} \cdot \frac{\arcsin(2^x - 1)}{2^x - 1} \cdot \frac{2^x - 1}{x} \\ & \quad \cdot \frac{x}{3x} \cdot \frac{3x}{\arctan 3x} \cdot \frac{\arctan 3x}{\sqrt{1 + \arctan 3x} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \arctan 3x} - 1}{\sin(\sqrt{1 + \arctan 3x} - 1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$(30) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x})^{2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(1 + e^{-x})^{e^x} \right]^2 = e^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (1 - \cos x))^{\frac{1}{1 - \cos x}} \right]^{\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}} = \sqrt{e}.$$

Esercizio 5: Utilizzando i Limiti Notevoli di TABELLA 2 ed i Teoremi sui Limiti, calcolare:

$$(31) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{|x|} + \sin x^2}{\log(1+x) + \sqrt{|x|}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{\sqrt[5]{x} - 1} = 5$$

$$(32) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\log_5(1+x^2)) + e^{x^2} - 1}{1 - \cos x + \sin x^3} = 2 + \frac{2}{\log 5},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^4} + \log_{10}(1 + \frac{2}{x^4}) - \frac{1}{2x^4}}{(\sqrt{\cos \frac{1}{x^2}} - 1)e^{\frac{1}{x^4}}} = -2 - \frac{8}{\log 10}$$

$$(33) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x} + 3^x}{x - 2^x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x \sin \pi x}{x^4 + \log_{\pi}(1+x)} = 0$$

$$(34) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1) + \log^2 x}{x - 1} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^3} - \cos x}{(e^x - 1)^3 + x \tan x^2} = +\infty$$

$$(35) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + (e^x - 1)^3 + \log^2(1+x)}{1 - \cos x + \sqrt{2} \tan x} = 2\sqrt{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log \frac{x}{x+1} + 2x^{-\frac{1}{3}}}{e^{-x} - 1 + e^{\frac{1}{x^2}}} = -\infty.$$

Esercizio 6 (Infinitesimi dello Stesso Ordine ed Equivalenti): Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni

infinitesime in x_0 , cioè tali che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, la seconda delle quali non nulla in un conveniente intorno di x_0 (privato di x_0).

Si dice che f e g sono *infinitesimi dello stesso ordine in x_0* se esiste un $l \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l ;$$

inoltre, si dice che f e g sono *infinitesimi equivalenti in x_0* e si scrive:

$$f \sim g \quad \text{in } x_0$$

se essi sono infinitesimi dello stesso ordine in x_0 ed in più risulta $l = 1$.

1. Provare che f è un infinitesimo d'ordine $\alpha > 0$ in x_0 (nel senso della definizione data a lezione) se e solo se esso è un infinitesimo dello stesso ordine dell'infinitesimo campione in x_0 elevato alla α .

Risposta. Come detto a lezione, chiamato $c(x)$ l'infinitesimo campione appropriato (i.e., $c(x) = |x - x_0|$ se $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $c(x) = 1/|x|$ se $x_0 = \pm\infty$), f è infinitesimo d'ordine α in $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ solo se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{c^\alpha(x)} = l \in \mathbb{R} - \{0\} ;$$

per acquisire l'asserto basta confrontare tale definizione con la tesi. \square

2. Provare che se g è un infinitesimo d'ordine $\alpha > 0$ in x_0 ed f è dello stesso ordine di g , allora anche f è un infinitesimo d'ordine α in x_0 .

Risposta. Detto $c(x)$ l'infinitesimo campione appropriato, abbiamo:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{c^\alpha(x)} = \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{c^\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{c^\alpha(x)} = l\lambda \in \mathbb{R} - \{0\} .$$

\square

3. Costatare che alcuni Limiti Notevoli di TABELLA 2 forniscono informazioni su coppie di infinitesimi dello stesso ordine in 0 e sull'ordine di infinitesimo di alcune funzioni elementari.

Quali coppie sono formate da infinitesimi equivalenti? Di quale ordine sono gli infinitesimi individuati?

Risposta. Sono infinitesimi del primo ordine in $x_0 = 0$ le funzioni $\sin x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $a^x - 1$, $\log_a(1+x)$ ed $(1+x)^\alpha - 1$; è infinitesima del secondo ordine in $x_0 = 0$ la funzione $1 - \cos x$. Sono infinitesimi equivalenti in $x_0 = 0$ le funzioni x , $\sin x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $a^x - 1$, $\log_a(1+x)$ e, per i Teoremi sui Limiti, anche $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha}$; analogamente, sono equivalenti in x_0 gli infinitesimi del secondo ordine $\frac{1}{2}x^2$ e $1 - \cos x$. \square

4. Provare che se f e g sono infinitesimi dello stesso ordine in x_0 , allora la funzione $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $h(x) := f(x) - l \cdot g(x)$ è un infinitesimo d'ordine superiore a g in x_0 .

Risposta. Per i Teoremi sulle Operazioni coi Limiti abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - l \cdot g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - l = 0 ,$$

ossia $h(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$. \square

5. Nelle stesse ipotesi del punto 4, dimostrare che f può scriversi come somma di $l \cdot g$ e di una funzione infinitesima in x_0 d'ordine superiore a g , cioè che:

$$(*) \quad f(x) = l \cdot g(x) + o(g(x)) .$$

Mostrare che, viceversa, se f gode di una rappresentazione del tipo (*), allora f è un infinitesimo in x_0 dello stesso ordine di g .

Riscrivere i primi undici limiti notevoli di TABELLA 2 nella forma (*), cioè usando il simbolo di Landau o.

Risposta. Se f è dello stesso ordine di g in x_0 , abbiamo evidentemente $f(x) = l \cdot g(x) + h(x)$ (con h definita al punto 4) ed $h(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, quindi vale la (*).

Viceversa, se vale la (*), allora la funzione $f(x) - l \cdot g(x)$ è infinitesima d'ordine superiore a g in x_0 e dunque:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - l \cdot g(x) + l \cdot g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - l \cdot g(x)}{g(x)} + l = l,$$

cosicché f è infinitesima dello stesso ordine di g in x_0 .

I limiti notevoli si riscrivono:

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\cos x = o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$a^x = 1 + \log a \cdot x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{\log a} \cdot x + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + o(x)$$

per $x \rightarrow 0$. □

6 (Facoltativo). Provare che la relazione \sim è una relazione d'equivalenza⁴ nell'insieme delle funzioni infinitesime in x_0 che non si annullano intorno ad x_0 .

Risposta. Supponiamo che f, g ed h siano infinitesimi in x_0 e non nulle in un conveniente intorno di x_0 (eccezion fatta per x_0).

Evidentemente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

quindi $f \sim f$ e \sim è riflessiva; d'altra parte, se $f \sim g$ abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 1$$

ossia $g \sim f$ e \sim è simmetrica; infine se $f \sim g$ e $g \sim h$ allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = 1$$

e perciò $f \sim h$ e \sim è anche transitiva. □

Esercizio 7 (Infiniti dello Stesso Ordine ed Equivalenti): Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni infinite in x_0 .

Per comodità (quando serve) si può supporre che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Si dice che f e g sono *infiniti dello stesso ordine in x_0* se esiste un $l \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l;$$

inoltre, si dice che f e g sono *infiniti equivalenti in x_0* e si scrive:

$$f \sim g \quad \text{in } x_0$$

⁴Ricordare che una relazione definita in un insieme è detta *d'equivalenza* se e solo se essa è riflessiva, simmetrica e transitiva.

se essi sono infiniti dello stesso ordine in x_0 ed in più risulta $l = 1$.

1. Provare che f è un infinito d'ordine α in x_0 (come da definizione data a lezione) se e solo se essa è un infinito dello stesso ordine dell'infinito campione in x_0 elevato alla α .

2. Provare che se g è un infinito d'ordine $\alpha > 0$ in x_0 ed f è un infinito dello stesso ordine di g , allora anche f è un infinito d'ordine α in x_0 .

Risposta. Si ragiona come ai punti **1** & **2** dell'Esercizio precedente. \square

3. Provare che le funzioni definite in \mathbb{R} ponendo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= x + e^{-x} \\ f_2(x) &:= x + \log x \\ f_3(x) &:= \log(e^{2x} + 1) \\ f_4(x) &:= e^{\log_{e^2}(x^2 + \pi)} \end{aligned}$$

sono infiniti dello stesso ordine in $+\infty$. Qual è il loro ordine?

Risposta. Si deve provare che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_i(x)}{f_j(x)} = l_{i,j} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

per ogni coppia di indici $i \neq j$ in $\{1, 2, 3, 4\}$. Proviamo che f_3 ed f_4 sono equivalenti, analogamente e più semplicemente ragionandosi negli altri casi: abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^{2x} + 1)}{e^{\log_{e^2}(x^2 + \pi)}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^{2x}(1 + e^{-2x}))}{e^{\frac{\log(x^2 + \pi)}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \log(1 + e^{-2x})}{\sqrt{x^2 + \pi}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \log(1 + e^{-2x})}{x\sqrt{1 + \frac{\pi}{x^2}}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Inoltre, gli infiniti f_i con $i = 1, 2, 3, 4$ sono tutti del primo ordine. \square

Esercizio 8 (Sugli Ordini di Infinito e Infinitesimo): Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X .

1. Provare che se:

- (1) f è un infinito d'ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow x_0$,
- (2) g è una funzione limitata intorno ad x_0 oppure è un infinito in x_0 d'ordine inferiore ad f ,

allora la funzione $f + g$ è un infinito d'ordine α in x_0 .

Risposta. Detto $c(x)$ l'opportuno infinito campione in $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x)}{c^\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{c^\alpha(x)} \cdot \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right),$$

e da qui si conclude tenendo presente che il primo fattore tende ad $l \neq 0$ (per l'ipotesi su f) ed il secondo ad 1 (per l'ipotesi su g). \square

2. Provare che se f e g sono entrambe infiniti [risp. infinitesimi] d'ordini α e β in x_0 , allora il prodotto $f \cdot g$ è un infinito [risp. infinitesimo] d'ordine $\alpha + \beta$ in x_0 .

Risposta. Detto $c(x)$ il solito campione, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{c^{\alpha+\beta}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{c^\alpha(x)} \cdot \frac{g(x)}{c^\beta(x)},$$

e di qui la tesi, viste le ipotesi su f e g . \square

3. Dimostrare che se f e g sono entrambe infiniti d'ordini α e β in x_0 , allora il quoziente $\frac{f}{g}$ è un infinito [risp. infinitesimo] d'ordine $\alpha - \beta$ [risp. $\beta - \alpha$] se $\alpha > \beta$ [risp. $\alpha < \beta$].

4. Mostrare che se f e g sono entrambe infinitesimi d'ordini α e β in x_0 e se g non si annulla intorno ad x_0 , allora il quoziente $\frac{f}{g}$ è un infinitesimo [risp. infinito] d'ordine $\alpha - \beta$ [risp. $\beta - \alpha$] se $\alpha > \beta$ [risp. $\alpha < \beta$].

Risposta. Detto $c(x)$ il solito infinito/infinitesimo campione in x_0 , abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{c^\alpha(x)} \cdot \frac{c^\alpha(x)}{c^\beta(x)} \cdot \frac{1}{\frac{g(x)}{c^\beta(x)}},$$

cosicché, data la convergenza a valori non nulli del primo e del terzo fattore, la funzione f/g ha in x_0 lo stesso comportamento di $c^{\alpha-\beta}$; le tesi si ottengono distinguendo opportunamente i casi. \square

5. La funzione definita in $\mathbb{R} - \{0\}$ ponendo:

$$f(x) := |x|^p \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

con $p > 0$, è un infinitesimo in 0. La f è un infinitesimo dotato di ordine in 0?

Risposta. No, non lo è.

Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{p-\alpha} \sin \frac{1}{x} \begin{cases} = 0 & , \text{ se } 0 < \alpha < p \\ \text{non esiste} & , \text{ se } \alpha \geq p \end{cases}$$

e quindi f non è un infinitesimo di ordine α per nessun $\alpha > 0$. \square

6. La funzione definita in $]0, +\infty[$ ponendo:

$$f(x) := \frac{1}{x^p \log^q x},$$

con $p, q > 0$, è un infinitesimo in $+\infty$. La f è un infinitesimo dotato di ordine in $+\infty$?

Risposta. No, non lo è.

Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-p} \log^q x \begin{cases} = 0 & , \text{ se } 0 < \alpha < p \\ +\infty & , \text{ se } \alpha \geq p \end{cases}$$

e perciò f non è un infinitesimo d'ordine α per alcun $\alpha > 0$. \square

7. La funzione definita in $]0, +\infty[$ ponendo:

$$f(x) := \frac{\log x}{x^p},$$

con $p > 0$, è infinita in 0. La f è un infinito dotato di ordine in 0?

Risposta. No, non lo è.

Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-p} \log x \begin{cases} = 0 & , \text{ se } \alpha > p \\ -\infty & , \text{ se } 0 < \alpha \leq p \end{cases}$$

e perciò f non è un infinito d'ordine α per alcun $\alpha > 0$. \square

8. La funzione definita in $]0, +\infty[$ ponendo:

$$f(x) := \frac{\sin x}{x^p},$$

con $p > 0$ fissato, è un infinitesimo in $+\infty$. La f è un infinitesimo dotato di ordine in $+\infty$?

Risposta. No, non lo è.

Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-p} \sin x \begin{cases} = 0 & , \text{ se } \alpha > p \\ \text{non esiste} & , \text{ se } 0 < \alpha \leq p \end{cases}$$

e quindi f non è un infinitesimo di ordine α per nessun $\alpha > 0$. \square

Esercizio 9: Calcolare (con le tecniche a propria disposizione e lì dove possibile) l'ordine di infinitesimo o di infinito delle funzioni che si presentano nei limiti degli **Esercizi 2 - 5**.

Risposta. Si tratta di sfruttare i Limiti Fondamentali, i Limiti Notevoli, la gerarchia degli infiniti ed i risultati degli **Esercizi 6 - 8** per determinare gli ordini di infinitesimo od infinito nelle funzioni coinvolte nei calcoli.

Forniamo qualche risposta a titolo di esempio, riportando i risultati in **TABELLA 1**. \square

Esercizio 10: Si ponga per definizione:

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \end{aligned}$$

di modo che rimangano definite in tutto \mathbb{R} tre funzioni elementari dette, rispettivamente, *seno iperbolico*, *coseno iperbolico* e *tangente iperbolica*.

1. Provare che \sinh e \tanh sono funzioni dispari in \mathbb{R} , positive in $]0, +\infty[$, negative in $] -\infty, 0[$ e nulle solo in 0.

Dimostrare, invece, che \cosh è una funzione pari e positiva in \mathbb{R} .

Provare che la *relazione fondamentale delle funzioni iperboliche*, i.e. l'uguaglianza:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Risposta. La disparità di \sinh e \tanh è evidente, così come la parità di \cosh .

D'altro canto, poiché $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ ovunque, è chiaro che il segno di $\tanh x$ è completamente determinato da quello di $\sinh x$, il quale è maggiore od uguale a zero se e solo se $e^x \geq e^{-x}$, ossia per $x \geq 0$; da ciò segue quanto asserito nel testo.

Infine, abbiamo:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1,$$

come volevamo. \square

2. Risolvendo esplicitamente le equazioni $\sinh x = y$ e $\tanh x = y$ con $y \in \mathbb{R}$, mostrare che \sinh e \tanh sono funzioni invertibili e determinare l'espressione esplicita delle funzioni inverse (le quali sono chiamate, rispettivamente, *settore seno iperbolico* e *settore tangente iperbolica* e si denotano coi simboli settsinh e setttanh).

TABELLA 1. Alcuni Risultati dell'Esercizio 9.

Funzione	Comportamento	in	Ordine
$x^2 \sin \frac{1}{x}$	infinitesimo	0	superiore ad ogni $\alpha < 2$
e^{4x-x^2}	infinitesimo	$+\infty$	infinitamente grande, cioè superiore ad ogni $\alpha > 0$
$\tan\left(\frac{x^2-2x-3}{x}\right)$	infinitesimo	3	1
$\frac{\cos x}{\log_4 x }$	infinitesimo	$+\infty$	infinitamente piccolo, cioè inferiore ad ogni $\alpha > 0$
$\frac{\sqrt{2x^3-x}}{\sqrt[3]{x^4+3x}}$	infinito	$+\infty$	$\frac{1}{6}$
$\frac{\sqrt{x^3+3x}}{\sqrt[3]{x^4+2x^2}}$	infinito	0^+	$\frac{1}{6}$
$\log\left(\frac{1+x}{x}\right)$	infinitesimo	$-\infty$	1
$\frac{\sin(e^{\sqrt{1+\log x}} - x^7)}{\sqrt[3]{x}}$	infinitesimo	0	superiore ad ogni $\alpha < 1/3$
$\frac{x^2 - e^x - \log_2 x }{2^{-x} + x^{12} + \sqrt{e^x}}$	infinitesimo	$-\infty$	infinitamente grande, cioè superiore ad ogni $\alpha > 0$
$\frac{x}{\cos x - 1}$	infinito	0	1
$\log(\cos x)$	infinitesimo	0	2
$\frac{\arctan \sqrt{x}}{e^{x^2} - 1}$	infinito	0	$\frac{3}{2}$
$\sin(\sqrt{1 + \arctan 3x} - 1)$	infinitesimo	0	1
$1 - \cos \sqrt{ x } + \sin x^2$	infinitesimo	0	1
$\log(1+x) + \sqrt{ x }$	infinitesimo	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1 - \cos \sqrt{ x } + \sin x^2}{\log(1+x) + \sqrt{ x }}$	infinitesimo	0	$\frac{1}{2}$
$(e^x - 1)^3 + x \tan x^2$	infinitesimo	0	3

Risposta. Fissiamo $y \in \mathbb{R}$ e risolviamo:

$$\begin{aligned} \sinh x = y &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}; \end{aligned}$$

L'unica soluzione accettabile è quella col segno + davanti alla radice (l'altra è negativa), quindi:

$$\sinh x = y \Leftrightarrow x = \log\left(\sqrt{1+y^2} + y\right).$$

Ne viene che la funzione settsinh è definita in \mathbb{R} ponendo:

$$\text{settsinh } x := \log \left(\sqrt{1+x^2} + x \right) .$$

Analogamente si trova che l'equazione $\tanh x = y$ ha soluzioni solo se $y \in]-1, 1[$ e che setttanh è la funzione definita in $] -1, 1[$ ponendo:

$$\text{setttanh } x := \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) .$$

□

3. Mostrare che l'equazione $\cosh x = y$ ha due soluzioni distinte (una positiva, l'altra negativa) per $y > 1$ ed unica soluzione per $y = 1$; da ciò dedurre che la funzione \cosh non è invertibile globalmente, ma solo se ristretta agli intervalli $[0, +\infty[$ e $] -\infty, 0]$. Fornire l'espressione esplicita della funzione inversa di \cosh in $[0, +\infty[$ (la quale è detta *settore coseno iperbolico* ed è denotata con settcosh).

Risposta. Innanzitutto osserviamo che, essendo $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ per ogni coppia di reali $a, b \geq 0$ ed $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ se e solo se $a = b$ ⁵, risulta:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x e^{-x}} = 1$$

e $\cosh x = 1$ se e solo se $x = 0$; da ciò segue immediatamente che l'equazione $\cosh x = y$ ha soluzioni solo se $y \geq 1$ e che l'unica soluzione di tale equazione per $y = 1$ è $x = 0$. Nel caso $y > 1$, invece, abbiamo:

$$\begin{aligned} \cosh x = y &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow x = \log \left(y \pm \sqrt{y^2 - 1} \right) , \end{aligned}$$

la soluzione con segno + [risp. -] essendo positiva [risp. negativa]. Conseguentemente, la funzione \cosh è invertibile in $] -\infty, 0]$ ed in $[0, +\infty[$, ma non in tutto \mathbb{R} .

L'inversa locale di \cosh in $[0, +\infty[$ è la funzione settcosh definita in $[1, +\infty[$ ponendo:

$$\text{settcosh } x := \log \left(\sqrt{x^2 - 1} + x \right) .$$

□

4. Sfruttando i Limiti Notevoli di TABELLA 2, provare che:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{settsinh } x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{setttanh } x}{x} &= 1 . \end{aligned}$$

Risposta. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} + \frac{e^{-x} - 1}{2(-x)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

⁵Questa è la classica *disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica* e si dimostra sfruttando il fatto che $(a - b)^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} \cdot \frac{1}{\cosh x} \\
&= 1 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} - \frac{e^{-x} - 1}{2(-x)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{settsinh} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + (x + \sqrt{1+x^2} - 1))}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + (x + \sqrt{1+x^2} - 1))}{x + \sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + (x + \sqrt{1+x^2} - 1))}{x + \sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + (x + \sqrt{1+x^2} - 1))}{x + \sqrt{1+x^2} - 1} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \cdot x\right) \\
&= 1 \cdot (1 + 0) \\
&= 1 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{setttanh} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)}{\frac{2x}{1-x}} \cdot (1-x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

5 (Facoltativo). Provare che valgono per il coseno ed il seno iperbolici formule di addizione e sottrazione analoghe (ma non del tutto uguali) a quelle valide per coseno e seno circolari. In altre parole, esprimere le quantità $\cosh(x_1 \pm x_2)$ e $\sinh(x_1 \pm x_2)$ in termini di $\cosh x_1$, $\cosh x_2$, $\sinh x_1$ e $\sinh x_2$.

Risposta. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\cosh(x_1 \pm x_2) &= \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2 \\
\sinh(x_1 \pm x_2) &= \cosh x_1 \sinh x_2 \pm \sinh x_1 \cosh x_2.
\end{aligned}$$

Proviamo la formula di sottrazione del coseno iperbolico, analogamente ragionandosi negli altri casi. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
4 \cosh(x_1 - x_2) &= 2(e^{x_1 - x_2} + e^{-x_1 + x_2}) \\
&= e^{x_1 - x_2} + e^{x_1 + x_2} + e^{-x_1 + x_2} + e^{-x_1 - x_2} \\
&\quad - e^{x_1 - x_2} - e^{x_1 + x_2} + e^{-x_1 + x_2} - e^{-x_1 - x_2} \\
&= (e^{x_1} + e^{-x_1}) \cdot (e^{x_2} + e^{-x_2}) \\
&\quad - (e^{x_1} - e^{-x_1}) \cdot (e^{x_2} - e^{-x_2}) \\
&= 2 \cosh x_1 \cdot 2 \cosh x_2 - 2 \sinh x_1 \cdot 2 \sinh x_2,
\end{aligned}$$

da cui l'asserto.

□

Esercizio 11: Siano $f, g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

1. Se risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

è vero che si ha pure:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1?$$

In caso affermativo, motivare la risposta; altrimenti, esibire qualche controesempio.

Risposta. No.

Si prendano $f(x) = x + \log x$ e $g(x) = x$. □

2 Se, viceversa, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1,$$

è vero che risulta anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1?$$

In caso affermativo, motivare la risposta; altrimenti, esibire qualche controesempio.

Risposta. Sì.

Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)-g(x)} = 1,$$

dunque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(e^{f(x)-g(x)}) = 0;$$

da ciò segue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} + 1 = 1.$$

□

Esercizio 12: Stabilire se le funzioni definite qui di seguito sono continue in \mathbb{R} ed, in caso negativo, classificarne le discontinuità:

$$(36) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

$$(37) \quad f(x) := \begin{cases} (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-1} & , \text{ se } x \neq 1 \\ 0 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

$$(38) \quad f(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & , \text{ se } x \neq \pm 1 \\ 0 & , \text{ se } x = 1 \\ e & , \text{ se } x = -1 \end{cases}$$

$$(39) \quad f(x) := \begin{cases} x \frac{x-3}{|x-3|} & , \text{ se } x \neq 3 \\ 0 & , \text{ se } x = 3 \end{cases}$$

$$(40) \quad f(x) := \begin{cases} \cos x & , \text{ se } x \geq 0 \\ e^{-x} & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$(41) \quad f(x) := \begin{cases} 3x^2 & , \text{ se } x > 0 \\ x - 3x^2 & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$(42) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

$$(43) \quad f(x) := \begin{cases} \arctan(\tan x) & , \text{ se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (con } k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases} .$$

Risposta. La funzione (36) è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ ed in 0 ha una discontinuità eliminabile, visto che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2 .$$

La funzione (37) è continua in tutto \mathbb{R} : difatti, essa è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ epperò ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-1} = 0 = f(0) .$$

La funzione (38) è continua in $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ ed in ± 1 ha discontinuità di seconda specie, poiché:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = +\infty . \end{aligned}$$

La funzione (39) è continua in $\mathbb{R} - \{3\}$ ed in 3 ha una discontinuità di prima specie: infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^\pm} x \frac{x-3}{|x-3|} = \pm 3 .$$

La funzione (40) è continua in tutto \mathbb{R} giacché $f(0) = \cos 0 = 1$ e:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 . \end{aligned}$$

La funzione (41) è continua in \mathbb{R} poiché $f(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 3x^2 = 0 . \end{aligned}$$

La funzione (42) è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ ed in 0 presenta una discontinuità di seconda specie, visto che i due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$$

non esistono.

Infine, posto $D := \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, la funzione (43) è continua in $\mathbb{R} - D$ ed ha discontinuità di prima specie in ogni punto $x_k \in D$. Per provare ciò, cominciamo ad analizzare il caso $k = 0$: abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \arctan(\tan x) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \arctan(\tan x) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

cosicché x_0 è di discontinuità di prima specie; inoltre, tenendo presente la periodicità di \tan , per $k \neq 0$ troviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \arctan(\tan x) \\ &\stackrel{y=x-k\pi}{=} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \arctan(\tan y) \\ &= -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \arctan(\tan x) \\ &\stackrel{y=x-k\pi}{=} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \arctan(\tan y) \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

e dunque anche x_k è di discontinuità di prima specie. \square

Esercizio 13: Stabilire se esistono valori dei parametri in modo che ognuna delle funzioni elencate risulti continua [continua a destra, continua a sinistra] in tutto il proprio dominio:

$$(44) \quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} & , \text{ se } x > 0 \\ 0 & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{parametri } \alpha, \beta \geq 0)$$

$$(45) \quad f(x) = \begin{cases} \arctan x + \arctan \frac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ a & , \text{ se } x = 0 \end{cases} \quad (\text{parametro } a \in \mathbb{R})$$

$$(46) \quad f(x) := \begin{cases} a & , \text{ se } x \leq -1 \\ b e^{\frac{1}{x^2-1}} & , \text{ se } -1 < x \leq 0 \\ cx^2 + 1 & , \text{ se } x > 0 \end{cases} \quad (\text{parametri } a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Risposta. La funzione (44) è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ ed è certamente continua in 0 da sinistra per ogni valore di $\alpha, \beta \geq 0$; essa è continua in 0 anche da destra se e solo se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} = 0 = f(0),$$

il che accade solo se $\alpha > 0$. D'altra parte, se $\alpha = 0$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x^\beta} \begin{cases} \sin 1 & , \text{ se } \beta = 0 \\ \text{non esiste} & , \text{ se } \beta > 0 \end{cases}.$$

Dunque la funzione assegnata è:

- continua da sinistra in tutto \mathbb{R} per ogni valore dei parametri α e β ,
- continua da destra in $\mathbb{R} - \{0\}$ per ogni valore dei parametri α e β ; inoltre è continua da destra anche in 0, e quindi in tutto \mathbb{R} , se $\alpha > 0$ (per ogni valore di β),
- continua in tutto \mathbb{R} se $\alpha > 0$ (per ogni valore di β),

- continua in $\mathbb{R} - \{0\}$, con in 0 una discontinuità di prima specie se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$,
- continua in $\mathbb{R} - \{0\}$, con in 0 una discontinuità di seconda specie se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

La funzione (45) è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$; per capire cosa accade in 0 calcoliamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\frac{\pi}{2} \\ f(0) &= a\end{aligned}$$

e da ciò traiamo che f è continua in 0 da sinistra [risp. da destra] solo se $a = -\pi/2$ [risp. $a = \pi/2$]. Conseguentemente la funzione (45) è:

- continua da sinistra in $\mathbb{R} - \{0\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e continua da sinistra in \mathbb{R} solo se $a = -\pi/2$,
- continua da destra in $\mathbb{R} - \{0\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e continua da destra in \mathbb{R} solo se $a = \pi/2$,
- continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ e con discontinuità di prima specie in 0 per ogni valore di a .

La funzione (46) è continua in $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$; per capire cosa succede in -1 ed in 0 calcoliamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} a = a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} b e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} b e^{\frac{1}{x^2-1}} = \frac{b}{e} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} cx^2 + 1 = 1 \\ f(-1) &= a \\ f(0) &= \frac{b}{e},\end{aligned}$$

e da ciò traiamo immediatamente che f è continua da sinistra sia in -1 sia in 0 per ogni valore di a , b e c , che f è continua da destra in -1 solo se $a = 0$ e continua da destra in 0 solo se $b = e$ (per ogni valore di c). Pertanto la funzione (46) è:

- continua da sinistra in \mathbb{R} per ogni valore di a , b , c ,
- continua da destra in $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ per ogni valore di a , b , c ; inoltre essa è continua da destra anche in -1 solo se $a = 0$ ed anche in 0 solo se $b = e$,
- continua in tutto \mathbb{R} se $a = 0$ e $b = e$ (per ogni c),
- continua in $\mathbb{R} - \{-1\}$ solo se $b = e$ e $a \neq 0$ (per ogni c), con discontinuità di prima specie in -1 ,
- continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ solo se $a = 0$ e $b \neq e$ (per ogni c), con discontinuità di prima specie in 0,
- continua in $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ con discontinuità di prima specie in -1 ed in 0 per $a \neq 0$ e $b \neq e$ (per ogni c).

□

Esercizio 14: La derivata prima $f'(x_0)$ della funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in X \cap \text{Dr } X$ è definita ponendo:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a patto che il limite al secondo membro *esista e sia finito*.

Usando la definizione, stabilire se le seguenti funzioni sono dotate di derivata prima

nei punti indicati a fianco, calcolandola quando possibile:

$$(47) \quad f(x) := e^x \quad \text{in } x_0 = 0$$

$$(48) \quad f(x) := \cos x \quad \text{in } x_0 = 0$$

$$(49) \quad f(x) := \sin x \quad \text{in } x_0 = \pi$$

$$(50) \quad f(x) := \log\left(\frac{2(x-1)}{x}\right) \quad \text{in } x_0 = 2$$

$$(51) \quad f(x) := \sqrt[3]{x} \quad \text{in } x_0 = 0$$

$$(52) \quad f(x) := x|x| \quad \text{in } x_0 = 0$$

$$(53) \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases} \quad \text{in } x_0 = 0.$$

Risposta. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x - 0} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - 0}{x - 0} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log\left(\frac{2(x-1)}{x}\right) - 0}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log\left(1 + \frac{x-2}{x}\right) - 0}{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x - 0} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

quindi le funzioni (47) – (50), (52) e (53) sono tutte derivabili nei punti indicati, mentre la (51) non lo è.

I valori delle rispettive derivate coincidono coi risultati dei limiti. \square

Esercizio 15: Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo:

$$(54) \quad f(x) := \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0, \end{cases}$$

Usando le definizioni di funzione continua e funzione derivabile (cfr. [Esercizio 14](#)), mostrare che la f è:

- continua in 0 se e solo se $\alpha > 0$;
- derivabile in 0 se e solo se $\alpha > 1$ ed ha $f'(0) = 0$.

Risposta. Evidentemente si ha $f(0) = 0$ e:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \begin{cases} = 0 & , \text{ se } \alpha > 0 \\ \text{non esiste} & , \text{ se } \alpha \leq 0 \end{cases},$$

cosicché f è continua in 0 (ed ivi nulla) se e solo se $\alpha > 0$.

Inoltre, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha}{x} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \begin{cases} = 0 & , \text{ se } \alpha > 1 \\ \text{non esiste} & , \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases},$$

dunque f è derivabile in 0 (con derivata ivi nulla) se e solo se $\alpha > 1$. □

APPENDICE A. TABELLA DI LIMITI NOTEVOLI

TABELLA 2. Limiti Notevoli.

Limite	Risultato	Condizioni
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$	$= 0$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$	$= \frac{1}{2}$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$	$= \log a$	$(a > 0)$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$	$= 1$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$	$= \log_a e = \frac{1}{\log a}$	$(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$	$= \alpha$	$(\alpha \in \mathbb{R})$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$= e$	
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$	$= e$	