

ALCUNI ESERCIZI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE

G. DI MEGLIO

INDICE

Introduzione	1
1. Calcolo delle Derivate di Funzioni Elementari	1
2. Formula di Taylor-MacLaurin ed Applicazioni	7
3. Calcolo Differenziale	9
4. Applicazioni	20
Appendice A. Tabella di Derivate Fondamentali e Regole di Derivazione	26
Appendice B. Polinomi di Taylor-MacLaurin col Resto di Peano	27
Riferimenti bibliografici	30

INTRODUZIONE

In questi fogli ho raccolto alcuni esercizi sul Calcolo Differenziale.

Gli esercizi della prima sezione servono a fare pratica con le derivate fondamentali delle funzioni elementari e con le regole di calcolo.

Quelli proposti nella seconda sezione riguardano la formula di Taylor e le sue applicazioni nel calcolo dei limiti in forma indeterminata.

Nella terza sezione sono riportati alcuni esercizi *teorici* di Calcolo Differenziale, che servono a prendere confidenza con la teoria spiegata a lezione ed a intuirne le potenzialità.

Nell'ultima sezione sono riportati tre esercizi di carattere prettamente applicativo che illustrano come i metodi del Calcolo Differenziale possono essere sfruttati in varie applicazioni.

Ulteriori esercizi possono essere reperiti nei testi riportati in bibliografia, i quali sono stati presi come spunto per questi fogli.

N.B.: Gli esercizi sullo studio della funzione non sono riportati in questi fogli, bensì nei fascicoli [DM1] e [DM2], reperibili sulla mia pagina web-docenti.

1. CALCOLO DELLE DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

Esercizio 1 (Potenze Intere):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare

la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

- (1) $x^6 - 2x^3 + 6x$
- (2) $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ ($N \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$)
- (3) $\frac{4}{x^3} + 5x^4 - \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^8}$
- (4) $(5x^3 + 3) \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n}$ ($N \in \mathbb{N}$)
- (5) $\frac{1}{1 - x^2}$
- (6) $\frac{(x+a)(x+b)}{x^N}$ ($N \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$)
- (7) $\frac{ax^2 + 2bx + c}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$ ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, a, \alpha \neq 0$)
- (8) $\frac{a^2 b^2 c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ($a, b, c \neq 0$)
- (9) $\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^4$
- (10) $\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

Esercizio 2 (Potenze Razionali e Radici):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

- (11) $\sqrt{x^2 + 1} - x$
- (12) $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}$
- (13) $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ($a \neq 0$)
- (14) $\sqrt{\frac{x+a}{x-b}}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
- (15) $\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-b}}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
- (16) $(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ ($a \in \mathbb{R}$)
- (17) $x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{-1/2}$
- (18) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{1+\sqrt{x}}}$
- (19) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$.

Esercizio 3 (Funzioni Circolari):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare

la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

- (20) $\sin^3 x - 3 \sin x$
- (21) $\sin^2 \omega x$ ($\omega > 0$)
- (22) $\frac{x^2}{\cos x}$
- (23) $\frac{x}{1 - \cos x}$
- (24) $x + \sin x \cos x$
- (25) $\tan x + \frac{1}{\cos x}$
- (26) $\sin^n x \cos nx$ ($n \in \mathbb{N}$)
- (27) $\cos^n x \cos nx$ ($n \in \mathbb{N}$)
- (28) $x^2 \tan(x^3 + x + 1)$
- (29) $\frac{x^2}{1 + \cos x} + \tan \frac{x}{2}$.

Esercizio 4 (Funzioni Circolari Inverse):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

- (30) $x \arcsin x$
- (31) $\sin(2 \arctan x)$
- (32) $\frac{x}{1 + x^2} - \arctan x$
- (33) $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ ($a > 0$)
- (34) $\arcsin(\sin x)$
- (35) $\arccos(\sin x)$
- (36) $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right)$ ($a > b > 0$)
- (37) $\arctan(x - \sqrt{1 + x^2})$
- (38) $\arctan \frac{1 - \cos x}{\sin x}$
- (39) $\arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$
- (40) $\arcsin \frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}$ ($a \in \mathbb{R}$).

Esercizio 5 (Logaritmi):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

- (41) $x(\log x - 1)$
- (42) $x^2(3 \log x + 5)$
- (43) $x^\alpha(\beta \log x + \gamma)$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(44) \quad \log \frac{x+a}{x+b} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(45) \quad \log_3 \tan \frac{x}{2}$$

$$(46) \quad \log_a (\log_b x) \quad (a, b > 0, a, b \neq 1)$$

$$(47) \quad \log (\log (\log x))$$

$$(48) \quad \log \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \right) - \frac{1}{2x^2}$$

$$(49) \quad \log_{1/10} \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$$(50) \quad \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x$$

$$(51) \quad x \tan x + \log(\cos x)$$

$$(52) \quad \arctan \log \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$(53) \quad \frac{x^2}{\log x}.$$

Esercizio 6 (Funzioni Iperboliche):

Sfruttando i risultati dell'Esercizio 10 di [DM0], le derivate delle funzioni elementari “di base”, le *regole di derivazione* ed il *Teorema di Derivazione della Funzione Composta*, determinare l'insieme di derivabilità e calcolare la derivata delle funzioni iperboliche e delle loro inverse:

$$\begin{array}{lll} \cosh x, & \sinh x, & \tanh x, \\ \operatorname{settcosh} x, & \operatorname{settsinh} x, & \operatorname{setttanh} x. \end{array}$$

Esercizio 7 (Esponenziali e Funzioni Iperboliche):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

$$(54) \quad 4^x$$

$$(55) \quad e^{e^x}$$

$$(56) \quad 2^{\frac{x}{\log x}}$$

$$(57) \quad x e^{1-\cos x}$$

$$(58) \quad \log_2(2^x + 2^{-x} - 2)$$

$$(59) \quad 6^{\sqrt[5]{\log^2(\sin^3(x^2))}}$$

$$(60) \quad \tanh(\log x)$$

$$(61) \quad \cosh(\sinh x)$$

$$(62) \quad e^{\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$(63) \quad \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$$

$$(64) \quad \sqrt{\arctan \left(\sinh \frac{x}{3} \right)}.$$

Esercizio 8 (Funzioni Iperboliche Inverse):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare

la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

$$(65) \quad \operatorname{settcosh} e^x$$

$$(66) \quad \operatorname{setttanh} x - \operatorname{setttanh} \frac{1}{x}$$

$$(67) \quad \operatorname{settsinh} \frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}$$

$$(68) \quad \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{setttanh} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tanh \frac{x}{2} \right) \quad (a > b > 0)$$

$$(69) \quad \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{settcosh} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (a > 0)$$

$$(70) \quad \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{settsinh} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (a > 0)$$

$$(71) \quad \operatorname{settsinh} \frac{\sinh a \sinh x}{1 + \cosh a \cosh x} \quad (a \in \mathbb{R}) .$$

Esercizio 9 (Varie):

Dopo averne determinato l'insieme di definizione e quello di derivabilità, calcolare la derivata di ognuna delle seguenti funzioni:

$$(72) \quad x^3 \sqrt[3]{x^2}$$

$$(73) \quad \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$(74) \quad 5^x + \arcsin x + \log_3 x$$

$$(75) \quad \frac{1}{x^2} + \arctan x - \sqrt[5]{x}$$

$$(76) \quad \tan x - 2 \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(77) \quad 7 \arccos x - 10^x + x \sqrt[3]{x}$$

$$(78) \quad \sin x \arcsin x$$

$$(79) \quad x \log_3 x$$

$$(80) \quad (1 + x^2) \arctan x$$

$$(81) \quad 2^{3^{5^x}}$$

$$(82) \quad \log_2 \log_3 \log_5 x$$

$$(83) \quad x \cos x \log_4 x$$

$$(84) \quad 7^x \arcsin x \tan x$$

$$(85) \quad \frac{1}{\log_2 x}$$

$$(86) \quad \frac{1}{\sin x}$$

$$(87) \quad \frac{\pi}{x + \arcsin x}$$

$$(88) \quad \frac{3}{x \log x}$$

$$(89) \quad \frac{x + \log x}{\arcsin x}$$

- (90) $\frac{4^x + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$
 (91) x^x
 (92) $\log_x x$
 (93) $\log_{\sin x} \cos x$
 (94) $(\sin x)^{\cos x}$
 (95) $(\cos x)^{\sin x}$
 (96) $x|x|$
 (97) $\sqrt[4]{|x|}$
 (98) $|x| + |x^2 - x|$
 (99) $\sqrt{|x| - |x - 1|}$.

Esercizio 10 (Derivazione delle Funzioni Inverse):

Provare che ognuna delle funzioni elencate di seguito è invertibile nel suo dominio naturale e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto indicato.

- (100) $f_1(x) := x^3 + x$ in $y_0 = 2$
 (101) $f_2(x) := x^3 + x - 9$ in $y_0 = 1$
 (102) $f_3(x) := x + e^x$ in $y_0 = 2$
 (103) $f_4(x) := 2x + \log x$ in $y_0 = 2$
 (104) $f_5(x) := x|x| + 1$ in $y_0 = -3$
 (105) $f_6(x) := \frac{4x^3}{x^2 + 1}$ in $y_0 = 2$
 (106) $f_7(x) := x\sqrt{x^2 + 3}$ in $y_0 = -2$.

[Suggerimento: Per provare l'invertibilità di f_n basta mostrare che f_n è strettamente monotona.

Per il resto, usare il *Teorema sulla Derivazione della Funzione Inversa* dopo aver notato che $f_n(x) = y_0$ ha unica soluzione $x_0 = g(y_0)$ che si “indovina” guardando attentamente.^{1]}

Esercizio 11:

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \text{ se } x > 0 \\ 0 & , \text{ se } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Dimostrare che f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, con derivata prima continua in tutto $\mathbb{R}$.

2. Mostrare che:

$$D^2 \left[e^{-\frac{1}{x}} \right] = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

e dedurre che f è derivabile due volte in tutto $\mathbb{R}$ con derivata seconda continua.

¹“Gauss non risolve le equazioni... Sono loro stesse a rivelargli la soluzione quando lui le fissa minacciosamente” [CFGF].

3. Generalizzare il punto **2**. Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio P_n tale che:

$$D^n \left[e^{-\frac{1}{x}} \right] = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

e dedurre che f ha derivata n -esima continua in $\mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Qual è il grado di P_n ?

4. Fissato $a > 0$, considerare la funzione definita ponendo:

$$\varphi_a(x) := \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)}.$$

Mostrare che:

- (i) $\varphi_a(x) \geq 0$ in $\mathbb{R}$;
- (ii) $\varphi_a(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $\varphi_a(x) = 1$ per $x \geq a$;
- (iii) φ_a è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$;

e tracciare un grafico qualitativo di φ_a .²

5. Fissato $\varepsilon > 0$, considerare la funzione definita ponendo:

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} f \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right).$$

Dimostrare che:

- (i) $\eta_\varepsilon(x) \geq 0$ in $\mathbb{R}$;
- (ii) $\eta_\varepsilon(x) = 0$ per $|x| \geq \varepsilon$;
- (iii) η_ε è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$;

e tracciare un grafico qualitativo di η_ε .³

2. FORMULA DI TAYLOR-MACLAURIN ED APPLICAZIONI

Esercizio 12 (Formule di Taylor):

Determinare le formule di Taylor al 4° ordine per le funzioni indicate nei punti

²Le funzioni del tipo φ_a vengono solitamente dette *funzioni di taglio* (o *cut-off functions*). Esse mostrano che è possibile “raccordare” le due quote 0 ed 1 in modo *liscio*, cioè usando il grafico di una funzione derivabile infinite volte. Tali funzioni si rivelano strumento di una certa importanza in numerose questioni dell’Analisi.

³Le funzioni del tipo η_ε vengono solitamente dette *funzioni regolarizzanti* (o *mollificatori*). Esse si rivelano strumento di una certa importanza nell’approssimazione di funzioni non derivabili mediante funzioni C^∞ .

indicati:

- | | | |
|-------|--------------------------------------|--------------------------|
| (107) | $f_1(x) = \sin(\pi x)$ | in $x_0 = 1$ |
| (108) | $f_2(x) = \cos x$ | in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ |
| (109) | $f_3(x) = e^{x/3}$ | in $x_0 = 3$ |
| (110) | $f_4(x) = \sqrt{x}$ | in $x_0 = 4$ |
| (111) | $f_5(x) = \log x$ | in $x_0 = e$ |
| (112) | $f_6(x) = \log(e^x + 1)$ | in $x_0 = 0$ |
| (113) | $f_7(x) = \tan x$ | in $x_0 = 0$ |
| (114) | $f_8(x) = \sinh 2x$ | in $x_0 = 1$ |
| (115) | $f_9(x) = \operatorname{settcosh} x$ | in $x_0 = -1$ |
| (116) | $f_{10}(x) = e^{e^x}$ | in $x_0 = 0$. |

Esercizio 13 (Formule di MacLaurin di Funzioni Composte):

Scrivere la formula di MacLaurin al 4° ordine per le seguenti funzioni composte:

- | | |
|-------|--|
| (117) | $f_1(x) = \sqrt{1 - 3x^4} - 1$ |
| (118) | $f_2(x) = \tan(e^x - 1)^2$ |
| (119) | $f_3(x) = e^{\sin x} - 1 - 2 \sin \frac{x}{2}$ |
| (120) | $f_4(x) = e^{\sin x} + \cos x - 2 \left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)$ |
| (121) | $f_5(x) = \sin \left(\log(1 + x \sin x) \right)$ |
| (122) | $f_6(x) = e^{2 \cos x - 2}$ |
| (123) | $f_7(x) = x^2 \log(1 + x \arctan x)$ |
| (124) | $f_8(x) = \sin(x + x^3) - \sin x$ |
| (125) | $f_9(x) = \sqrt{1 + \sin x - x \cos x}$ |
| (126) | $f_{10}(x) = e^{x \cos x} - \log^2(1 + \sqrt{x}) - 1$. |

[**Suggerimento:** Usare la tecnica degli sviluppi innestati (cfr. APPENDICE B).]

Esercizio 14:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed f la funzione definita ponendo:

$$f(x; a, b) := \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}.$$

1. Scrivere la formula di MacLaurin al sesto ordine della funzione $f(x; a, b)$ col resto nella forma di Peano.

2. Determinare a, b in modo che f sia infinitesimo del massimo ordine possibile in 0 e calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x; a, b)}{x^6}.$$

Esercizio 15:

Sfruttando opportunamente la formula di MacLaurin, calcolare i seguenti limiti:

$$(127) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\sin x + \cos x + x^2)}{\tan^2 \sqrt{x^3}}$$

$$(128) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2}$$

$$(129) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}}$$

$$(130) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} + \log x - \log(x+1)}{\tanh^2 \frac{3}{x}}$$

$$(131) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \log(1+\sin x)}{x - \sin x}$$

$$(132) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2(e^x - 1) - x^3 - \log(1 + x \sin x)}{\sqrt{1 + 3x^4} - 1}$$

$$(133) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \cos x - 2 \left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)}{3 \tan x - \sin 3x}$$

$$(134) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2)^2 \log x + 2x^3 - x^4 \log(x+2)}{x^2 \log(1 + x \arctan x)}.$$

Esercizio 16:

Sia f una funzione definita e derivabile due volte in un intorno I di $x_0 = 2$ tale che:

$$f(x) = 3 + \frac{7}{2}(x-2) - \frac{11}{3}(x-2)^2 + o((x-2)^2)$$

in I .

1. Provare che f è invertibile in un conveniente intorno di x_0 e, detta g la sua funzione inversa, scrivere il polinomio di Taylor al primo ordine di g in $y_0 = 3$.

2. Mostrare che la funzione $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) := \begin{cases} 6 + \frac{\log(x-1)}{x-2} - \frac{4}{x-1} & , \text{ se } x \neq 2 \\ 3 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

ha come polinomio di Taylor del secondo ordine quello scritto sopra.

3. CALCOLO DIFFERENZIALE

Esercizio 17 (Derivate di funzioni pari e dispari):

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale e bilanciato⁴ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Provare che se f è pari ed è derivabile internamente ad I , la funzione derivata prima $f' : \text{int } I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione dispari.

2. Provare che se f è dispari ed è derivabile internamente ad I , la funzione derivata prima $f' : \text{int } I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione pari.

[**Suggerimento:** Scrivere esplicitamente i rapporti incrementali in x_0 e $-x_0$, sfruttare le proprietà di simmetria di f ed un opportuno cambiamento di variabile nel

⁴Come detto a lezione, ciò significa che $x \in I \Rightarrow -x \in I$.

limite.]

3. Generalizzare i risultati **1** e **2** a derivate d'ordine superiore.

4. Se f è pari ed è derivabile da sinistra e da destra in $0 \in I$, le derivate destra e sinistra $f'_+(0)$ ed $f'_-(0)$ sono legate da una relazione. Quale?

Se f è derivabile in 0 , quanto vale necessariamente la derivata prima in tale punto?

[Suggerimento: Sfruttare un opportuno cambiamento di variabile nel limite del rapporto incrementale.]

5. Se f è pari ed è derivabile $N \geq 1$ volte in 0 , quanto valgono le derivate di ordine *dispari* in tale punto?

Calcolare il valore di della derivata undicesima $f^{(11)}(0)$ della funzione definita in $\mathbb{R}$ ponendo:

$$f(x) := \frac{\sinh x^3}{1+x^2}.$$

6. Se f è dispari e continua in 0 , provare che le tre condizioni:

(i) f è derivabile in 0 ,

(ii) f è derivabile in 0 da sinistra,

(iii) f è derivabile in 0 da destra,

sono equivalenti.

[Suggerimento: Per noti fatti della teoria, le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) ed (i) $\Rightarrow$ (iii) sono vere. Per terminare la dimostrazione basta allora far vedere che (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) e che è necessariamente $f'_-(0) = f'_+(0)$.]

Esercizio 18 (Derivate delle Funzioni Periodiche):

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$.

1. Mostrare che se f è derivabile in $\mathbb{R}$ allora anche f' è periodica di periodo T .

2. Generalizzare questo enunciato alle derivate d'ordine superiore.

Esercizio 19 (Proprietà dei Polinomi):

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado $N \geq 1$.

1. Provare che esistono un intorno $I \in \mathcal{I}(+\infty)$ ed un intorno $J \in \mathcal{I}(-\infty)$ tali che p conserva segno costante in I ed in J .

2. Provare che esistono un intorno $I' \in \mathcal{I}(+\infty)$ ed un intorno $J' \in \mathcal{I}(-\infty)$ tali che p è strettamente monotono in I' ed in J' .

3. È possibile dire qualcosa di analogo circa la convessità o la concavità di p intorno a $\pm\infty$?

Esercizio 20 (Proprietà delle Funzioni Razionali):

Sia $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una funzione razionale.

1. Provare che esistono un intorno $I \in \mathcal{I}(+\infty)$ ed un intorno $J \in \mathcal{I}(-\infty)$ tali che f conserva segno costante in I ed in J .
2. Provare che f è definitivamente strettamente monotona intorno a $+\infty$ ed a $-\infty$; in altre parole, mostrare che esistono intorni $I' \in \mathcal{I}(+\infty)$ e $J' \in \mathcal{I}(-\infty)$ tali che f è strettamente monotona in I' ed in J' .
3. È possibile dire qualcosa di simile circa la convessità o la concavità di f intorno a $\pm\infty$?
4. Cosa si può dire circa la monotonia e la convessità/concavità intorno a $\pm\infty$ delle funzioni $\arctan f(x)$ e $\log |f(x)|$?

Esercizio 21:

1. Provare che non esiste alcun polinomio $p(x)$ tale che l'uguaglianza:

$$p(x) = x^x$$

valga per ogni $x > 0$.

[**Suggerimento:** Per assurdo, supporre che p esista; chiaramente è $\text{grad } p \geq 2$ (perché?) e $p(x) > 0$ per $x > 0$; concludere sfruttando il *Teorema dei Carabinieri*, dopo aver notato che per $x \geq \text{grad } p + 1$ risulta $0 \leq \frac{p(x)}{x^x} \leq \frac{p(x)}{x^{\text{grad } p + 1}}$.]

2. Più in generale, provare che se $q(x)$ ed $r(x)$ sono polinomi tali che:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad q(x) > 0$$

e se esiste un polinomio $p(x)$ tale che:

$$p(x) = (q(x))^{r(x)}$$

per ogni $x > 0$, allora o $q(x)$ è costante oppure lo è $r(x)$.

[**Suggerimento:** Per assurdo supporre che esistano $q(x)$ ed $r(x)$ non costanti e tali che $p(x) = (q(x))^{r(x)}$ per $x > 0$; dalle ipotesi su $q(x)$ segue che esiste $m > 0$ tale che $x > 0 \Rightarrow q(x) \geq mx$, mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = -\infty$ oppure $+\infty$; nel primo caso, concludere che $p(x)$ è costante e dunque $q(x)$ è costante; nel secondo caso, ragionare come al punto 1 sfruttando il fatto che $r(x) \geq \text{grad } p + 1$ per x “sufficientemente grande”.]

Esercizio 22 (Rapporti Incrementali Simmetrici):

Siano $a < b \in \widehat{\mathbb{R}}$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in]a, b[$.

1. Provare che se f è derivabile in x_0 , allora il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

esiste finito ed è uguale ad $f'(x_0)$.⁵

[**Suggerimento:** Sommando e sottraendo $f(x_0)$ al numeratore si ottiene...]

⁵La quantità $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ è usualmente detta *rapporto incrementale simmetrico* di f in x_0 ed valore del suo limite per $h \rightarrow 0$ (quando esiste) è chiamato *derivata simmetrica* di f in x_0 .

2. In generale, non è vero che la condizione:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = l \in \mathbb{R}$$

implica che f è derivabile in x_0 . Produrre un esempio che illustri tale circostanza.

3. Mostrare che se f è derivabile in x_0 da destra e da sinistra, allora il limite in **1** fornisce la media aritmetica delle derivate destra e sinistra di f in x_0 , cioè provare che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{f'_+(x_0) + f'_-(x_0)}{2}.$$

Quanto vale, invece, il:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{(\alpha + \beta)h},$$

(per fissati $\alpha, \beta > 0$)?

[**Suggerimento:** Procedere come al punto **1**.]

4. Supponendo che f sia derivabile in $]a, b[$ e derivabile due volte in x_0 , dimostrare che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0).$$

È vero il viceversa?

[**Suggerimento:** Usare opportunamente la *Formula di Taylor col Resto di Peano* o il *Teorema di de l'Hôpital*.]

Esercizio 23:

Siano $a < b \in \widehat{\mathbb{R}}$ ed $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che ogni punto $x_0 \in]a, b[$ è di minimo relativo per f .

Provare che se f è derivabile in $]a, b[$, allora essa è costante.

Esercizio 24 (Disuguaglianze ed Altre Amenità):

Sfruttando le tecniche del Calcolo Differenziale, risolvere i seguenti esercizi.

1. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo:

$$f_a(x) := e^{ax} - a^2x$$

è monotona in $[0, +\infty[$.

2. Determinare se esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione:

$$f_\alpha(x) := e^x - \alpha x^3$$

è convessa in $\mathbb{R}$.

3. Provare che per ogni numero $n \in \mathbb{N}$ la disuguaglianza:

$$e^{\frac{x}{2} + nx^4} \geq \frac{1}{2}$$

è valida per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4. Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$e^x + x^2 - 2n^2x \geq 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$?

5. Qual è il più grande valore di $n \in \mathbb{N}$ per il quale risulta:

$$e^{|x|} - |x| + \cos x \geq n$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$?

6. Provare che la disuguaglianza:

$$1 + x \leq e^x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

è valida per ogni $x \in [0, 1]$.

[**Suggerimento:** Notare che i problemi proposti si riducono allo studio di determinate proprietà (monotonia, convessità, esistenza di estremi relativi/assoluti) di opportune funzioni derivabili.]

7. Provare che comunque si scelgano due numeri reali $1 < p < q$ risulta:

$$(M) \quad \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{x^q + y^q}{2}\right)^{1/q}$$

per ogni $x, y \geq 0$.

Per quali valori di x ed y si realizza l'uguaglianza?

[**Suggerimento:** Notare che la disuguaglianza è vera per $x = y = 0$, quindi si può supporre che almeno uno dei due numeri sia > 0 , diciamo $x > 0$; dividendo per x e semplificando il semplificabile, si vede che per provare la (M) basta dimostrare un'analoga disuguaglianza che coinvolge l'unica variabile ausiliaria $t = y/x \geq 0$; procedere come nei punti precedenti.]

Esercizio 25 (Teorema di Rolle Generalizzato):

Siano $a < b \in \widehat{\mathbb{R}}$ ed $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $]a, b[$.

Provare che se f è regolare in a ed in b e se:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l \in \widehat{\mathbb{R}},$$

allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

[**Suggerimento:** Se $a, b, l \in \mathbb{R}$ allora ci si può ricondurre al *Teorema di Rolle* mediante prolungamento continuo di f su a e b . Se almeno uno tra a , b ed l non è un numero reale, si può ragionare sfruttando la composizione con funzioni elementari.

Supponendo, tanto per fissare le idee, che $a, b \in \mathbb{R}$ e che $l = +\infty$ (gli altri casi si analizzano allo stesso modo), provare che la funzione composta $\varphi(x) := \arctan f(x)$ si può prolungare su $[a, b]$ in modo da soddisfare le ipotesi di Rolle.]

Esercizio 26 (Un Altro Teorema di Tipo Rolle):

Siano $a < b \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$.

Provare che se $f(a) = f(b)$, allora comunque si scelga $k \in \mathbb{R}$ esiste almeno un $c \in]a, b[$ tale che:

$$f'(c) = k \left(f(c) - f(a) \right).$$

[**Suggerimento:** Considerare la funzione ausiliaria $\varphi(x) := e^{-kx}(f(x) - f(a))$.]

Esercizio 27 (Teorema di Flett):

Siano $a < b \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in $]a, b[$.⁶

1. Provare che se $f'(a) = f'(b)$ allora esiste un punto $\xi \in]a, b[$ tale che:

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = f'(\xi).$$

[**Suggerimento:** Considerare la funzione ausiliaria ϑ definita in $[a, b]$ ponendo:

$$\vartheta(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) & , \text{ se } a < x \leq b \\ 0 & , \text{ se } x = a \end{cases}$$

e mostrare che essa è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ con derivata ivi continua; distinguere i casi $\vartheta(b) = 0$, $\vartheta(b) > 0$ e $\vartheta(b) < 0$, provando che in ognuno di essi è possibile applicare il *Teorema di Rolle* per determinare un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $\vartheta'(\xi) = 0$; concludere.]

2. Fornire un'interpretazione geometrica del punto 1.

Esercizio 28:

Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, +\infty[$ e derivabile in $]a, +\infty[$.

Provare che se esistono $x_0 \geq a$ ed una costante $m > 0$ tali che:

$$x > x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq m \quad [\text{risp. } f'(x) \leq -m]$$

allora f è regolare in $+\infty$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad [\text{risp. } = -\infty].$$

[**Suggerimento:** Usare il *Teorema di Lagrange*.]

Esercizio 29:

Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, +\infty[$ e derivabile in $]a, +\infty[$.

1 (Teorema dell'Asintoto). Si assuma che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m,$$

con $l, m \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Dimostrare che se $l \in \mathbb{R}$ (cioè se f ha un asintoto orizzontale a destra) allora $m = 0$.

[**Suggerimento:** Scelto $x > a$, applicare il *Teorema di Lagrange* nell'intervallo $[x, 2x]$; passare al limite per $x \rightarrow +\infty$.]

2. Si supponga che esistano $x_0 \geq a$ ed $M \geq 0$ tali che

$$x > x_0 \quad \Rightarrow \quad |f'(x)| \leq M$$

e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m$ con $m \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Provare che $m = 0$.

[**Suggerimento:** Come sopra.]

3. Le ipotesi fatte in 1 e 2 sul comportamento in $+\infty$ della derivata sono ottimali, nel senso che gli enunciati smettono di esser validi se non si assume come ipotesi la

⁶S'intende che f derivabile in $]a, b[$ ed è pure derivabile in a da destra e in b da sinistra.

regolarità della derivata in $+\infty$.

Come controesempio, mostrare che $f(x) := \frac{\sin x^2}{x}$ ha limite finito in $+\infty$ e però che f' non regolare in $+\infty$.

Esercizio 30 (Derivata Seconda della Funzione Inversa):

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione invertibile e derivabile due volte internamente ad I che soddisfa le ipotesi del *Teorema di Derivazione della Funzione Inversa*.

1. Mostrare che anche $g := f^{-1}$ è derivabile due volte internamente ad I e determinare una formula esplicita per il calcolo della derivata seconda g'' .
2. Calcolare la derivata seconda delle funzioni inverse di quelle proposte nell'Esercizio 10 nei punti ivi specificati.
3. Scrivere il polinomio di Taylor d'ordine 2 in $y_0 = 3$ della funzione g proposta nell'Esercizio 16.
4. Provare che se f è crescente e convessa in I allora g è crescente e concava.

Esercizio 31 (Funzioni Lipschitziane):

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che f è una *funzione lipschitziana*⁷ in I se esiste una costante $L \geq 0$ (detta *costante di Lipschitz*) tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|.$$

1. Dimostrare che la funzione $f(x) := |x|$ è lipschitziana in $\mathbb{R}$.
2. Mostrare che, se f è lipschitziana in I , allora f è uniformemente continua in I .
3. Provare che se f è derivabile internamente ad I e se f' è limitata in I , i.e. se esiste una costante $M \geq 0$ tale che $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in \text{int } I$, allora f è lipschitziana in I con costante $L = M$.

[**Suggerimento:** Usare il *Teorema di Lagrange*.]

4. Dimostrare che le funzioni seno e coseno sono lipschitziane in $\mathbb{R}$, così come la funzione $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$.

Esercizio 32 (Funzioni Hölderiane):

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che f è una *funzione hölderiana*⁸ in I se e solo se esistono un $\gamma > 0$ (detto *ordine della funzione hölderiana*) ed una costante $H \geq 0$ tali che:

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leq H |x_2 - x_1|^\gamma$$

(si noti che tale condizione è una generalizzazione della condizione di Lipschitz dell'Esercizio precedente).

1. Dimostrare che la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \sqrt{x}$ è hölderiana in $[0, +\infty[$ d'ordine $\gamma = 1/2$.

⁷Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903), matematico tedesco.

⁸Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937), matematico tedesco.

2. Mostrare che una funzione f hölderiana in I è uniformemente continua in I .
3. Provare che ogni funzione hölderiana in I d'ordine $\gamma > 1$ è derivabile internamente ad I ed ha derivata identicamente nulla.
4. Dimostrare che una funzione composta da funzioni hölderiane è ancora una funzione hölderiana.

Esercizio 33:

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte internamente ad I .

1. Provare che se esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ tali che $f(x_n) = 0$ per $n = 1, 2, 3$ allora f' si annulla almeno due volte ed f'' si annulla almeno una volta internamente ad I .

[**Suggerimento:** Usare il *Teorema di Rolle*.]

2. Generalizzare. Se esistono N punti $x_1 < x_2 < \dots < x_N \in I$ tali che $f(x_n) = 0$ per $n = 1, 2, \dots, N$ allora f' ed f'' si annullano, rispettivamente, almeno $N - 1$ ed almeno $N - 2$ volte internamente ad I .

3. Cosa si può dire nel caso in cui f sia derivabile k volte (con $k \geq 2$)? Dimostrare quanto congetturato.

4. Dimostrare che ogni polinomio di grado $N \geq 1$ ha al più N radici reali.

[**Suggerimento:** Supporre per assurdo che il numero r di radici reali del polinomio sia $> N$; per **3** la derivata N -esima del polinomio dovrebbe avere qualche zero in $\mathbb{R}$; concludere.]

Esercizio 34:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $]a, b[$ e dotata di derivata destra in a e sinistra in b .

Provare che se $f'_+(a) < 0$ ed $f'_-(b) > 0$ allora f ha un punto di minimo in $]a, b[$.

Esercizio 35 (Proprietà di Darboux per le Derivate):

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile internamente ad I .

1. Provare che la funzione $f' : \text{int } I \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa la seguente proprietà:

$$\forall x_1 < x_2 \in I, \text{ la } f' \text{ assume in } [x_1, x_2] \text{ tutti i valori compresi tra } f'(x_1) \text{ ed } f'(x_2),$$

detta *proprietà di Darboux*⁹.

[**Suggerimento:** Supporre (per fissare le idee) che $f'(x_1) < f'(x_2)$ e, scelto un qualsiasi $m \in]f'(x_1), f'(x_2)[$, considerare la funzione ausiliaria $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $g(x) := f(x) - mx$. Provare che g ha un punto di minimo in $]x_1, x_2[$ e concludere.]

⁹Gaston Darboux (1842 – 1917), matematico francese.

2. Dedurre che la funzione f' ha come immagine un intervallo.

3. La funzione definita ponendo:

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \leq 0 \\ 1 & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

è dotata di primitiva in $\mathbb{R}$? In altri termini, esiste qualche funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f'(x) = \varphi(x)$?

Giustificare la risposta.

Esercizio 36 (Derivabilità à la Carathéodory¹⁰):

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in X \cap \text{Dr } X$.

Si dice che f è *derivabile secondo Carathéodory in x_0* se e solo se esiste una funzione $\varphi_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

(C1) φ_{x_0} è continua in x_0 ,

(C2) $\forall x \in X, \quad f(x) = f(x_0) + \varphi_{x_0}(x) \cdot (x - x_0)$.

Si noti che il concetto di derivabilità secondo Carathéodory, contrariamente a quello usuale (dovuto a Cauchy¹¹), è dato indipendentemente dal valore della “derivata” in x_0 .

1. Provare che una funzione f è derivabile in x_0 (secondo l’usuale definizione) se e solo se essa è derivabile secondo Carathéodory in x_0 .

[**Suggerimento:** Basta determinare esplicitamente φ_{x_0} . Sfruttare i rapporti incrementali.]

2. Se f è derivabile secondo Carathéodory in x_0 , quanto vale la derivata usuale $f'(x_0)$?

3. Dimostrare la regola di derivazione del prodotto usando la derivata à la Carathéodory.

Confrontare la dimostrazione ottenuta con quella usuale.

Esercizio 37:

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che:

$$(E) \quad \begin{cases} f'(x) = f(x) & , \text{ per } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

1. Provare che f è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$.

Determinare la relazione che intercorre tra f e la sua derivata n -esima.

[**Suggerimento:** Usare la tecnica di *bootstrap*.]

2. Scrivere il polinomio di Taylor di f centrato in 0 d’ordine n .

3. Provare che il problema (E) ha unica soluzione.

¹⁰Constantin Carathéodory (1873 – 1950), matematico greco.

¹¹Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), matematico francese, fondatore del Calcolo Infinitesimale “moderno”.

[**Suggerimento:** Siano $g(x)$ una seconda funzione che soddisfa (E) e $\varphi(x) := f(x) - g(x)$; la funzione φ soddisfa l'equazione $\varphi'(x) - \varphi(x) = 0$ ergo, moltiplicando membro a membro per e^{-x} e ricordando la *regola di derivazione del prodotto*, abbiamo $(e^{-x}\varphi(x))' = 0$; da ciò segue che $e^{-x}\varphi(x) = C$, con la costante C che si può calcolare sfruttando la condizione $\varphi(0) = 0$. Concludere.]

4. Determinare esplicitamente la soluzione $f(x)$ di (E) usando la tabella delle derivate fondamentali TABELLA 1.

Esercizio 38 (Verso una Definizione Rigorosa di Seno e Coseno):

Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili in $\mathbb{R}$ tali che:

$$(S) \quad \begin{cases} f'(x) = -g(x) \\ g'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}.$$

1. Provare che f e g sono derivabili indefinitamente in $\mathbb{R}$.

Determinare le relazioni che intercorrono tra f e g e le loro prime quattro derivate.

[**Suggerimento:** Usare la tecnica di *bootstrap*.]

2. Mostrare che la funzione $V(x) = f^2(x) + g^2(x)$ è costante in $\mathbb{R}$; calcolare il suo valore.

Dedurre che $|f(x)|, |g(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che f e g non si annullano mai contemporaneamente.

[**Suggerimento:** Moltiplicare la prima equazione di (S) per $2f(x)$, la seconda per $2g(x)$ e sommare membro a membro; dedurre che $V(x)$ è costante.]

3. Dimostrare che esiste un intorno di 0, diciamo $] -\delta, \delta[$ con $\delta > 0$, tale che:

(a) g è strettamente crescente in $] -\delta, \delta[$,

(b) f è strettamente crescente in $] -\delta, 0]$ e strettamente decrescente in $[0, \delta[$.

[**Suggerimento:** Per *Permanenza del Segno* risulta $f(x) > 0$ in un conveniente intorno di 0...]

4. Detto $\alpha > 0$ un numero tale che $f(x) \geq 0$ in $[0, \alpha[$, provare che le disuguaglianze:

$$g(x) \leq x \leq \frac{g(x)}{f(x)}$$

valgono per ogni $x \in [0, \alpha[$.

[**Suggerimento:** Da 2 e 3-(b) segue che $g'(x) = f(x) \leq 1$ in $[0, \alpha[$; usare il *Teorema di Lagrange* per ottenere la prima disuguaglianza. Posto $r(x) := \frac{g(x)}{f(x)}$, da 2 e 3 segue che $r'(x) \geq 1$ in $[0, \alpha[$; usare nuovamente il *Teorema di Lagrange*.]

5. Provare che il problema (S) ha unica soluzione.

[**Suggerimento:** Siano u e v altre due soluzioni di (S); le funzioni $\varphi(x) := f(x) - u(x)$ e $\psi(x) := g(x) - v(x)$ risolvono il problema omogeneo:

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -\psi(x) \\ \psi'(x) = \varphi(x) \\ \varphi(0) = 0 \\ \psi(0) = 0 \end{cases} ;$$

mostrare che quest'ultimo problema non può avere soluzioni diverse da quelle nulle sfruttando il risultato 2.]

6. Sfruttando la tabella di derivate fondamentali TABELLA 1, determinare esplicitamente le soluzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Esercizio 39 (Una EDO del Primo Ordine):

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

1. Provare che esiste una funzione $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $]0, +\infty[$ tale che:

$$(C) \quad \begin{cases} x y'(x) + y(x) = 1 & , \text{ per } x > 0 \\ y(1) = \varepsilon \end{cases} .$$

[**Suggerimento:** Usando la *regola di derivazione del prodotto*, l'equazione in (C) si può riscrivere $D[xy(x)] = 1$; ne viene che la funzione $xy(x)$ è una primitiva di 1, i.e. $xy(x) = x + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Determinare la costante C sfruttando la condizione $y(1) = \varepsilon$, infine ricavare $y(x)$.]

2. Provare che la funzione y determinata in 1 è l'unica che soddisfa (C).

[**Suggerimento:** Sia u una seconda funzione che soddisfa (C). La funzione $\varphi(x) = y(x) - u(x)$ soddisfa l'equazione omogenea $x\varphi'(x) + \varphi(x) = 0$ e la condizione $\varphi(1) = 0$. Ragionando come in 1, mostrare che $\varphi(x) = 0$ in $]0, +\infty[$.]

3. Esiste qualche valore di ε tale che la soluzione di (C) è costante?
Provare che se $\varepsilon > 1$ [risp. < 1] allora $y(x) > 1$ [risp. < 1].

Esercizio 40 (Resto della Formula di Taylor nelle Forme di Cauchy e di Schlömilch):

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n + 1$ volte in I , x_0 un punto interno ad I ed $x \in I - \{x_0\}$.

1. Dimostrare che esiste un punto η nell'intervallo di estremi x ed x_0 tale che:

$$r_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\eta) (x - \eta)^n (x - x_0) .$$

[**Suggerimento:** Ricalcare la dimostrazione di [DM3, § 2, Teo. 1] cercando $r_n(x; x_0)$ nella forma $\psi_n(x) \cdot (x - x_0)$.]

2. Fissato $m \in \mathbb{N}$, dimostrare che esiste un punto ϑ nell'intervallo di estremi x ed x_0 tale che:

$$r_n(x; x_0) = \frac{1}{n! m} f^{(n+1)}(\vartheta) (x - \vartheta)^{n-m+1} (x - x_0)^m .$$

[**Suggerimento:** Come sopra, cercando $r_n(x; x_0)$ nella forma $\psi_n(x) \cdot (x - x_0)^m$.]

4. APPLICAZIONI

Esercizio 41 (Isoterme di Van der Waals):

Siano T , p e V , rispettivamente, temperatura (assoluta), pressione e volume occupato da *una* mole di un gas reale.

Sperimentalmente si prova che tali quantità sono approssimativamente legate dall'*equazione di Van der Waals* (che generalizza quella dei gas ideali):

$$(\text{VdW}) \quad \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

in cui $R \approx 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$ è una costante universale (dipendente unicamente dalle unità di misura adottate) ed $a, b > 0$ sono parametri dipendenti dal gas e misurabili sperimentalmente.

In particolare, dato che $T > 0$, dalla (VdW) segue immediatamente che $V > b$, cosicché il parametro b (detto *covolume*) misura una “soglia critica” al di sotto della quale il gas non può essere compresso; d'altra parte, il contributo a/V^2 misura l'intensità delle forze intermolecolari attrattive interne al gas.

1. Ricavare da (VdW) la pressione p in funzione del volume V e della temperatura T , cioè determinare la relazione esplicita $p = p(V, T)$.

2. Fissata la temperatura $T > 0$, studiare la funzione di V che descrive la pressione p del gas reale. Il diagramma di tale funzione nel *piano di Clapeyron* OVp si chiama *isoterma di Van der Waals*.

In particolare mostrare che valgono i seguenti fatti:

(a) ogni isoterma di Van der Waals ha come asintoti le rette di equazione $V = b$ e $p = 0$;

(b) ogni isoterma di Van der Waals ha:

due punti stazionari: quando $T < T_C$,

un solo punto stazionario: quando $T = T_C$,

nessun punto stazionario: quando $T > T_C$,

in cui:

$$T_C = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{a}{Rb}$$

è detta *temperatura critica del gas*¹²;

(c) ogni isoterma di Van der Waals è:

non monotona: quando $T < T_C$ (ed, in particolare, è strettamente crescente nell'intervallo compreso tra i due punti stazionari e strettamente decrescente altrove),

strettamente decrescente: quando $T \geq T_C$;

¹²Sperimentalmente, si prova che per $T > T_C$ il comportamento di un gas di Van der Waals è sostanzialmente identico a quello di una mole di gas ideale.

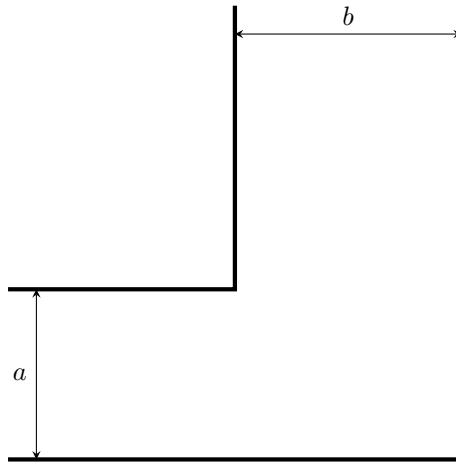


FIGURA 1. Corridoio ad “L” (Esercizio 42).

(d) ogni isoterma di Van der Waals ha:

due punti di flesso: quando $T < T^*$,

nessun punto di flesso: quando $T \geq T^*$,

in cui:

$$T^* = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{a}{Rb}.$$

3. Provare che per $T = T_C$ ($< T^*$) la derivata prima e seconda di p si annullano in nello stesso punto $V_C = 3b$, detto *volume critico*.

Determinare il valore p_C , detto *pressione critica*, corrispondente a V_C e mostrare che tali valori critici sono legati alla costante a mediante la relazione:

$$a = 3p_C V_C^2.$$

Esercizio 42 (Corridoio ad “L”):

Si vuole trasportare un’asta attorno all’angolo di un corridoio ad “L” (le cui dimensioni sono riportate in FIGURA 1) facendola scorrere parallelamente al pavimento.

1. Trovare la lunghezza dell’asta più lunga che può essere trasportata.

[Suggerimento: Si intuisce che l’asta di lunghezza massima è lunga tanto quanto il *più corto* segmento AB che unisce le pareti esterne orizzontale e verticale dei due rami e che passa per il vertice dell’angolo interno O .¹³ Ciò constatato, bisogna trovare il minimo della funzione che restituisce la lunghezza di tali segmenti. Conviene scegliere come variabile l’angolo ϑ formato dal segmento AB con la parete esterna orizzontale (cfr. FIGURA 2).]

2. Se la diagonale dell’angolo del corridoio (segmento OH in FIGURA 2) è lunga $d > 0$, quali sono le dimensioni dei rami del corridoio che consentono di trasportare

¹³Ciò è difficile da dimostrare, ma è molto semplice giungere a tale conclusione immaginando il moto dell’asta.

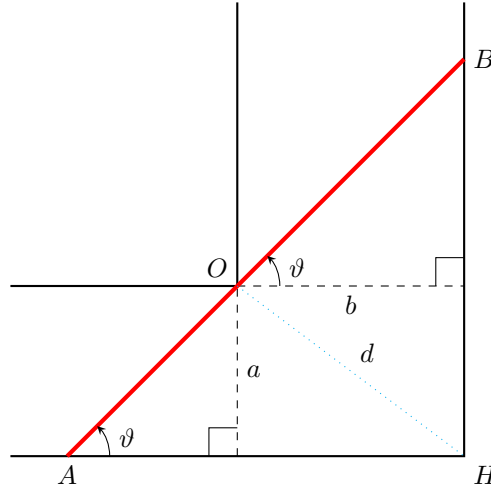


FIGURA 2. Suggerimento per l'Esercizio 42.

la più lunga asta di lunghezza massima? E quella più corta?

[Suggerimento: Supponiamo (per fissare le idee) che $b \geq a$. Detta $L(a, b)$ la lunghezza massima determinata al punto 1, per determinare la lunghezza della più lunga asta di lunghezza massima trasportabile nel corridoio basta massimizzare $L(a, b)$ con il vincolo $a^2 + b^2 = d^2$. Esprimere b^2 in funzione di a^2 sfruttando il vincolo ed impostare un problema di estremo per una funzione ausiliaria della variabile $t = a^2$.]

Esercizio 43 (Metodo dei Minimi Quadrati):

In numerose questioni applicative (e.g., nell'analisi dei dati) diviene indispensabile stabilire dipendenze di tipo funzione tra le misure di due grandezze. Nella pratica, ciò è impossibile sia per motivi *intrinseci* (i dati sono affetti da errori) sia per motivi *strutturali* (la mole di dati rende, usualmente, il problema sovradeterminato e dunque irrisolvibile¹⁴) e per questo motivo ci si accontenta di stabilire delle relazioni “approssimate” tra le grandezze in esame.

In molti casi di interesse, dalla rappresentazione grafica delle coppie di dati (x_n, y_n) (cfr. l'esempio in FIGURA 3) con $n = 1, \dots, N$ ($N \geq 3$) segue immediatamente che conviene optare per dipendenze funzionali di tipo lineare, i.e. del tipo:

$$y = f(x; m, q) = mx + q,$$

in cui sono da determinarsi in qualche modo i due parametri m (coefficiente angolare) e q (intercetta).

Ora, se gli N punti $P_n = (x_n, y_n)$ non sono tutti allineati, non esiste alcuna funzione lineare $f(\cdot; m, q)$ tale che $y_n = f(x_n; m, q)$; pertanto, bisogna assegnare un criterio per determinare m e q in maniera che $y_n \approx f(x_n; m, q)$ con approssimazione sufficientemente buona.

Tale criterio si basa sulla minimizzazione della funzione δ che descrive l'errore quadratico medio commesso approssimando ogni punto P_n col corrispondente punto

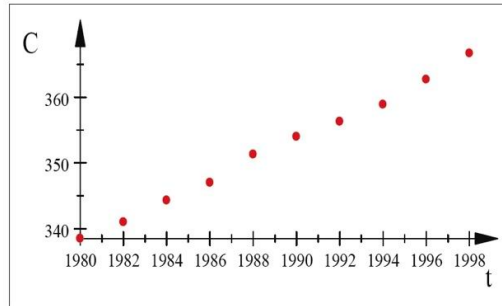
¹⁴Detto in maniera brutale, un problema si dice *sovradeterminato* quando le condizioni da imporre per trovarne le soluzioni sono “troppe” rispetto al numero di incognite. Ad esempio, è sovradeterminato il problema di trovare l'equazione di una retta passante per 3 o più punti del piano.

P_n^* appartenente alla retta di equazione $y = mx + q$ avente la stessa ascissa di P_n , cioè $P_n^* = (x_n, mx_n + q)$.

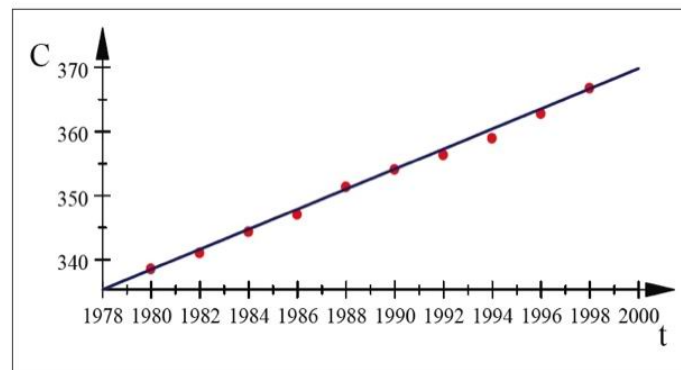
Il metodo che si basa sul criterio ora illustrato si chiama *metodo dei minimi quadrati* ed è uno dei metodi più usati nello studio di dati sperimentali.

Anno	Livello CO_2 (in ppm)
1980	338.5
1982	341.0
1984	344.3
1986	347.0
1988	351.3
1990	354.0
1992	356.3
1994	358.9
1996	362.7
1998	366.7

(A) Dati raccolti.



(B) Rappresentazione grafica dei dati.



(C) Retta dei minimi quadrati.

FIGURA 3. Concentrazione di CO_2 nell'aria: dati, rappresentazione ed interpolazione.

Prima di proporre l'esercizio e per snellire le notazioni è opportuno introdurre alcune notazioni d'uso comune.

Se $N \geq 2$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $\dots$, $P_N = (x_N, y_N)$ N sono punti del piano,

poniamo:

$$\bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (\text{media aritmetica di } x_1, \dots, x_N)$$

$$\bar{y} := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n \quad (\text{media aritmetica di } y_1, \dots, y_N)$$

$$\text{Var}(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2 \quad (\text{varianza di } x_1, \dots, x_N)$$

$$\text{Cov}(x, y) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \quad (\text{covarianza di } x_1, \dots, x_N \text{ ed } y_1, \dots, y_N).$$

1. Mostrare che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\overline{\alpha x + \beta y} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y},$$

nel senso che la media $\overline{\alpha x + \beta y}$ delle N combinazioni lineari $\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_N + \beta y_N$ è uguale alla combinazione lineare delle due medie $\bar{x}$ ed $\bar{y}$, ossia $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}$.

Inoltre, provare che:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= \text{Cov}(x, x), \\ \text{Var}(x - \bar{x}) &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \\ \text{Cov}(x, y) &= \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \end{aligned}$$

con ovvio significato dei simboli.¹⁵

2. Per ogni fissato $m \in \mathbb{R}$, determinare il valore $q(m) \in \mathbb{R}$ che rende minima la funzione della variabile q :

$$\delta(q; m) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y_n - (mx_n + q) \right)^2,$$

la quale fornisce la media dei quadrati degli errori commessi approssimando ogni P_n col corrispondente P_n^* sulla retta di equazione $y = mx + q$.

[**Suggerimento:** Facendo dapprima il caso $N = 3$ si intuisce che il minimo è preso per q uguale alla media $\bar{y} - m\bar{x} = \bar{y} - m\bar{x}$; generalizzare.]

3. Per ogni $m \in \mathbb{R}$ si ponga:

$$\varepsilon(m) := \delta(q(m); m),$$

cosicché $\varepsilon(m)$ fornisce la minima media dei quadrati degli errori commessi approssimando i punti P_n coi punti P_n^* scelti sulla retta “ottimale” con coefficiente angolare m .

Trovare $m_0 \in \mathbb{R}$ che rende minima la funzione $\varepsilon(m)$, cioè tale che $\varepsilon(m_0) = \min_{m \in \mathbb{R}} \varepsilon(m)$.

[**Suggerimento:** Facendo dapprima il caso $N = 3$, si intuisce che $m_0 = \text{Cov}(x, y) / \text{Var}(x)$; generalizzare.]

¹⁵Ad esempio, $\overline{x \cdot y}$ è la media dei prodotti $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_N y_N$ ed $\overline{x^2}$ è la media dei quadrati $x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2$.

4. Provare che la disuguaglianza:

$$\delta(q(m_0); m_0) \leq \delta(q; m)$$

è valida per ogni $m, q \in \mathbb{R}$.

[**Suggerimento:** Si ha $\delta(q(m_0); m_0) = \varepsilon(m_0) \leq \varepsilon(m) = \delta(q(m); m) \leq \dots$.]

La retta di equazione $y = m_0x + q(m_0)$, cioè:

$$y = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} (x - \bar{x}) + \bar{y} ,$$

che meglio approssima l'andamento dei dati (x_n, y_n) nel senso descritto sopra è detta *retta dei minimi quadrati*.

APPENDICE A. TABELLA DI DERIVATE FONDAMENTALI E REGOLE DI
DERIVAZIONE

TABELLA 1. Derivate Fondamentali.

Funzione	Derivata	(condizioni)
C	0	
x	1	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(\alpha \in \mathbb{R})$
$\log_a x$	$\frac{1}{\log a} x$	$(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
a^x	$\log a \cdot a^x$	$(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	
$\operatorname{settsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{settcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\operatorname{setttanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	

TABELLA 2. Regole di Derivazione

Regola	Formula	Note
Linearità	$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Derivazione del Prodotto	$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
Derivazione del Rapporto	$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	
Derivazione della Funzione Composta	$D[g(f(x))] = g'(f(x))f'(x)$	
Derivazione della Funzione Inversa	$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$	$g(y) = f^{-1}(y)$

APPENDICE B. POLINOMI DI TAYLOR-MACLAURIN COL RESTO DI PEANO

Nella TABELLA 3 a pagina seguente sono riportate le formule di MacLaurin (ossia le formule di Taylor con $x_0 = 0$) con i resti nella forma di Peano, cioè del tipo:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

delle funzioni elementari più comuni.

Quando possibile ho indicato l'espressione del polinomio d'ordine n generico; quando tale espressione risulta *complicata*, ho fornito un'indicazione bibliografica digitale per reperire informazioni on-line.

Dalle formule elencate di seguito si possono ricavare formule di MacLaurin per le funzioni elementari composte, con la tecnica detta *degli sviluppi innestati*. Fornisco un esempio di calcolo qui di seguito.

Esempio 1: Vogliamo stabilire se e possibile ed, eventualmente, scrivere esplicitamente la formula di MacLaurin della funzione composta:

$$f(x) := \arctan^2(e^x - 1) - x^3 - \log(1 + x \sin x)$$

d'ordine 4.

Notiamo che la funzione assegnata è definita in un conveniente intorno di $x_0 = 0$ ed è ivi derivabile indefinitamente; dunque il è possibile scrivere la formula di MacLaurin d'ordine n , con n comunque grande.

Per scrivere esplicitamente la formula, a norma della definizione del polinomio di Taylor, dovremmo calcolare i coefficienti:

$$f(0), f'(0), \frac{f''(0)}{2!}, \frac{f'''(0)}{3!} \text{ ed } \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$$

e per fare ciò occorrerebbe calcolare le prime quattro derivate della funzione $f \dots$ Tuttavia tale computo esplicito è difficile, poiché la funzione assegnata è composta da “tropic” espressioni elementari.

Il calcolo diviene una questione puramente algebrica ricorrendo al metodo seguente, il quale è giustificato a posteriori dall'unicità del polinomio di Taylor.

Cominciamo a sviluppare il primo addendo, cioè $\arctan^2(e^x - 1)$. Dato che per $x \rightarrow 0$ risulta $e^x - 1 \rightarrow 0$, sfruttando la relazione:

$$\arctan y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$$

di TABELLA 3 con $y = e^x - 1$ troviamo:

$$\arctan(e^x - 1) = (e^x - 1) - \frac{1}{3}(e^x - 1)^3 + o((e^x - 1)^3),$$

da cui (applicando le regole di calcolo valide per il simbolo di Landau o) ricaviamo:

$$\begin{aligned} \arctan^2(e^x - 1) &= \left[(e^x - 1) - \frac{1}{3}(e^x - 1)^3 + o((e^x - 1)^3) \right]^2 \\ &= (e^x - 1)^2 - \frac{2}{3}(e^x - 1)^4 + \underbrace{2(e^x - 1) o((e^x - 1)^3)}_{=o((e^x - 1)^4)} \\ &\quad + \frac{1}{9}(e^x - 1)^6 - \underbrace{\frac{2}{3}(e^x - 1)^3 o((e^x - 1)^3)}_{=o((e^x - 1)^6)} \\ &\quad + \underbrace{\left(o((e^x - 1)^3) \right)^2}_{=o((e^x - 1)^6)} \\ &= (e^x - 1)^2 - \frac{2}{3}(e^x - 1)^4 + o((e^x - 1)^4); \end{aligned}$$

analogamente, sfruttando la relazione:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

di TABELLA 3 troviamo:

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

e dunque:

$$\begin{aligned} (e^x - 1)^2 &= \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]^2 \\ &= x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \underbrace{2xo(x^3)}_{=o(x^4)} \\ &\quad + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \underbrace{x^2 o(x^3)}_{=o(x^5)} \\ &\quad + \frac{1}{36}x^6 + \underbrace{\frac{1}{3}x^3 o(x^3) + \left(o(x^3) \right)^2}_{=o(x^6)} \\ &= x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^4 &= \left[(e^x - 1)^2 \right]^2 \\
&= \left[x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) \right]^2 \\
&= x^4 + 2x^5 + \frac{7}{6}x^6 + \underbrace{2x^2 o(x^4)}_{=o(x^6)} \\
&\quad + x^6 + \frac{7}{6}x^7 + \underbrace{2x^3 o(x^4)}_{=o(x^7)} \\
&\quad + \frac{49}{144}x^8 + \underbrace{\frac{7}{6}x^4 o(x^4) + (o(x^4))^2}_{=o(x^8)} \\
&= x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

(N.B.: I termini di grado superiore a 4 possono essere trascurati alla fine, poichè cerchiamo il polinomio d'ordine 4); cosicchè sostituendo nello sviluppo determinato in precedenza otteniamo:

$$\begin{aligned}
\arctan^2(e^x - 1) &= (e^x - 1)^2 - \frac{2}{3}(e^x - 1)^4 + o((e^x - 1)^4) \\
&= x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) - \frac{2}{3}(x^4 + o(x^4)) + o(x^4 + o(x^4)) \\
&= x^2 + x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) .
\end{aligned}$$

Il termine in x^3 è già una potenza ad esponente intero positivo, quindi non deve essere sviluppato.

Sviluppiamo l'addendo $\log(1 + x \sin x)$. Dato che per $x \rightarrow 0$ si ha $x \sin x \rightarrow 0$, sfruttando la relazione:

$$\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + o(y^4)$$

di TABELLA 3 con $y = x \sin x$ troviamo:

$$\log(1 + x \sin x) = x \sin x - \frac{1}{2}(x \sin x)^2 + \frac{1}{3}(x \sin x)^3 + o((x \sin x)^3) .$$

Sempre da TABELLA 3 segue:

$$\begin{aligned}
x \sin x &= x \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) \\
&= x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) ,
\end{aligned}$$

cosicchè, sfruttando gli stessi artifici già usati in precedenza, abbiamo:

$$\begin{aligned}
(x \sin x)^2 &= \left(x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \right)^2 \\
&= x^4 + o(x^4) , \\
(x \sin x)^3 &= \left(x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \right)^3 \\
&= o(x^4) ;
\end{aligned}$$

sostituendo nella precedente otteniamo:

$$\begin{aligned}\log(1 + x \sin x) &= x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}(x^4 + o(x^4)) \\ &\quad + \frac{1}{3}o(x^4) + o(o(x^4)) \\ &= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) .\end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}f(x) &= \arctan^2(e^x - 1) - x^3 - \log(1 + x \sin x) \\ &= x^2 + x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) - x^3 - \left(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

è la formula di MacLaurin cercata. $\diamond$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [AMS] Acerbi, E.; Modica, L. & Spagnolo, S. (1985), **Problemi Scelti di Analisi Matematica I**, Liguori.
- [CFGF] *Carl Friederich Gauss Facts - Raccolta di Frasi Semiserie sul Celeberrimo Matematico Tedesco Raccattate in Giro per la Rete* [reperibile on-line su www.docenti.unina.it]
- [DLMF] **NIST Digital Library of Mathematical Functions**, Olver, F. W. J.; Olde Daalhuis, A. B.; Lozier, D. W.; Schneider, B. I.; Boisvert, R. F.; Clark, C. W.; Miller, B. R. & Saunders, B. V. (eds.), Release 1.0.14 of 2016-12-21, <http://dlmf.nist.gov/>.
- [DMF] De Michele, L. & Forti, G. L. (1988), **Analisi Matematica - Problemi ed Esercizi**, CLUP.
- [DM0] Di Meglio, G. (2017), *Qualche Esercizio sui Limiti di Funzione* [reperibile on-line su www.docenti.unina.it]
- [DM1] Di Meglio, G. (2017), *Qualche Esercizio di Base sullo Studio della Funzione* [reperibile on-line su www.docenti.unina.it]
- [DM2] Di Meglio, G. (2017), *Qualche Esercizio Avanzato sullo Studio della Funzione* [reperibile on-line su www.docenti.unina.it]
- [DM3] Di Meglio, G. (2017) *Complementi sulla Formula di Taylor* [reperibile on-line su www.docenti.unina.it]
- [G] Giusti, E. (1991), **Esercizi e Complementi di Analisi Matematica - volume primo**, Bollati Boringhieri.
- [GS] Greco, D. & Stampacchia, G. (1966), **Esercitazioni di Matematica - volume primo**, Liguori.
- [PS] Pagani, C. D. & Salsa, S. (2015), **Analisi Matematica I**, Zanichelli.
- [S] Spiegel, M. (1963), **Advanced Calculus**, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill.

GUGLIELMO DI MEGLIO, PhD
 SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
 PIAZZALE TECCHIO
 NAPOLI – ITALY
 EMAIL: guglielmo.dimeglio@unina.it

TABELLA 3. Formule di Taylor-MacLaurin con Resto di Peano delle Funzioni Elementari più Comuni

Funzione		Polinomio di MacLaurin		Resto	Note
e^x	=	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$	+	$o(x^n)$	
a^x	=	$1 + \log a \, x + \frac{\log^2 a}{2}x^2 + \dots + \frac{\log^n a}{n!}x^n$	+	$o(x^n)$	$a > 0, a \neq 1$
$\log(1+x)$	=	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	+	$o(x^n)$	
$\log_a(1+x)$	=	$\frac{1}{\log a}x - \frac{1}{2\log a}x^2 + \frac{1}{3\log a}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n\log a}x^n$	+	$o(x^n)$	$a > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{1-x}$	=	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$	+	$o(x^n)$	
$\frac{1}{1+x}$	=	$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$	+	$o(x^n)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	=	$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n}$	+	$o(x^{2n})$	
			opp.	$o(x^{2n+1})$	
$\frac{1}{1-x^2}$	=	$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n}$	+	$o(x^{2n})$	
			opp.	$o(x^{2n+1})$	
$(1+x)^\alpha$	=	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	+	$o(x^n)$	$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$
$\sqrt{1-x}$	=	$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \dots - \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2}x^n$	+	$o(x^n)$	
$\sqrt{1+x}$	=	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(2n-1)(n!)^2}x^n$	+	$o(x^n)$	
$\sin x$	=	$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$	+	$o(x^{2n-1})$	
			opp.	$o(x^{2n})$	
$\cos x$	=	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2}$	+	$o(x^{2n-2})$	
			opp.	$o(x^{2n-1})$	
$\tan x$	=	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7$	+	$o(x^7)$	[DLMF, § 4.19]
			opp.	$o(x^8)$	
$\arctan x$	=	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}$	+	$o(x^{2n-1})$	
			opp.	$o(x^{2n})$	
$\arcsin x$	=	$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(2n-1)((n-1)!)^2}x^{2n-1}$	+	$o(x^{2n-1})$	
			opp.	$o(x^{2n})$	
$\sinh x$	=	$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$	+	$o(x^{2n-1})$	
			opp.	$o(x^{2n})$	
$\cosh x$	=	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{(2n-2)!}x^{2n-2}$	+	$o(x^{2n-2})$	
			opp.	$o(x^{2n-1})$	
$\tanh x$	=	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7$	+	$o(x^7)$	[DLMF, §4.33]
			opp.	$o(x^8)$	
$\operatorname{setttanh} x$	=	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$	+	$o(x^{2n-1})$	
			opp.	$o(x^{2n})$	
$\operatorname{settsinh} x$	=	$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{4^{n-1}(2n-1)((n-1)!)^2}x^{2n-1}$	+	$o(x^{2n-1})$	
			opp.	$o(x^{2n})$	