QUALCHE ESERCIZIO DI BASE SULLO STUDIO DELLA FUNZIONE

G. DI MEGLIO

Introduzione

In questi fogli sono proposti alcuni semplici esercizi sullo studio della funzione.

Ricordo che *studiare una funzione* f significa determinare, a partire dalla sola legge di assegnazione di f, tutte quelle informazioni utili affinché sia possibile tracciare un *diagramma qualitativo* del grafico della funzione.
In particolare, và posta molta attenzione ai fatti elencati di seguito:

1. determinazione del dominio della funzione;
2. descrizione di proprietà della funzione utili alla semplificazione del problema[1];
3. determinazione degli intervalli di positività e negatività della funzione (il cosiddetto *studio del segno*), qualora ciò si possa fare in maniera "elementare"[2];
4. descrizione delle proprietà di continuità della funzione, calcolo dei limiti al finito ed all'infinito ed eventuale prolungamento per continuità della funzione;
5. determinazione delle equazioni di eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) del diagramma della funzione;
6. discussione delle proprietà di derivabilità della funzione;
7. calcolo della derivata prima e determinazione degli intervalli di monotònia della funzione[3];
8. individuazione degli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

Date: 29 dicembre 2017.

[1]Ad esempio, si può provare a stabilire se la funzione assegnata è pari, dispari o periodica; oppure si può cercare di esplicitare la legge di assegnazione fornita distinguendo opportuni casi (e.g., come quando si studia una funzione col valore assoluto).

[2]Se ciò non è possibile, prima di desistere totalmente conviene postporre il problema, affrontandolo dopo aver ricavato informazioni circa altre proprietà della funzione in esame. In proposito cfr. Appendice A.

[3]Ricordo che, per noti fatti di Calcolo Differenziale, ciò può esser fatto studiando il segno della derivata prima della funzione (qualora, ovviamente, la funzione in esame sia derivabile e lo studio del segno si possa fare in maniera "elementare").

9. calcolo della derivata seconda e determinazione degli intervalli di convessità della funzione[4];

10. individuazione degli eventuali punti di flesso nel diagramma.

Ogni problema dovrà essere concluso disegnando un diagramma che presenti l'andamento qualitativo del grafico della funzione, il quale sia coerente con tutte le informazioni ricavate nello svolgimento dell'esercizio.

1. Esercizio Svolto

Studiamo la funzione:

$$f(x) := \cos 2x + \sqrt{3}\ \sin 2x\ .$$

1. *Determinazione del dominio.*
Evidentemente la funzione è definita in:

- $\mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}$,

essendo combinazione lineare di due funzioni, i.e. $\cos 2x$ e $\sin 2x$, definite in tale insieme.

2. *Individuazione di particolari proprietà della funzione.*
Usando la definizione si vede che:

- la funzione f non è né pari né dispari.

Inoltre:

- la f è periodica di periodo $T = \pi$,

poiché essa è una combinazione lineare delle due funzioni $\cos 2x$ e $\sin 2x$, entrambe periodiche di periodo π.
Conseguentemente, ci basta analizzare il comportamento di f limitatamente ad un intervallo di ampiezza π: a tale scopo scegliamo l'intervallo $X := [0, \pi]$.

3. *Determinazione degli intervalli di positività e negatività.*
Per studiare il segno della funzione f notiamo che la formula di sottrazione del coseno importa:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\ \left(\frac{1}{2}\ \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \sin 2x \right) \\ &= 2\ \Big(\underbrace{\cos \frac{\pi}{3}\ \cos 2x + \sin \frac{\pi}{3}\ \sin 2x}_{=\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)} \Big) \\ &= 2\ \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \end{aligned}$$

[4] Come sopra, per noti fatti di Calcolo Differenziale, ciò può esser fatto studiando il segno della derivata seconda della funzione (qualora, ovviamente, la funzione in esame sia derivabile due volte e lo studio del segno si possa fare in maniera "elementare").

cosicché si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq \frac{\pi}{3} - 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, ossia se:

$$-\frac{\pi}{12} + n\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + n\pi \qquad , \text{con } n \in \mathbb{Z} \, .$$

Pertanto, limitatamente all'intervallo X, si ha:

- $f(x) > 0$ se e solo se $x \in [0, \frac{5}{12}\pi[\cup]\frac{11}{12}\pi, \pi]$,
- $f(x) = 0$ solo se $x = \frac{5}{12}\pi$ oppure $x = \frac{11}{12}\pi$,
- $f(x) < 0$ solo se $x \in]\frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi[$.

4. *Discussione della continuità e calcolo dei limiti.*
Essendo combinazione lineare di funzioni continue:

- la f è continua in tutto $\operatorname{Dom} f$ ed, in particolare, è continua in X.

Inoltre:

- i limiti per $x \to \pm\infty$ non esistono.

5. *Determinazione degli asintoti.*
Poiché risulta:

$$|f(x)| \leq |\cos 2x| + \sqrt{3}\ |\sin 2x| \leq 1 + \sqrt{3}$$

per ogni $x \in \operatorname{Dom} f$, la funzione f è limitata; dunque:

- il grafico di f non presenta asintoti verticali né obliqui.

Inoltre, dato che i limiti per $x \to \pm\infty$ non esistono:

- il grafico di f non presenta asintoti orizzontali.

6. *Discussione della derivabilità.*
Essendo combinazione lineare di due funzioni indefinitamente derivabili in $\mathbb{R}$:

- la funzione f è derivabile quante volte si vuole in $\operatorname{Dom} f$.

7. *Calcolo della derivata prima e determinazione degli intervalli di monotònia.*
Derivando e ricordando la formula di sottrazione del seno troviamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ \left(-\sin 2x + \sqrt{3}\ \cos 2x\right) \\ &= 4\ \left(-\frac{1}{2}\ \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \cos 2x\right) \\ &= 4\ \Big(\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}\ \cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}\ \sin 2x}_{=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}\Big) \\ &= 4\ \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\ , \end{aligned}$$

cosicché abbiamo $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2n\pi \leq \frac{\pi}{3} - 2x \leq \pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, ossia se e solo se:

$$-\frac{\pi}{3} + n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \qquad , \text{con } n \in \mathbb{Z} \; .$$

Pertanto $f'(x) > 0$ se $x \in [0, \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{2}{3}\pi, \pi]$, $f'(x) = 0$ se $x = \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi$ ed $f'(x) < 0$ se $x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi[$; conseguentemente:

- f è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{6}]$ ed in $[\frac{2}{3}\pi, \pi]$,
- f è strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi]$.

8. *Individuazione degli estremi relativi ed assoluti.*
Dalle considerazioni circa la monotònia segue che i punti $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{2}{3}\pi$ (nei quali si ha $f(\pi/6) = 2$ e $f(2\pi/3) = -2$) sono, rispettivamente, un massimo assoluto proprio ed un minimo assoluto proprio per f in X.
Dalla periodicità di f segue che:

- tutti i punti del tipo $\frac{\pi}{6} + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono punti di massimo assoluto per f in $\operatorname{Dom} f$ e $\max f = 2$,
- tutti i punti del tipo $\frac{2}{3}\pi + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo assoluto per f in $\operatorname{Dom} f$ e $\min f = -2$.

9. *Calcolo della derivata seconda e determinazione degli intervalli di convessità.*
Calcolando la derivata seconda troviamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 \, \left(-\cos 2x - \sqrt{3}\, \sin 2x\right) \\ &= -4 \, f(x) \; , \end{aligned}$$

cosicché $f''(x) \geq 0$ lì dove $f(x) \leq 0$, ossia in $[\frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi]$; conseguentemente:

- f è strettamente convessa in $[\frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi]$,
- f è strettamente concava in $[0, \frac{5}{12}\pi]$ ed in $[\frac{11}{12}\pi, \pi]$.

10. *Individuazione degli eventuali punti di flesso.*
Dato che i punti $\frac{5}{12}\pi$ e $\frac{11}{12}\pi$ separano intervalli in cui la f ha concavità opposte, essi sono punti di flesso (a tangente obliqua) per il diagramma.
Vista la periodicità di f, risulta che:

- tutti i punti del tipo $\frac{5}{12}\pi + n\pi$ e $\frac{11}{12}\pi + n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono punti di flesso (a tangente obliqua) per il diagramma.

Inoltre, come utile esercizio:

a. determiniamo *esplicitamente* l'immagine di f, cioè l'insieme $f(\operatorname{Dom} f)$,

b. discutiamo il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

a. Data la presenza di massimo e minimo assoluti, possiamo affermare che $f(\mathrm{Dom}\, f) \subseteq [f(2/3\pi), f(\pi/6)] = [-2, 2]$; d'altra parte, il *Teorema di Bolzano* e la continuità di f garantiscono che f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo, cosicché:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = [-2, 2]$.

b. Il fatto che $f(\mathrm{Dom}\, f) = [-2, 2]$ ci assicura che l'equazione $f(x) = k$ ha qualche soluzione se $-2 \leq k \leq 2$, e che essa non ne ha alcuna se $k > 2$ oppure $k < -2$. D'altro canto, vista la periodicità di f, possiamo ben dire che se $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ è una soluzione di $f(x) = k$, cioè se $f(x_0) = k$, allora si ha pure $f(x_0 + n\pi) = k$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$; pertanto l'equazione $f(x) = k$ per $k \in [-2, 2]$ ha infinite soluzioni.
Dunque, riassumendo, l'equazione $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, ha:

- nessuna soluzione reale se $k > 2$ oppure $k < -2$,
- infinite soluzioni reali se $-2 \leq k \leq 2$.

Notiamo esplicitamente che, vista la particolare forma della legge di assegnazione della funzione f, le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ con $-2 \leq k \leq 2$ si possono addirittura esprimere elementarmente (in funzione del parametro k).
Infatti, tenendo presente che:

$$f(x) = 2\ \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

(cfr. punto **3**), abbiamo:

$$\begin{aligned} f(x) = k \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{k}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} - 2x = \pm \arccos\frac{k}{2} + 2n\pi \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3} \pm \arccos\frac{k}{2} + 2n\pi \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{Z}$; quindi:

- le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, con $-2 \leq k \leq 2$, sono tutti e soli i valori:

  $$\frac{\pi}{6} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{k}{2} + n\pi\ ,$$

  con $n \in \mathbb{Z}$.

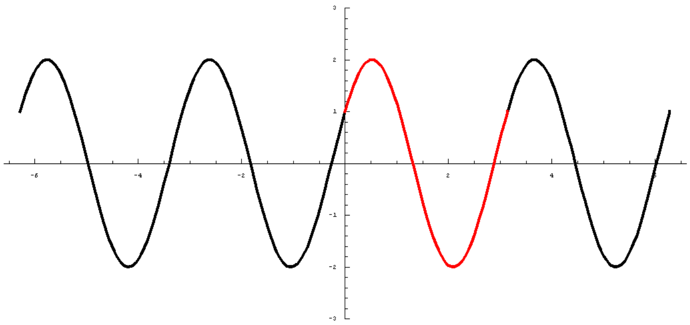

FIGURA 1. Diagramma di $f(x) := \cos 2x + \sqrt{3}\ \sin 2x$.

2. Esercizi

Studiare le seguenti funzioni[5]:

$$f(x) := (x^2-1)^2 \tag{E.1}$$

$$f(x) := \frac{x}{x^2-3x+6} \tag{E.2}$$

$$f(x) := \frac{x^2+1}{x-5} \tag{E.3}$$

$$f(x) := \frac{x^2}{x-4} - |x| \tag{E.4}$$

$$f(x) := \sqrt{1+x^2} \tag{E.5}$$

$$f(x) := \sqrt{6-x-x^2} \tag{E.6}$$

$$f(x) := \sqrt[3]{x(x-1)^2} \tag{E.7}$$

$$f(x) := (x-1)^2\ \mathbf{e}^{-x} \tag{E.8}$$

$$f(x) := \frac{x}{x+1}\ \mathbf{e}^{x} \tag{E.9}$$

$$f(x) := \frac{2\tan x}{1-\tan x} \tag{E.10}$$

$$f(x) := x\ \log|x| \tag{E.11}$$

$$f(x) := \begin{cases} \arctan \frac{x}{x+2} & \text{, se } x \neq -2 \\ 0 & \text{, altrimenti} \end{cases} \tag{E.12}$$

$$f(x) := |x|^x \tag{E.13}$$

$$f(x) := \begin{cases} \mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} & \text{, se } |x| < 1 \\ 0 & \text{, altrimenti} \end{cases} \tag{E.14}$$

$$f(x) := |x| - \log(x^2+1) \tag{E.15}$$

$$f(x) := \arctan(x^2) - \frac{x^2}{x^4+1} \tag{E.16}$$

$$f(x) := x^2\ (\log x - 1) \tag{E.17}$$

$$f(x) := \log(x^2-8x+17) \tag{E.18}$$

$$f(x) := \frac{2\log^2|x| + 5\log|x| + 2}{x}\ . \tag{E.19}$$

---

[5]Alcune delle funzioni proposte sono tratte da vecchie tracce d'esame.

Inoltre, per ognuna delle funzioni proposte:

a. determinare *esplicitamente* l'immagine $f(\mathrm{Dom}\, f)$;

b. dire (senza necessariamente calcolarle esplicitamente) quante soluzioni ha l'equazione:

$$f(x) = k$$

al variare del parametro k in $\mathbb{R}$.

3. Diagrammi Qualitativi delle Funzioni Proposte

Qui di seguito sono riportati i diagrammi qualitativi delle funzioni proposte nel paragrafo precedente.
Come nell'esercizio svolto, adottiamo la convenzione di riportare in **rosso** i tratti del diagramma provenienti dallo studio della funzione in particolari sottoinsiemi del dominio (scelti, di volta in volta, in base alle proprietà della funzione stessa) cui basta limitare le considerazioni in modo da semplificare il problema.

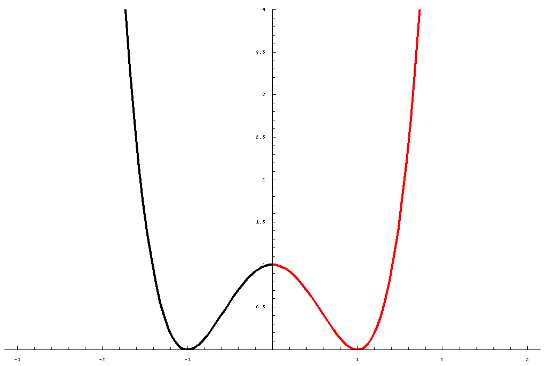

FIGURA 2. Diagramma di $f(x) := (x^2 - 1)^2$ (E.1).

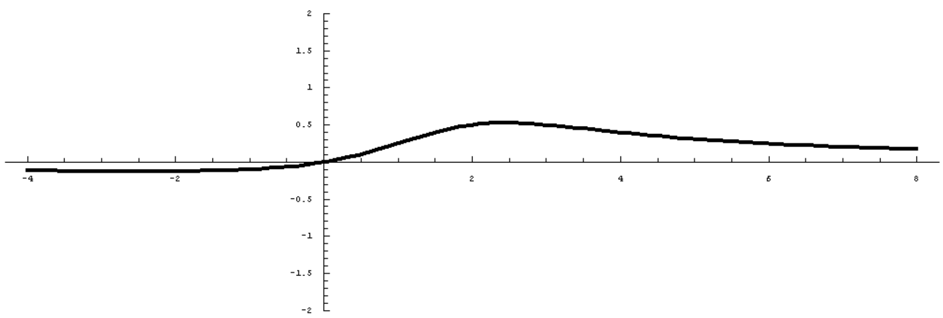

FIGURA 3. Diagramma di $f(x) := \frac{x}{x^2-3x+6}$ (E.2).

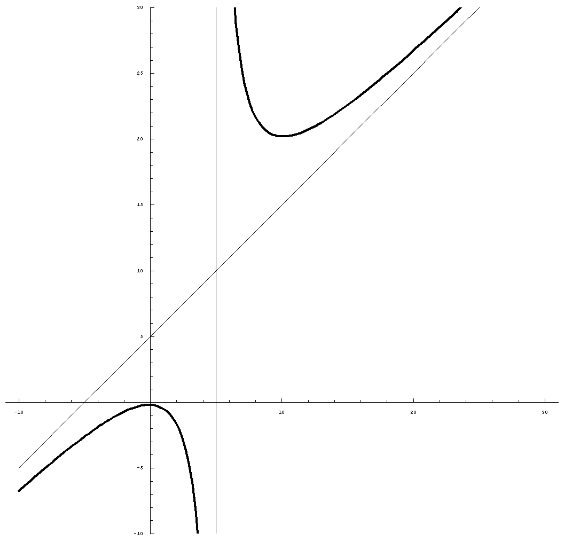

FIGURA 4. Diagramma di $f(x) := \frac{x^2+1}{x-5}$ (E.3).

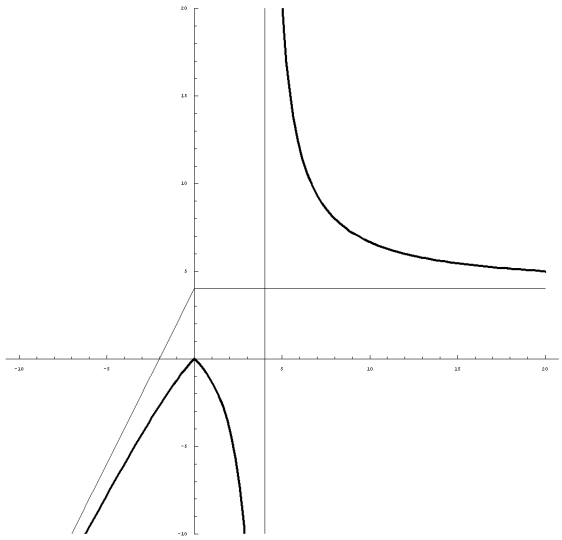

FIGURA 5. Diagramma di $f(x) := \frac{x^2}{x-4} - |x|$ (E.4).

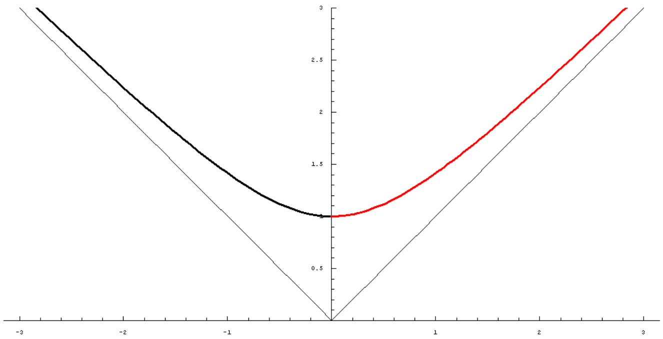

FIGURA 6. Diagramma di $f(x) := \sqrt{1 + x^2}$ (E.5).

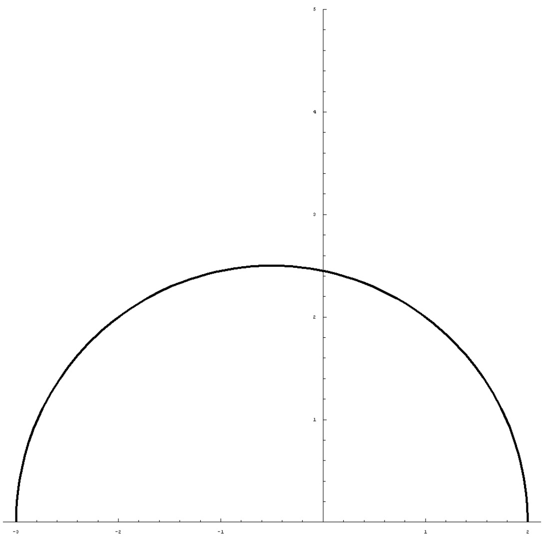

FIGURA 7. Diagramma di $f(x) := \sqrt{6 - x - x^2}$ (E.6).

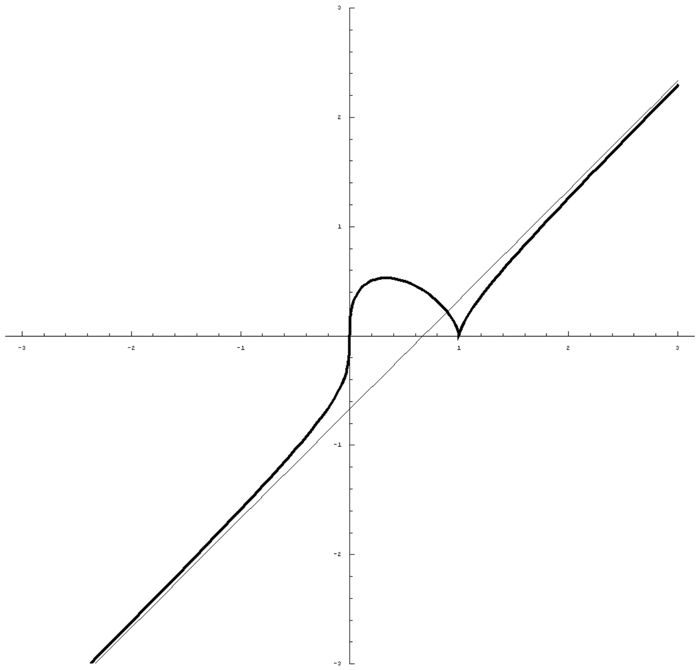

FIGURA 8. Diagramma di $f(x) := \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (E.7).

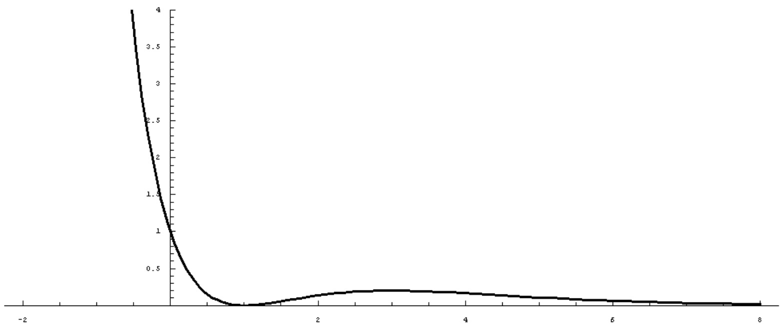

FIGURA 9. Diagramma di $f(x) := (x-1)^2\mathbf{e}^{-x}$ (E.8).

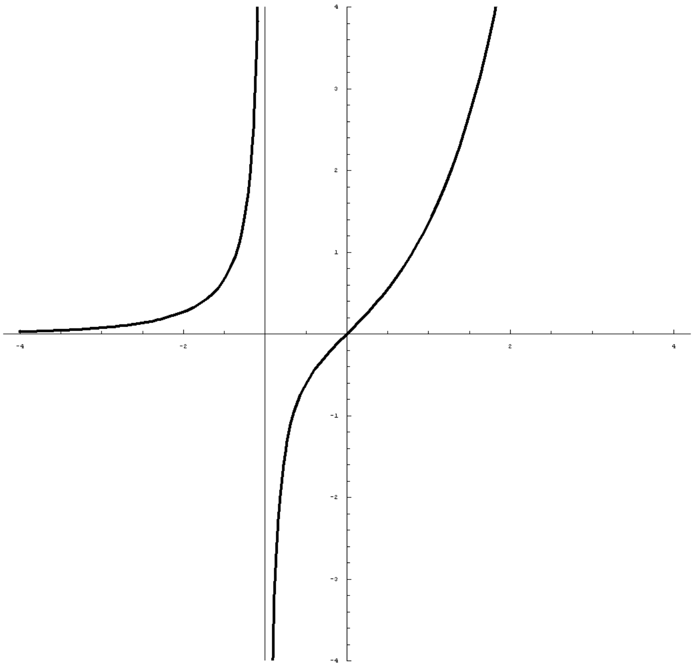

FIGURA 10. Diagramma di $f(x) := \frac{x}{x+1}\,\mathbf{e}^x$ (E.9).

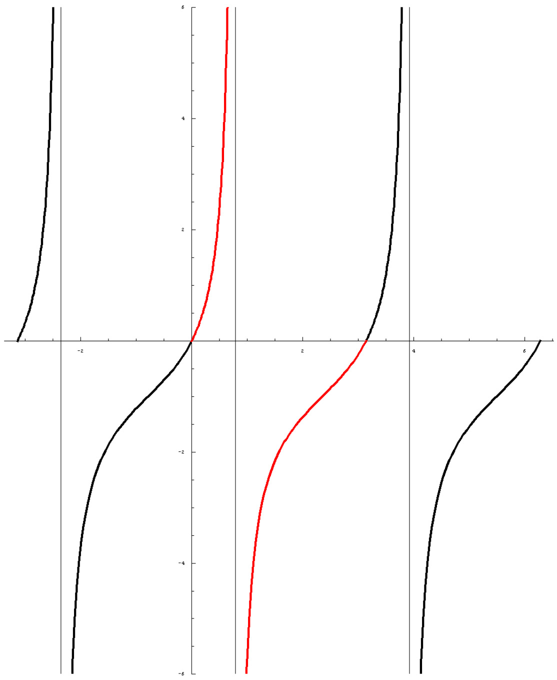

FIGURA 11. Diagramma di $f(x) := \frac{2\tan x}{1-\tan x}$ (E.10).

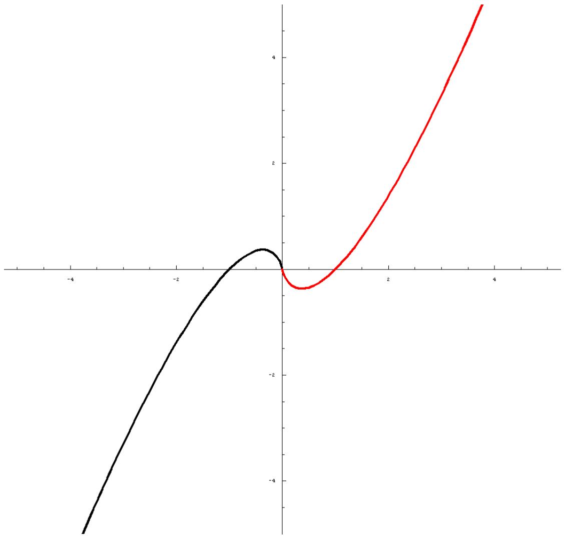

FIGURA 12. Diagramma di $f(x) := x\ \log|x|$ (E.11).

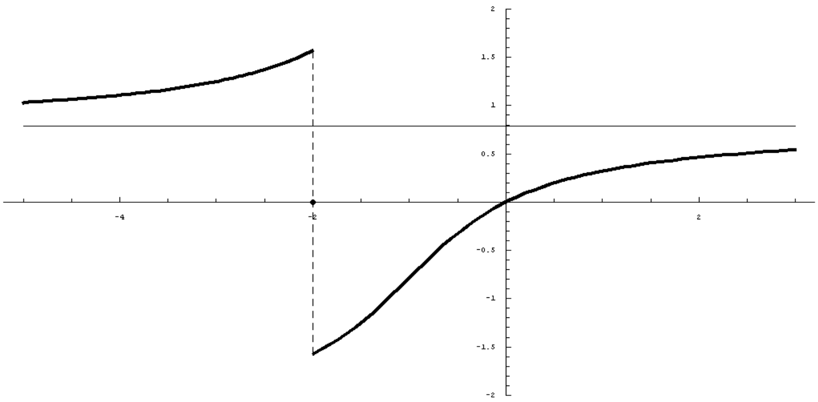

FIGURA 13. Diagramma di $f(x) := \arctan \frac{x}{x+2}$, se $x \neq -2$; 0, altrimenti (E.12).

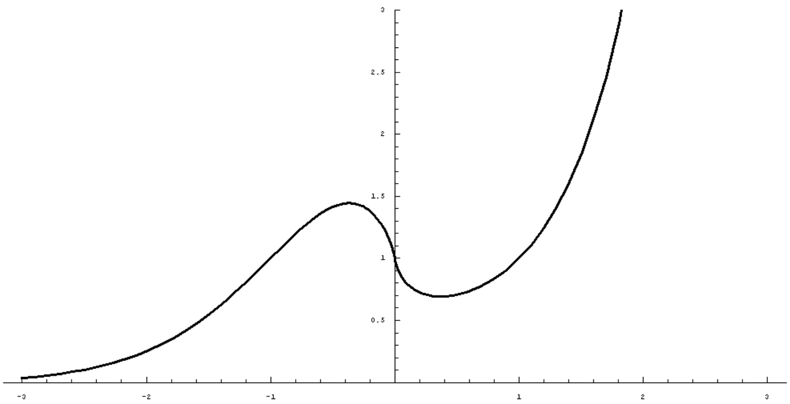

FIGURA 14. Diagramma di $f(x) := |x|^x$ (E.13).

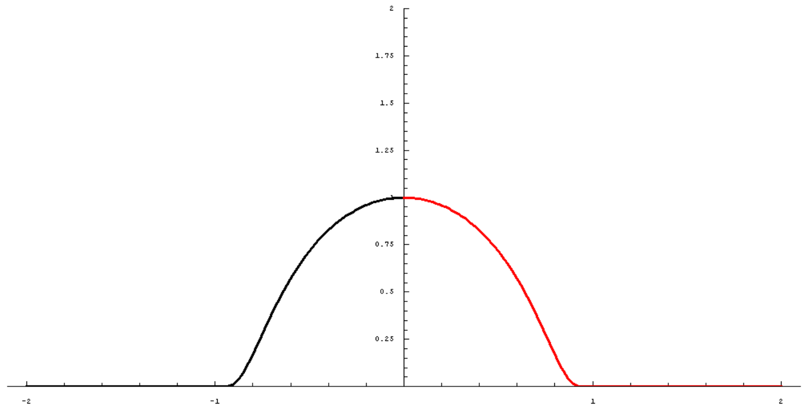

FIGURA 15. Diagramma di $f(x) := \mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}}$, se $|x| < 1$; 0, altrimenti (E.14).

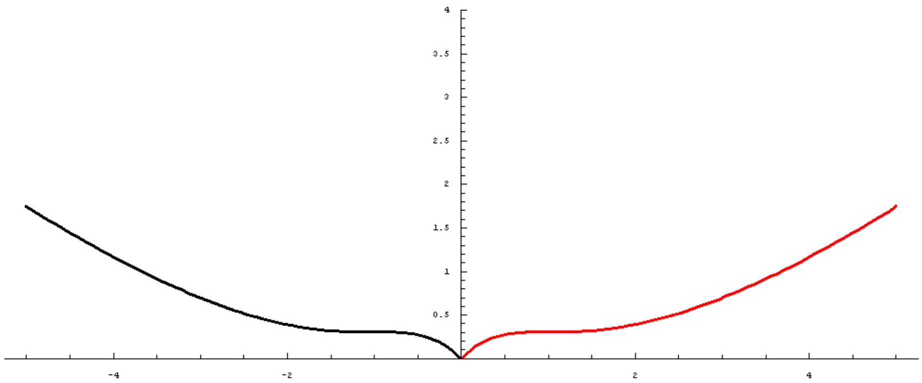

FIGURA 16. Diagramma di $f(x) := |x| - \log(x^2 + 1)$ (E.15).

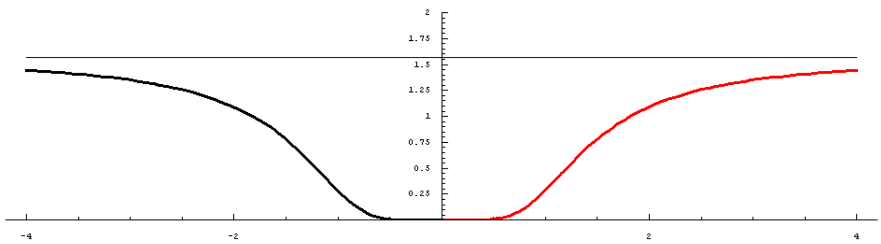

FIGURA 17. Diagramma di $f(x) := \arctan(x^2) - \frac{x^2}{x^4+1}$ (E.16).

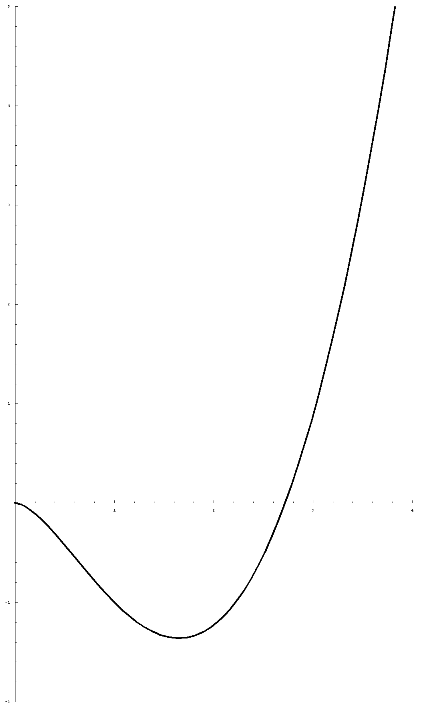

FIGURA 18. Diagramma di $f(x) := x^2(\log x - 1)$ (E.17).

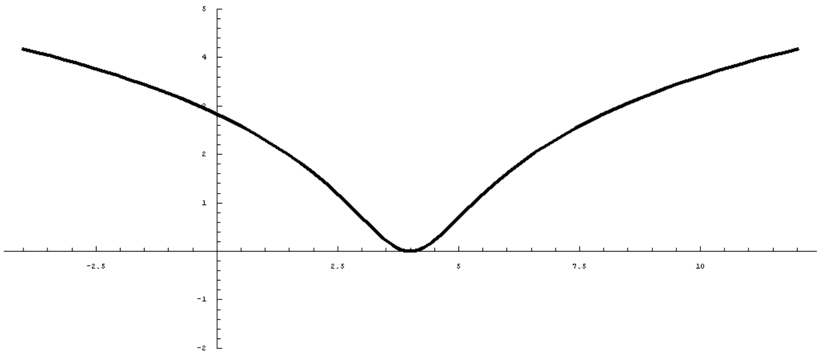

FIGURA 19. Diagramma di $f(x) := \log(x^2 - 8x + 17)$ (E.18).

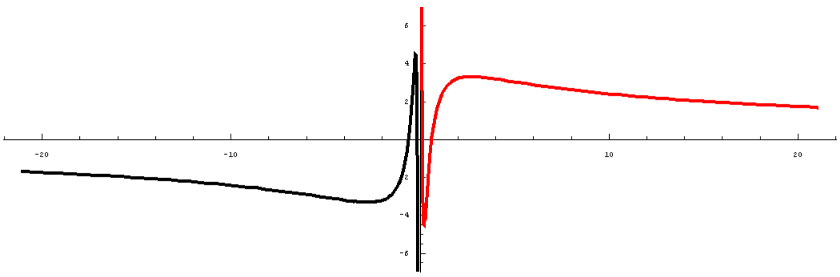

FIGURA 20. Diagramma di $f(x) := \frac{2\log^2|x|+5\log|x|+2}{x}$ (E.19).

Appendice A. Cosa Fare Quando Non si Riesce a Studiare il Segno di una Funzione

Sovente capita che lo studio del segno di una funzione f non possa essere portato a termine, poiché la risoluzione della disequazione $f(x) \geq 0$ non è possibile con tecniche "elementari". Questo è il caso, ad esempio, della funzione (E.16).
Si pone quindi la questione di cosa fare in tali casi: rinunciare ad avere le informazioni sul segno o, semplicemente, posporre il problema?

In generale, nulla di definitivo si può dire su tale questione; tuttavia, nei casi più semplici (come quelli che più frequentemente si presentano negli esercizi), le informazioni sul segno di una funzione derivabile si possono ottenere sfruttando i teoremi del Calcolo Infinitesimale e Differenziale in modo appropriato.
Invitiamo lo studioso lettore a meditare sugli esempi seguenti, i quali forniscono un piccolo campionario di tecniche da sfruttare alla bisogna.

`Esempio 1:` Vogliamo discutere il problema di determinare il segno della funzione (E.16), i.e.:

$$f(x) := \arctan(x^2) - \frac{x^2}{1+x^4} \ ,$$

la quale è definita, continua e derivabile quante volte si vuole in tutto $\mathbb{R}$.
È pressoché evidente che la disequazione $f(x) \geq 0$ non si può risolvere esplicitamente con tecniche elementari; tuttavia, possiamo subito notare che $f(0) = 0$, cioè che f è certamente nulla in 0.
Stabilito ciò, cerchiamo di recuperare informazioni sul segno di f sfruttandone le eventuali proprietà di monotònia. A tal uopo, calcolando la derivata prima troviamo:

$$f'(x) = \frac{4x^5}{(1+x^4)^4} \ ,$$

cosicché essa è positiva solo se $x > 0$, negativa solo se $x < 0$ e nulla in $x = 0$; ne consegue che f è strettamente crescente in $[0, +\infty[$ e strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$.
Dalle proprietà di monotònia testé provate segue immediatamente che $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e, dato che $f(0) = 0$, ciò equivale a dire che:

- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. ♢

`Esempio 2:` Vogliamo studiare il problema di stabilire il segno della funzione:

$$f(x) := \log x + x \ ,$$

la quale è definita, continua e derivabile quante volte si vuole in $]0, +\infty[$.
Anche in questo caso è evidente che la disequazione $f(x) \geq 0$, equivalente a $\log x \geq -x$, non è risolubile con tecniche elementari; inoltre, a differenza del caso esaminato in precedenza, non è possibile nemmeno determinare esattamente il valore di qualche soluzione dell'equazione $f(x) = 0$.
Tuttavia, l'esistenza di almeno una soluzione a tale equazione discende immediatamente dai *Teoremi di Permanenza del Segno* e *degli Zeri*: infatti, poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, per *permanenza del segno* esiste almeno un intorno destro di 0 in ogni punto a del quale risulta $f(a) < 0$; d'altra parte, dato che $f(1) = 1 > 0$ e visto che f è continua in $[a, 1] \subset]0, +\infty[$, per *Teorema degli Zeri* esiste almeno un punto $\xi \in]a, 1[$ tale che $f(\xi) = 0$.
Provata l'esistenza di uno zero di f in $]0, 1[$, cerchiamo di ricavare informazioni sul

segno della funzione sfruttando le sue eventuali proprietà di monotònia. A tale scopo, calcolando la derivata prima troviamo:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x} \ ,$$

cosicché essa è sempre positiva in $]0, +\infty[$; ciò implica che f è strettamente crescente in tutto $]0, +\infty[$.
Conseguentemente, risulta $f(x) < f(\xi)$ per $0 < x < \xi$ e, viceversa, $f(x) > f(\xi)$ per $x > \xi$ e, dato che $f(\xi) = 0$, ciò equivale a dire che:

- $f(x) > 0$ se e solo se $x \in]\xi, +\infty[$;
- $f(x) < 0$ se e solo se $x \in]0, \xi[$;
- $f(x) = 0$ unicamente per $x = \xi$.

Per ottenere una stima abbastanza buona di ξ basta iterare un po' di volte l'*algoritmo di bisezione*: in tal modo si trova $\xi \approx 0.5625$.[6] ♢

`Esempio 3:` Vogliamo studiare il problema di stabilire il segno della funzione:

$$f(x) := 2x - \log x \ ,$$

la quale è definita, continua e derivabile quante volte si vuole in $]0, +\infty[$.
La disequazione $f(x) \geq 0$ è equivalente a $\log x \leq 2x$, la quale non si risolve con tecniche elementari; inoltre, come nel caso precedente, non si ha immediatamente disponibile alcun valore che risolva $f(x) = 0$.
D'altra parte, a differenza del caso precedente, i teoremi sulle funzioni continue non possono essere applicati alla risoluzione del problema: infatti, visto che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ed $f(1) = 2 > 0$, non possiamo localizzare zeri di f né a sinistra né a destra di 1.
Senza disperare, proviamo lo stesso a recuperare qualche informazione circa la monotònia della f sfruttando il segno della derivata prima. Calcolando otteniamo:

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x} \ ,$$

e si vede che f' è positiva [risp. negativa] per $x > 1/2$ [risp. $0 < x < 1/2$] e si annulla unicamente in $1/2$; ciò implica che f è strettamente crescente [risp. strettamente decrescente] in $[1/2, +\infty[$ [risp. $]0, 1/2]$] e che prende in $1/2$ il suo minimo assoluto, tale minimo essendo uguale a $f(1/2) = 1 + \log 2$.
Conseguentemente, abbiamo $f(x) \geq f(1/2)$ per ogni $x \in]0, +\infty[$ e perciò, dato che $f(1/2) = 1 + \log 2 > 0$, risulta pure:

- $f(x) > 0$ per ogni $x \in]0, +\infty[$. ♢

Osservazione 1: L'ultimo problema può essere affrontato anche in maniera diversa, più geometrica.
Dato che $\varphi(x) := \log x$ è derivabile in $]0, +\infty[$ e che la sua derivata $\varphi'(x) = 1/x$ assume tutti i valori positivi, esiste certamente un punto $x_0 \in]0, +\infty[$ tale che $\varphi'(x_0) = 2$: tale punto è, evidentemente, $x_0 = 1/2$.
Visto che $\varphi''(x) = -1/x^2 < 0$ in $]0, +\infty[$, la funzione φ è strettamente concava in $]0, +\infty[$ e ciò implica che i punti del suo grafico sono situati tutti non al di sopra

[6] Usando un software di calcolo si trova il valore approssimato $\xi \approx 0.567143$. Da ciò segue che il valore trovato facendo 4 iterazioni del metodo di bisezione ha almeno due cifre decimali esatte.

della retta ad esso tangente in x_0: analiticamente, ciò corrisponde alla validità della disuguaglianza:

$$\varphi(x) \leq \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0)$$

per ogni $x \in]0, +\infty[$. Sviluppando i calcoli, la precedente si riscrive:

$$\log x \leq 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \log 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \log x \geq 1 + \log 2 \ ,$$

da cui, come sopra, si ricava $f(x) > 0$ in tutto $]0, +\infty[$. ♦

`Esempio 4:` Infine, studiamo il problema di stabilire il segno della funzione:

$$f(x) := 2(x - 4) - \log(x - 2) \ ,$$

la quale è definita, continua e derivabile quante volte si vuole in $]2, +\infty[$.
La disequazione $f(x) \geq 0$ conduce alla disequazione $2(x - 4) \geq \log(x - 2)$, che non è risolubile elementarmente; inoltre, non si hanno immediatamente disponibili soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.
Studiamo la monotonia di f, provando a sfruttare le informazioni ottenute per risolvere il problema del segno. Calcolando troviamo:

$$f'(x) = \frac{2x - 5}{x - 2} \ ,$$

cosicché $f'(x) > 0$ [risp. < 0] solo se $x > 5/2$ [risp. $2 < x < 5/2$] ed $f'(x) = 0$ solo se $x = 5/2$; conseguentemente f è strettamente crescente [risp. strettamente decrescente] in $[5/2, +\infty[$ [risp. in $]0, 5/2]$] e prende il suo minimo assoluto in $x_0 = 5/2$, tale minimo essendo $f(5/2) = -1 + \log 2$.
Dato che $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, esiste un opportuno intorno destro di 2 in ogni punto a del quale si ha $f(a) > 0$; analogamente, visto che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, esiste un opportuno intorno di $+\infty$ in ogni punto b del quale risulta $f(b) > 0$; infine, poiché $f(5/2) < 0$, applicando il *Teorema degli Zeri* possiamo affermare l'esistenza di un punto $\xi \in]a, 5/2[$ e di un punto $\eta \in]5/2, b[$ tali che $f(\xi) = 0 = f(\eta)$.
Per stretta monotònia, i punti ξ ed η sono gli unici due punti in $]0, 5/2[$ e $]5/2, +\infty[$ in cui f si annulla, cioè sono gli unici zeri della funzione f nel proprio dominio.
Sfruttando nuovamente le proprietà di monotònia, riusciamo a dire che:

- $f(x) > 0$ se e solo se $x \in]2, \xi[\cup]\eta, +\infty[$;
- $f(x) < 0$ se e solo se $x \in]\xi, \eta[$;
- $f(x) = 0$ unicamente per $x = \xi, \eta$.

Buone approssimazioni di ξ ed η possono essere determinate iterando l'*algoritmo di bisezione*.[7] ♢

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: `guglielmo.dimeglio@unina.it`

[7] Con un software di calcolo si trova $\xi \approx 2.01903$ ed $\eta \approx 4.44754$