SOLUZIONI A QUALCHE ESERCIZIO DI BASE SULLO STUDIO DELLA FUNZIONE

G. DI MEGLIO

1. Esercizi

Studiare le seguenti funzioni[1]:

$$f(x) := (x^2-1)^2 \tag{E.1}$$

$$f(x) := \frac{x}{x^2-3x+6} \tag{E.2}$$

$$f(x) := \frac{x^2+1}{x-5} \tag{E.3}$$

$$f(x) := \frac{x^2}{x-4} - |x| \tag{E.4}$$

$$f(x) := \sqrt{1+x^2} \tag{E.5}$$

$$f(x) := \sqrt{6-x-x^2} \tag{E.6}$$

$$f(x) := \sqrt[3]{x(x-1)^2} \tag{E.7}$$

$$f(x) := (x-1)^2\ \mathbf{e}^{-x} \tag{E.8}$$

$$f(x) := \frac{x}{x+1}\ \mathbf{e}^{x} \tag{E.9}$$

$$f(x) := \frac{2\tan x}{1-\tan x} \tag{E.10}$$

$$f(x) := x\ \log|x| \tag{E.11}$$

$$f(x) := \begin{cases} \arctan \frac{x}{x+2} & \text{, se } x \neq -2 \\ 0 & \text{, altrimenti} \end{cases} \tag{E.12}$$

$$f(x) := |x|^x \tag{E.13}$$

$$f(x) := \begin{cases} \mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} & \text{, se } |x| < 1 \\ 0 & \text{, altrimenti} \end{cases} \tag{E.14}$$

$$f(x) := |x| - \log(x^2+1) \tag{E.15}$$

$$f(x) := \arctan(x^2) - \frac{x^2}{x^4+1} \tag{E.16}$$

$$f(x) := x^2\ (\log x - 1) \tag{E.17}$$

$$f(x) := \log(x^2-8x+17) \tag{E.18}$$

$$f(x) := \frac{2\log^2|x| + 5\log|x| + 2}{x}\ . \tag{E.19}$$

Inoltre, per ognuna delle funzioni proposte:

Date: 29 dicembre 2017.

[1] Alcune delle funzioni proposte sono tratte da vecchie tracce d'esame.

a. determinare *esplicitamente* l'immagine $f(\mathrm{Dom}\, f)$;

b. dire (senza necessariamente calcolarle esplicitamente) quante soluzioni ha l'equazione:

$$f(x) = k$$

al variare del parametro k in $\mathbb{R}$.

2. Soluzioni degli Esercizi

Le soluzioni riportate in questa sezione sono date in forma sintetica e molti passaggi sono sottointesi.
Sarà cura del lettore esplicitare tali passaggi e, qualora non riuscisse, venire a chiedere lumi al proprio docente.

Esercizio (E.1)**.** La funzione $f(x) := (x^2 - 1)^2$ è polinomiale ed è ottenuta sommando potenze pari; dunque:

- $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$,
- f è pari,
- f è continua e derivabile quante volte si vuole nel suo dominio.

Si vede facilmente che $f(x) \geq 0$ ovunque in $\mathrm{Dom}\, f$ ed, in particolare, che risulta:

- f è positiva in $\mathrm{Dom}\, f - \{\pm 1\}$,
- f è nulla in ± 1.

La continuità di f e la struttura del dominio assicurano che non c'è bisogno di calcolare limiti al finito; d'altra parte, per la parità della funzione si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \ ,$$

cosicché:

- f non è limitata superiormente, quindi non ha massimo assoluto.

Il fatto che f sia divergente in $\pm\infty$ consente la ricerca dell'asintoto obliquo; tuttavia, è evidente che il diagramma di f non può essere dotato di asintoti di tal fatta, giacché f è un polinomio di grado 4. Conseguentemente:

- il diagramma di f è privo di asintoti di qualsiasi genere.

La derivata di f si calcola usando la regola di derivazione della funzione composta:

$$f'(x) = 4x\ (x^2 - 1)\ ,$$

e si vede che f' è non negativa per $-1 \leq x \leq 0$ e $x \geq 1$; pertanto:

- f è strettamente crescente in $[-1, 0]$ ed in $[1, +\infty[$,
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, -1]$ ed in $[0, 1]$,
- il punto 0 è di massimo relativo per f con $f(0) = 1$,
- i punti ± 1 sono minimi assoluti per f e $\min f = f(\pm 1) = 0$.

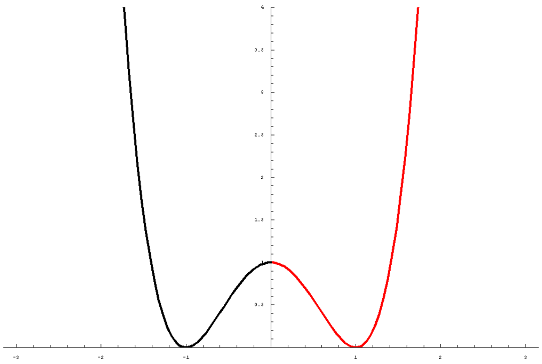

FIGURA 1. Diagramma di $f(x) := (x^2 - 1)^2$ (E.1).

La derivata seconda si calcola con la regola di derivazione del prodotto:

$$f''(x) = 4(x^2 - 1) + 8x^2 = 4(3x^2 - 1)$$

e si trova che essa è non negativa per $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure per $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$; perciò:

- f è strettamente convessa in $]-\infty, -1/\sqrt{3}]$ ed in $[1/\sqrt{3}, +\infty[$,
- f è strettamente concava in $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$,
- i punti di ascissa $\pm 1/\sqrt{3}$ sono di flesso a tangente obliqua per il diagramma di f.

a. Da quanto trovato circa gli estremi di f e dal *Teorema dei Valori Intermedi* segue immediatamente che:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = [\min f, \sup f[= [0, +\infty[$.

b. Da quanto trovato sopra consegue che l'equazione $f(x) = k$:

- non ha soluzioni reali per $k < 0$;
- ha due soluzioni reali per $k = 0$ oppure per $k > 1$;
- ha tre soluzioni reali per $k = 1$;[2]
- ha quattro soluzioni reali per $0 < k < 1$.

Esercizio (E.2)**.** La funzione $f(x) := \frac{x}{x^2-3x+6}$ è definita per:

$$x^2 - 3x + 6 \neq 0\ ,$$

cosicché:

- $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$.

Si prova facilmente che:

- f non è né pari, né dispari e nemmeno periodica;
- f è positiva in $]0, +\infty[$,
- f è negativa in $]-\infty, 0[$,

[2] La soluzione 0 ha però molteplicità doppia.

- f si annulla in 0;
- f è continua e derivabile quante volte si vuole in tutto il suo dominio.

La continuità e la struttura del dominio implicano che è necessario calcolare unicamente i limiti agli estremi del dominio: risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 ,$$

quindi:

- il diagramma di f non ha asintoti verticali né obliqui,
- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale in $\pm\infty$ la retta di equazione $y = 0$ (asse delle ascisse).

La derivata prima si calcola con le usuali regole di derivazione:

$$f'(x) = \frac{6 - x^2}{(x^2 - 3x + 6)^2} ,$$

da cui segue che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$; pertanto:

- f è strettamente crescente in $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$,
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, -\sqrt{6}]$ ed in $[\sqrt{6}, +\infty[$,
- f ha minimo assoluto in $-\sqrt{6}$ con $\min f = f(-\sqrt{6}) = -\sqrt{6}/(12 + 3\sqrt{6}) \approx -0.13$,
- f ha massimo assoluto in $\sqrt{6}$ con $\max f = f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}/(12 - 3\sqrt{6}) \approx 0.53$.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{2\ (x^3 - 18x + 18)}{(x^2 - 3x + 6)^3}$$

ed essa è non negativa se e solo se $x^3 - 18x + 18 \geq 0$; tale disequazione non si può risolvere con le tecniche illustrate durante il corso[3], quindi lo studio del segno può essere omesso.
Si noti, tuttavia, che per stabilire il segno della derivata seconda occorre e basta studiare il segno del polinomio $p(x) := x^3 - 18x + 18$.
Usando gli strumenti del Calcolo Differenziale, dall'espressione $p'(x) = 3x^2 - 18$ segue che p è strettamente crescente in $]-\infty, -\sqrt{6}]$ ed in $[\sqrt{6}, +\infty[$, che è strettamente decrescente in $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$, che $p(-\sqrt{6}) > 0$ e che $p(\sqrt{6}) < 0$; inoltre è $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$.
Da ciò e dal *Teorema dei Valori Intermedi* segue che il polinomio p ha esattamente tre zeri reali (diciamoli ξ_1, ξ_2, ξ_3, ordinati in modo che $\xi_1 < -\sqrt{6} < \xi_2 < \sqrt{6} < \xi_3$) e che esso è positivo in $]\xi_1, \xi_2[\cup]\xi_3, +\infty[$, negativo in $]-\infty, \xi_1[\cup]\xi_2, \xi_3[$.
Conseguentemente, f'' è positiva in $]\xi_1, \xi_2[\cup]\xi_3, +\infty[$, negativa in $]-\infty, \xi_1[\cup]\xi_2, \xi_3[$ e nulla in ξ_1, ξ_2, ξ_3, cosicché:

- f è strettamente convessa in $[\xi_1, \xi_2]$ ed in $[\xi_3, +\infty[$,
- f è strettamente concava in $]-\infty, \xi_1]$ e $[\xi_2, \xi_3]$,
- il diagramma di f ha flessi a tangente obliqua nei punti di ascissa $\xi_1 \approx -4.67$, $\xi_2 \approx 1.07$ e $\xi_3 \approx 3.61$.[4]

a. Dai risultati circa gli estremi assoluti e dal *Teorema dei Valori Intermedi* segue che:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = [\min f, \max f] = [-\frac{\sqrt{6}}{12+3\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{12-3\sqrt{6}}]$.

[3]Anche se essa si può risolvere elementarmente "a mano", usando una formula risolutiva del tutto analoga (ma più complicata) a quella esistente per le equazioni di secondo grado, detta *formula di Cardano*.

[4]I valori approssimati sono stati trovati usando un calcolatore.

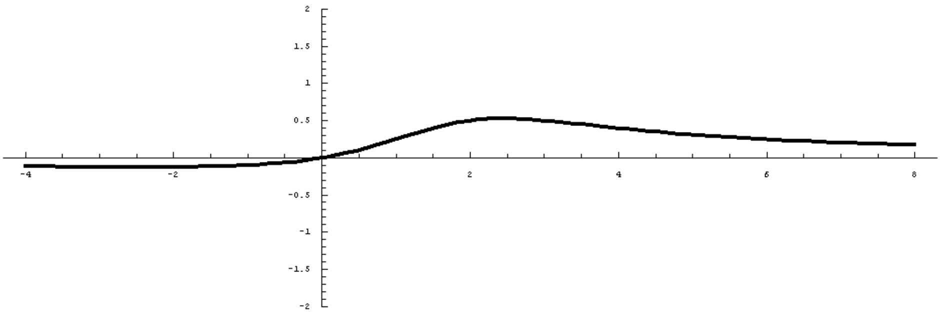

FIGURA 2. Diagramma di $f(x) := \frac{x}{x^2-3x+6}$ (E.2).

b.Dal punto **a** e dai risultati sulla monotònia di f segue che l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k < -\frac{\sqrt{6}}{12+3\sqrt{6}}$ oppure se $k > \frac{\sqrt{6}}{12-3\sqrt{6}}$,
- una soluzione se $k = -\frac{\sqrt{6}}{12+3\sqrt{6}}$ oppure se $k = \frac{\sqrt{6}}{12-3\sqrt{6}}$ ovvero se $k = 0$,
- due soluzioni se $-\frac{\sqrt{6}}{12+3\sqrt{6}} < k < 0$ oppure se $0 < k < \frac{\sqrt{6}}{12-3\sqrt{6}}$.

Esercizio (E.3)**.** La funzione $f(x) := \frac{x^2+1}{x-5}$ è definita per $x \neq 5$, quindi:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{5\}$;

inoltre si vede che:

- f non è né pari, né dispari, né periodica;
- f è positiva in $]5, +\infty[$,
- f è negativa in $]-\infty, 5[$;
- f è continua e derivabile quante volte si vuole nel suo insieme di definizione.

Per continuità, gli unici limiti che interessa davvero calcolare sono quelli agli estremi del dominio: si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to 5^\pm} f(x) = \pm\infty \ ,$$

perciò:

- la f non è limitata né superiormente né inferiormente, quindi non ha né massimo né minimo assoluto;
- il diagramma di f ha come asintoto verticale (a sinistra in basso e a destra in alto) la retta di equazione $x = 5$;

inoltre, dato che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m_{\pm\infty} \ ,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - m_{\pm\infty}x = 5 = q_{\pm\infty} \ ,$$

si può asserire che:

- il diagramma di f ha come asintoto obliquo in $+\infty$ ed in $-\infty$ la retta di equazione $y = x + 5$.

La derivata della funzione si calcola come al solito:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 10x - 1}{(x-5)^2}$$

e si nota che essa è non negativa per $x \leq 5 - \sqrt{26} \approx -0.1$ e $x \geq 5 + \sqrt{26} \approx 10.1$, cosicché:

- f è strettamente crescente in $]-\infty, 5-\sqrt{26}]$ ed in $[5+\sqrt{26}, +\infty[$,
- f è strettamente decrescente in $[5-\sqrt{26}, 5[$ ed in $]5, 5+\sqrt{26}]$;
- il punto $5-\sqrt{26}$ è di massimo relativo, con $f(5-\sqrt{26}) = \frac{10\sqrt{26}-52}{\sqrt{26}} \approx -0.2 < 0$,
- il punto $5+\sqrt{26}$ è di minimo relativo, con $f(5+\sqrt{26}) = \frac{10\sqrt{26}+52}{\sqrt{26}} \approx 20.2 > 0$.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{52}{(x-5)^3}$$

e da ciò segue immediatamente che:

- f è strettamente convessa in $]5, +\infty[$,
- f è strettamente concava in $]-\infty, 5[$;
- il diagramma di f non ha punti di flesso.

a. Dai risultati sulla monotònia di f segue che:

$$\begin{aligned}
\inf_{x<5} f &= \lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty \\
\max_{x<5} f &= f(5-\sqrt{26}) = \frac{10\sqrt{26}-52}{\sqrt{26}} \\
\min_{x>5} f &= f(5+\sqrt{26}) = \frac{10\sqrt{26}+52}{\sqrt{26}} \\
\sup_{x>5} f &= \lim_{x\to 5^+} f(x) = +\infty \ ,
\end{aligned}$$

dunque per il *Teorema dei Valori Intermedi* si ha:

$$\begin{aligned}
f(]-\infty, 5[) &= \left]-\infty, \frac{10\sqrt{26}-52}{\sqrt{26}}\right] \\
f(]5, +\infty[) &= \left[\frac{10\sqrt{26}+52}{\sqrt{26}}, +\infty\right[\ .
\end{aligned}$$

Da ciò segue che:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) =]-\infty, \frac{10\sqrt{26}-52}{\sqrt{26}}] \cup [\frac{10\sqrt{26}+52}{\sqrt{26}}, +\infty[$.

b. Dai risultati sulla monotònia e dal punto **a** segue che l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $\frac{10\sqrt{26}-52}{\sqrt{26}} < k < \frac{10\sqrt{26}+52}{\sqrt{26}}$,
- una soluzione se $k = \frac{10\sqrt{26}-52}{\sqrt{26}}$ oppure $k = \frac{10\sqrt{26}+52}{\sqrt{26}}$,
- due soluzioni se $k < \frac{10\sqrt{26}-52}{\sqrt{26}}$ oppure $k > \frac{10\sqrt{26}+52}{\sqrt{26}}$.

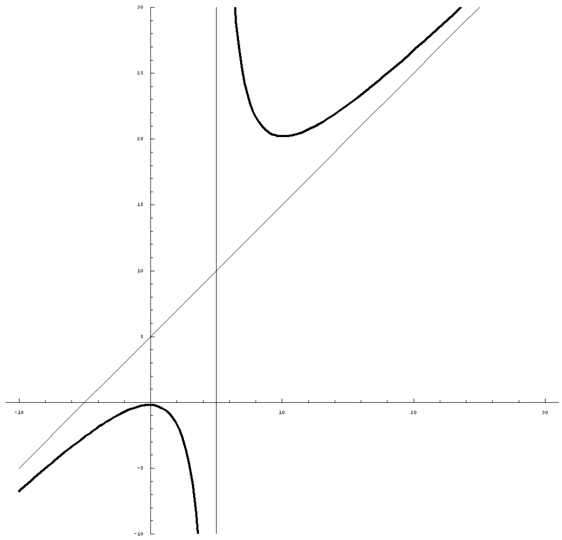

FIGURA 3. Diagramma di $f(x) := \frac{x^2+1}{x-5}$ (E.3).

Esercizio (E.4)**.** La funzione $f(x) := \frac{x^2}{x-4} - |x|$ è definita in:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{4\}$.

Si vede facilmente che:

- f non è né pari, né dispari, né tanto meno periodica;
- f è continua ovunque nel suo dominio.

Usando la definizione di valore assoluto si può ottenere la legge di assegnazione divisa per casi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-4} & \text{, se } 0 \le x < 4 \text{ oppure } x > 4 \\ \frac{2x(x-2)}{x-4} & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

e tale legge può essere usata per studiare il segno di f; si ha $f(x) \ge 0$ solo se è soddisfatto uno dei seguenti sistemi:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \frac{4x}{x-4} \ge 0 \\ 0 \le x < 4 \text{ oppure } x > 4 \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \text{oppure } \begin{cases} \frac{2x(x-2)}{x-4} \ge 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad ;$$

il sistema (I) ha come soluzioni $x = 0$ ed $x > 4$, mentre il sistema (II) non ha alcuna soluzione. Conseguentemente:

- f è positiva in $]4, +\infty[$,
- f è negativa in $]-\infty 0[\cup]0, 4[$,
- f si annulla in 0.

Per continuità, gli unici limiti che interessa calcolare sono quelli agli estremi del dominio: risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$$
$$\lim_{x \to 4^\pm} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ ,$$

perciò:

- f non è limitata né inferiormente né superiormente, cosicché essa non ha né minimo né massimo assoluti;
- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale in $+\infty$ la retta di equazione $y = 4$,
- il diagramma di f ha come asintoto verticale (a sinistra in basso e a destra in alto) la retta di equazione $x = 4$.

Il fatto che f diverga in $-\infty$ consente di controllare la presenza dell'asintoto obliquo: dato che:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x-2)}{x-4} \\
&= 2 = m_{-\infty} \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty}x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x-4} - 2x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x-4} \\
&= 4 = q_{-\infty}\ ,
\end{aligned}$$

si può affermare che:

- il diagramma di f ha come asintoto obliquo in $-\infty$ la retta di equazione $y = 2x + 4$.

La f è certamente derivabile quante volte si vuole in $\operatorname{Dom} f - \{0\}$, essendo 0 il punto di raccordo di intervalli in cui valgono differenti espressioni analitiche per f; per controllare la derivabilità di f in 0 da destra e da sinistra, si calcola:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0,\ x>0} \frac{\frac{4x}{x-4}}{x} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{4}{x-4} \\
&= -1 \\
\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0,\ x<0} \frac{\frac{2x(x-2)}{x-4}}{x} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{2(x-2)}{x-4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

e se ne deduce che:

- f è derivabile quante volte si vuole in $\operatorname{Dom} f - \{0\}$,
- f è derivabile in 0 da sinistra e da destra, ma non globalmente giacché $f'_-(0) = 1 \neq -1 = f'_+(0)$;
- il diagramma di f presenta in 0 un punto angoloso.

La derivata di f è:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{16}{(x-4)^2} & \text{, se } 0 < x < 4 \text{ oppure } x > 4 \\ 2\frac{x^2-8x+8}{(x-4)^2} & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

ed essa è non negativa quando è soddisfatto uno dei sistemi:

(I′) $$\begin{cases} -\frac{16}{(x-4)^2} \geq 0 \\ 0 < x < 4 \text{ oppure } x > 4 \end{cases}$$

(II′) oppure $$\begin{cases} \frac{2(x^2-8x+8)}{x-4} \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad ;$$

il sistema (I′) evidentemente non ha alcuna soluzione, mentre il secondo ha come soluzioni tutti gli $x < 0$. Conseguentemente:

- la f è strettamente crescente in $]-\infty, 0]$,
- la f è strettamente decrescente in $[0, 4[$ ed in $]4, +\infty[$;
- la f ha un massimo relativo nel punto 0 (di non derivabilità) con $f(0) = 0$.

La derivata seconda della funzione f è:

$$f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3}$$

per $x \neq 0, 4$, e da ciò segue immediatamente che:

- f è strettamente convessa in $]4, +\infty[$,
- f è strettamente concava in $]-\infty, 4[$;
- il diagramma di f non ha punti di flesso.

a. Quanto trovato circa la monotònia di f implica che:

$$\begin{aligned}
\inf_{x<4} f &= \lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty \\
\max_{x<4} f &= f(0) = 0 \\
\inf_{x>4} f &= \lim_{x\to +\infty} f(x) = 4 \\
\sup_{x>4} f &= \lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty \ ,
\end{aligned}$$

e ciò, per il *Teorema dei Valori Intermedi*, consente di affermare che:

$$\begin{aligned}
f(]-\infty, 4[) &=]-\infty, 0] \\
f(]4, +\infty[) &=]4, +\infty[\ .
\end{aligned}$$

Dato che $\operatorname{Dom} f =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$, si ha infine:

- $f(\operatorname{Dom} f) =]-\infty, 0] \cup]4, +\infty[$.

b. Dati i risultati sulla monotonia di f ed il punto **a**, si può dire che l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $0 < k \leq 4$,
- una soluzione se $k = 0$ oppure $k > 4$,
- due soluzioni se $k < 0$.

Esercizio (E.5)**.** La funzione $f(x) := \sqrt{1 + x^2}$ è definita in:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$;

calcolando $f(-x)$ che:

- f è pari e non periodica,

quindi se ne può studiare il comportamento anche limitatamente al solo insieme $X := [0, +\infty[$.; inoltre, evidentemente:

- f è continua e derivabile quante volte si vuole in $\operatorname{Dom} f$;
- f è positiva ovunque in $\operatorname{Dom} f$.

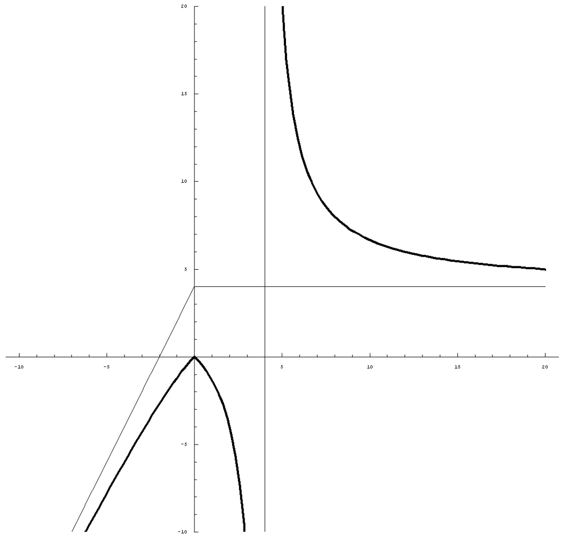

FIGURA 4. Diagramma di $f(x) := \frac{x^2}{x-4} - |x|$ (E.4).

Per continuità, l'unico limite che ha senso calcolare è quello in $+\infty$: si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ ,$$

cosicché si può dire che:

- f è positivamente divergente sia in $+\infty$ sia in $-\infty$,
- f è limitata inferiormente ma non superiormente, dunque f non ha massimo assoluto.

Ricercando l'asintoto obliquo si trova:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \\
&= 1 = m_{+\infty} \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - m_{+\infty}x &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} - x \\
&= \lim_{x\to+\infty} x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\
&\overset{y=1/x^2}{=} \lim_{y\to0^+} \frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{y}} \\
&= \lim_{y\to0^+} \underbrace{\frac{\sqrt{1+y}-1}{y}}_{\to 1/2} \cdot \sqrt{y} \\
&= 0 = q_{+\infty} \ ,
\end{aligned}$$

quindi, ricordando che f è pari, si può affermare che:

- il diagramma di f è privo di asintoti verticali ed orizzontali,
- il diagramma di f ha come asintoto obliquo in $+\infty$ la retta di equazione $y = x$,
- il diagramma di f ha come asintoto obliquo in $-\infty$ la retta di equazione $y = -x$.

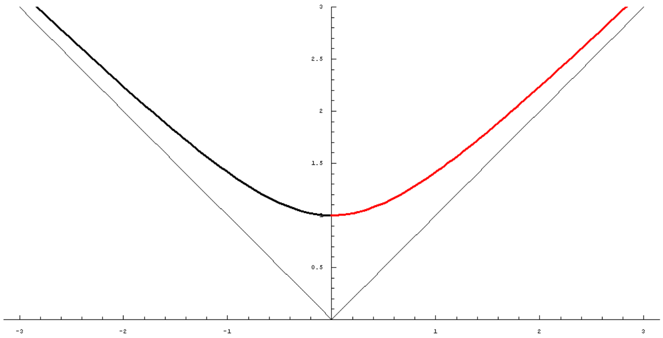

FIGURA 5. Diagramma di $f(x) := \sqrt{1+x^2}$ (E.5).

La derivata di f si calcola con le regole usuali:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ ,$$

e si vede facilmente che essa è non negativa in X; pertanto, sfruttando la parità di f, si ottiene:

- f è strettamente crescente in $[0, +\infty[$,
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$;
- il punto 0 è di minimo assoluto per f e risulta $\min f = f(0) = 1$.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \ ,$$

e si vede che essa è positiva in tutto X; ne consegue che:

- f è strettamente convessa in $\operatorname{Dom} f$;
- il diagramma di f non presenta punti di flesso.

a. Per quanto stabilito circa gli estremi di f, e data la continuità della funzione, si può affermare che:

- l'immagine della funzione è $f(\operatorname{Dom} f) = [\min f, \sup f[= [1, +\infty[$.

b. Per la monotonia ed il punto **a**, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione per $k < 1$,
- una soluzione per $k = 1$,
- due soluzioni per $k > 1$.

Esercizio (E.6)**.** La funzione $f(x) := \sqrt{6 - x - x^2}$ è definita lì dove il radicando non è negativo; perciò:

- $\operatorname{Dom} f = [-3, 2]$.

Calcolando esplicitamente $f(-x)$ si nota che:

- f non è né pari né dispari;

inoltre:

- f non è periodica;
- f è continua in tutto il suo insieme di definizione.

La continuità e la compattezza del dominio implicano che:

- f è dotata di massimo e minimo assoluti;
- il diagramma di f è privo di asintoti di qualsiasi tipo.

Tenendo presenti i teoremi sulle drivate, si può dire che f è certamente derivabile in $]-3,2[$ e che la sua derivata è:

$$f'(x) = -\frac{1+2x}{2\sqrt{6-x-x^2}}\ .$$

Usando una nota conseguenza del *Teorema di de l'Hôpital*, per studiare la derivabilità da destra in -3 e da sinistra in 2 basta calcolare:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3^+} f'(x) &= \lim_{x\to -3^+} -\frac{1+2x}{2\sqrt{6-x-x^2}}\\ &= +\infty\\ \lim_{x\to 2^-} f'(x) &= \lim_{x\to 2^-} -\frac{1+2x}{2\sqrt{6-x-x^2}}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

e da ciò segue che:

- f è derivabile in $]-3,2[$,
- f non è derivabile da destra in -3 né da sinistra in -2;
- il diagramma di f ha nei punti di ascissa -3 e 2 punti a tangente verticale.

Dall'espressione della derivata prima segue che essa è non negativa per $x \leq -\frac{1}{2}$, dunque:

- f è strettamente crescente in $[-3,-1/2]$,
- f è strettamente decrescente in $[-1/2,2]$;
- il punto $-1/2$ è di massimo assoluto per f, con $\max f = f(-1/2) = 5/2$,
- i punti di non derivabilità -3 e 2 sono di minimo assoluto per f, con $\min f = f(-3) = f(2) = 0$.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = -\frac{25}{4(6-x-x^2)\sqrt{6-x-x^2}}$$

e si vede che essa è negativa per $-3 < x < 2$; perciò:

- f è strettamente concava in $[-3,2]$;
- il diagramma di f non ha punti di flesso.

a. Per il *Teorema dei Valori Intermedi* si ha:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = [\min f, \max f] = [0, 5/2]$.

b. I risultati circa la monotonia di f implicano che l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k < 0$ oppure $k > 5/2$,

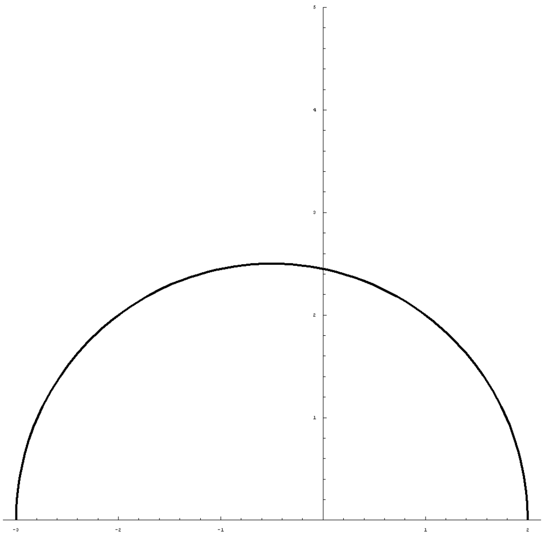

FIGURA 6. Diagramma di $f(x) := \sqrt{6 - x - x^2}$ (E.6).

- una soluzione se $k = 5/2$,
- due soluzioni se $0 < k < 5/2$.

Esercizio (E.7)**.** La funzione $f(x) := \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ è ovunque definita, quindi:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Si vede che:

- f non è né pari, né dispari e neanche periodica;
- f è continua in $\operatorname{Dom} f$.

La f è non negativa laddove lo è il radicando; pertanto:

- f è positiva in $]0, 1[\cup]1, +\infty[$,
- f è negativa in $]-\infty, 0[$,
- f si annulla in 0 ed in 1.

Per la continuità e per le caratteristiche del dominio, gli unici limiti che interessa calcolare sono:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;;$$

da ciò segue che:

- la f non è limitata né inferiormente né superiormente, cosicché non è dotata né di minimo né di massimo assoluti.

La continuità di f e la sua divergenza agli estremi del dominio implicano che:

- il diagramma di f non è dotato di asintoti verticali o orizzontali;

per verificare la presenza di asintoti obliqui, si calcola:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x(x-1)^2}{x^3}} \\
&= 1 = m_{\pm\infty} \\
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - m_{\pm\infty}x &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x \left(\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2} - 1 \right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-\frac{1}{x})^{2/3} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&= -\frac{2}{3} = q_{\pm\infty}
\end{aligned}
$$

cosiché:

- il diagramma di f ha come asintoto obliquo in $\pm\infty$ la retta di equazione $y = x - \frac{2}{3}$.

La funzione f è derivabile nei punti in cui il radicando non si annulla, ossia in $\mathrm{Dom}\, f - \{0, 1\}$; nei punti di tale insieme la derivata prima di f è:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-1)(3x-1)}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} \\
&= \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}
\end{aligned}
$$

e da ciò segue che:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to 1^-} f'(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to 1^+} f'(x) &= +\infty\ ,
\end{aligned}
$$

cosicché:

- f è derivabile in $\mathrm{Dom}\, f - \{0, 1\}$,
- f non è derivabile né da destra né da sinistra in 0 ed in 1;
- il diagramma di f presenta nel punto di ascissa 0 un flesso a tangente verticale,
- il diagramma di f presenta nel punto di ascissa 1 una cuspide rivolta verso il basso.

La derivata f' è non negativa non appena risulti $x < 0$ oppure $0 < x \le 1/3$ o $x > 1$, pertanto:

- la f è strettamente crescente in $]-\infty, 1/3]$ ed in $[1, +\infty[$,
- la f è strettamente decrescente in $[1/3, 1]$,
- il punto $1/3$ è di massimo relativo, con $f(1/3) = \sqrt[3]{4}/3 \approx 0.53$,
- il punto 1 è di minimo relativo, con $f(1) = 0$.

La derivata seconda è:

$$
f''(x) = -\frac{2}{9x\ \sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}
$$

e si vede che essa è positiva per $x < 0$; dunque:

- la f è convessa in $]-\infty, 0]$,

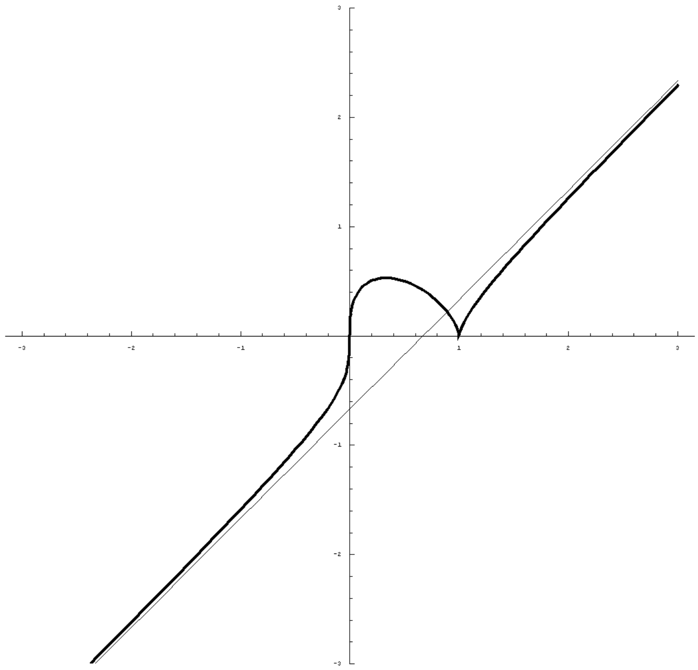

FIGURA 7. Diagramma di $f(x) := \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (E.7).

- la f è concava in $[0,1]$ ed in $[1,+\infty[$;
- il diagramma di f non ha punti di flesso a tangente obliqua.

a. Visto quanto trovato più sopra, si ha:

- $f(\operatorname{Dom} f) =]\inf f, \sup f[= \mathbb{R}$.

b. Per le proprietà di monotònia di f, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- una soluzione se $k < 0$ oppure se $k > \sqrt[3]{4}/3$,
- due soluzioni se $k = 0$ oppure se $k = \sqrt[3]{4}/3$,
- tre soluzioni se $0 < k < \sqrt[3]{4}/3$.

Esercizio (E.8)**.** La funzione $f(x) := (x-1)^2\mathrm{e}^{-x}$ gode evidentemente delle seguenti proprietà:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$;
- f non è né pari, né dispari e neanche periodica;
- f è positiva in $\mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$,
- f si annulla in 1;
- f è continua e derivabile quante volte si vuole in $\operatorname{Dom} f$.

Per la continuità, non ci sono limiti al finito da calcolare; agli estremi dell'intervallo di definizione si trova:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{\mathbf{e}^x} \\
&= 0 \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &\overset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty} (y+1)^2\ \mathbf{e}^y \\
&= +\infty\ ,
\end{aligned}$$

quindi:

- f diverge positivamente in $-\infty$, cosicché non è limitata superiormente ed è priva di massimo assoluto;
- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale in $+\infty$ la retta di equazione $y = 0$ (asse delle ascisse),
- il diagramma di f non presenta asintoti verticali.

Il fatto che f diverga in $-\infty$ consente la ricerca dell'asintoto obliquo; tuttavia, dai calcoli svolti in precedenza si evince che f è un infinito d'ordine esponenziale in $-\infty$, dunque risulta certamente:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\ ,$$

cosicché:

- il diagramma di f non presenta asintoti in ∞.

La derivata prima si calcola con la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(x-1)\ \mathbf{e}^{-x} - (x-1)^2\ \mathbf{e}^{-x} \\
&= -(x^2-4x+3)\ \mathbf{e}^{-x}\ ,
\end{aligned}$$

e da ciò segue che f' è non negativa quando $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, cioè per $1 \leq x \leq 3$; dunque:

- f è strettamente crescente in $[1, 3]$,
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, 1]$ ed in $[3, +\infty[$,
- f ha minimo assoluto in 1, con $\min f = f(1) = 0$,
- f ha massimo relativo in 3, con $f(3) = 4\mathbf{e}^{-3} \approx 0.2$.

La derivata seconda si calcola allo stesso modo:

$$f''(x) = (x^2 - 6x + 7)\ \mathbf{e}^{-x}\ ,$$

ed essa è non negativa per $x \leq 3 - \sqrt{2}$ oppure $x \geq 3 + \sqrt{2}$, cosicché:

- f è strettamente convessa in $]-\infty, 3-\sqrt{2}]$ ed in $[3+\sqrt{2}, +\infty[$,
- f è strettamente concava in $[3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}]$;
- il diagramma di f presenta due punti di flesso nei punti di ascissa $3 \pm \sqrt{2}$.

a. Per quanto visto finora e per il *Teorema dei Valori Intermedi* si ha:

- $f(\operatorname{Dom} f) = [0, +\infty[$.

b. Per la monotònia di f, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k < 0$,

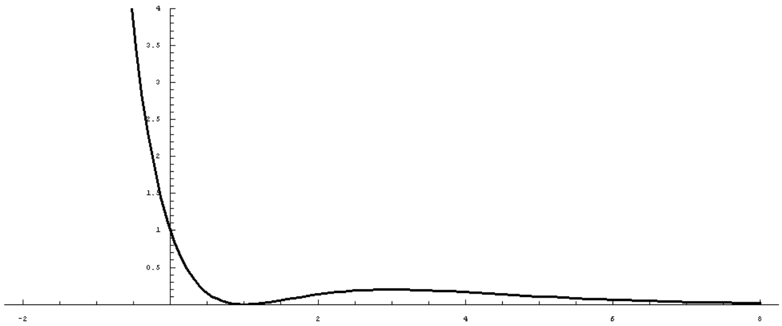

FIGURA 8. Diagramma di $f(x) := (x-1)^2\mathbf{e}^{-x}$ (E.8).

- una soluzione se $k = 0$ oppure se $k > 4\mathbf{e}^{-3}$,
- due soluzioni se $k = 4\mathbf{e}^{-3}$,
- tre soluzioni se $0 < k < 4\mathbf{e}^{-3}$.

Esercizio (E.9)**.** La funzione $f(x) := \frac{x}{x+1}\mathbf{e}^x$ è definita in:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$,

e si vede facilmente che:

- f non è né pari, né dispari e nemmeno periodica;
- f è continua e derivabile quante volte si vuole nel suo insieme di definizione.

Il segno di f dipende dal segno della funzione razionale $\frac{x}{x+1}$, dunque è semplice stabilire che:

- f è positiva in $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$,
- f è negativa in $]-1, 0[$,
- f si annulla in 0.

Per la continuità di f, gli unici limiti che occorre calcolare sono quelli agli estremi degli intervalli che compongono il dominio: si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^\pm} f(x) = \mp\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \ ,$$

dunque si può affermare che:

- f non è limitata né inferiormente né superiormente, dunque essa è priva di massimo e di minimo assoluti.

Il fatto che f converga in $-\infty$ e che diverga a sinistra ed a destra di -1 implica che:

- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale in $-\infty$ la retta di equazione $y = 0$,
- il diagramma di f ha come asintoto verticale (a sinistra in alto e a destra in basso) la retta di equazione $x = -1$.

Inoltre, il fatto che f diverga in $+\infty$ consente la ricerca dell'asintoto obliquo; tuttavia, dato che risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

(perché l'esponenziale è infinito d'ordine superiore), si può dire senz'altro che:

- il diagramma di f non ha asintoto obliquo in $+\infty$.

La derivata prima della funzione si calcola con la regola del prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2}\ \mathbf{e}^x + \frac{x}{x+1}\ \mathbf{e}^x \\ &= \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\ \mathbf{e}^x \end{aligned}$$

e da ciò segue che f' è non negativa laddove $x^2+x+1 \geq 0$, cioè ovunque in $\mathrm{Dom}\, f$; pertanto:

- f è strettamente crescente in $]-\infty,-1[$ ed in $]-1,+\infty[$,
- f non ha estremi relativi.

Anche la derivata seconda si può calcolare con la regola del prodotto:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+1)(x+1)-2(x^2+x+1)}{(x+1)^3}\ \mathbf{e}^x + \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\ \mathbf{e}^x \\ &= \frac{x-1}{(x+1)^3}\ \mathbf{e}^x\ , \end{aligned}$$

e da ciò segue che f'' è non negativa quando lo è la funzione razionale $\frac{x-1}{(x+1)^3}$, cioè per $x<-1$ oppure per $x \geq 1$; dunque:

- f è strettamente convessa in $]-\infty,-1[$ ed in $[1,+\infty[$,
- f è strettamente concava in $]-1,1]$;
- il diagramma di f ha un punto di flesso a tangente obliqua nel punto di ascissa 1.

a. Visti la monotònia di f ed il *Teorema di Regolarità delle Funzioni Monotòne*, si ha:

$$\begin{aligned} \inf_{x<-1} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ \sup_{x<-1} f(x) &= \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \\ \inf_{x>-1} f(x) &= \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \\ \sup_{x>-1} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

cosicché, per il *Teorema dei Valori Intermedi*, risulta:

$$\begin{aligned} f\Big(]-\infty,-1[\Big) &=]0,+\infty[\\ f\Big(]-1,+\infty[\Big) &= \mathbb{R}\ ; \end{aligned}$$

quindi si può affermare che:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) =]0,+\infty[\cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

b. Data la monotònia di f e le informazioni ricavate nel punto **a**, si trova che l'equazione $f(x)=k$ ha:

- una soluzione se $k \leq 0$,
- due soluzioni se $k>0$.

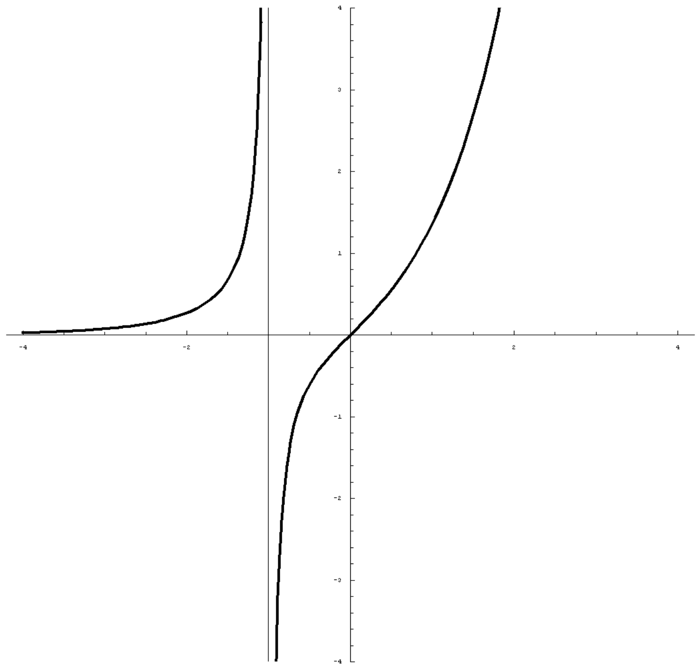

FIGURA 9. Diagramma di $f(x) := \frac{x}{x+1}\,\mathbf{e}^x$ (E.9).

Esercizio (E.10)**.** La funzione $f(x) := \frac{2\tan x}{1-\tan x}$ è definita sull'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, & \text{con } n \in \mathbb{Z} \\ 1 - \tan x \neq 0 \end{cases} ,$$

quindi:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right\}$.

Il dominio di f non è bilanciato, quindi:

- la f non è né pari né dispari;

d'altro canto, dato che la tangente è periodica di periodo $T = \pi$, la funzione assegnata conserva almeno la stessa periodicità ossia:

- f è periodica di periodo $T = \pi$.[5]

Conseguentemente, è possibile limitare lo studio della funzione f ad un intervallo di ampiezza π; per fissare le idee, si può scegliere l'intervallo $[0, \pi]$ in modo da studiare la f in:

$$X := \operatorname{Dom} f \cap [0, \pi] = [0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] .$$

Inoltre, notato che per $x \in X$ si ha:

$$\frac{2\tan x}{1-\tan x} = \frac{2\sin x}{\cos x - \sin x} ,$$

qualora servisse a semplificare i calcoli si può esprimere la legge di assegnazione di f anche usando seno e coseno:

$$f(x) = \frac{2\sin x}{\cos x - \sin x} .$$

[5]Si può provare che $T = \pi$ è effettivamente il minimo periodo di f.

Lo studio del segno di f si può fare con metodi elementari, risolvendo la disquazione:

$$\frac{2\tan x}{1-\tan x} \geq 0 \ ;$$

il numeratore è non negativo per $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ e per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, mentre il denominatore è positivo per $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$, quindi la frazione $\frac{2\tan x}{1-\tan x}$ è non negativa per $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ e per $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. Quindi:

- f è positiva in $]0,\pi/4[\cup]\pi/2,\pi[$ limitatamente ad X, ed in tutti gli intervalli contenuti in $\operatorname{Dom} f$ che si ottengono da questi due traslandoli di $n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$),
- f è negativa in $]\pi/4,\pi/2[$ limitatamente ad X, ed in tutti gli intervalli contenuti in $\operatorname{Dom} f$ che si ottengono da questo traslandolo di $n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$),
- f si annulla in 0 ed in π limitatamente ad X, ed in tutti i punti di $\operatorname{Dom} f$ del tipo $n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$).

Si vede immediatamente che:

- f è continua in X e dunque essa è continua pure in tutto $\operatorname{Dom} f$.

Per la continuità, gli unici limiti che interessa calcolare sono quelli agli estremi degli intervalli che compongono X: si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^\pm} f(x) = \mp\infty \\
&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^\pm} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^\pm} \frac{2\sin x}{\cos x - \sin x} = 0 \ ,
\end{aligned}$$

quindi:

- la f non è limitata né inferiormente né superiormente in X e non ha massimo né minimo assoluto in X, dunque gode delle stesse proprietà in tutto $\operatorname{Dom} f$,
- la f si può prolungare su $\pi/2$ con continuità ponendo $f(\pi/2) = 0$, dunque f si può prolungare anche su ogni punto del tipo $\pi/2+n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$) ponendo $f(\pi/2+n\pi) = 0$.

D'ora in avanti, il simbolo f denoterà sempre il prolungamento continuo della funzione assegnata all'insieme $\operatorname{Dom} f \cup \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\pi/4 + n\pi\}$, cioè la funzione definita ponendo:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2\tan x}{1-\tan x} & , \text{se } x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ (con } n \in \mathbb{Z}) \\ 0 & , \text{se } x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ (con } n \in \mathbb{Z}) \end{cases} .$$

Da quanto appena trovato segue che:

- il diagramma di f ha come asintoto verticale in X la retta di equazione $x = \pi/4$, dunque tutte le rette del tipo $x = \pi/4 + n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$) sono asintoti verticali per il diagramma di f,
- il diagramma di f non ha asintoti orizzontali od obliqui.

La derivata prima si calcola con la regola del rapporto per $x \neq \pi/4 + n\pi, \pi/2 + n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{2}{\cos^2 x}(1-\tan x) + 2\tan x\ \frac{1}{\cos^2 x}}{(1-\tan x)^2} \\
&= \frac{2}{\cos^2 x\ (1-\tan x)^2}
\end{aligned}$$

e si può esprimere anche come:

$$f'(x) = \frac{2}{(\cos x - \sin x)^2} \ .$$

Si vede che tale espressione rimane valida anche nei punti del tipo $\pi/2+n\pi$, ergo essa è la derivata del prolungamento continuo della funzione assegnata all'inizio all'insieme $\mathbb{R} - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\pi/4 + n\pi\}$. La derivata f' è ovunque positiva, perciò:

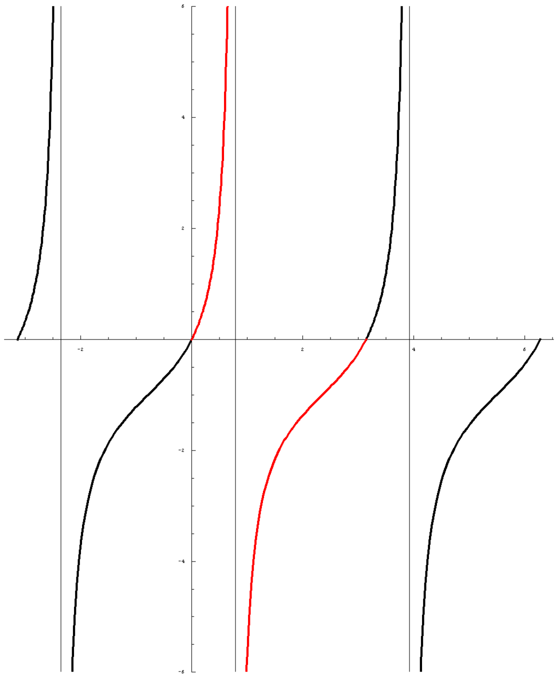

FIGURA 10. Diagramma di $f(x) := \frac{2\tan x}{1-\tan x}$ (E.10).

- f è strettamente crescente in $[0, \pi/4[$ ed in $]\pi/4, \pi]$ limitatamente ad X, dunque f ha le stesse proprietà negli intervalli che compongono il dominio,
- f non ha punti di estremo relativo.

La derivata seconda si può calcolare con la regola delle funzioni composte:

$$f''(x) = \frac{4(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)^3} \ ;$$

essa si annulla in $[0, \pi]\{\pi/4\}$ nel punto $3\pi/4$ ed è non negativa in $[0, \pi/4[\cup[3\pi/4, \pi]$, cosicché:

- la f è strettamente convessa in $[0, \pi/4[$ ed in $]\pi/4, 3\pi/4]$, dunque in tutti gli intervalli del tipo $[-\pi/4 + n\pi, \pi/4 + n\pi[$ (con $n \in \mathbb{Z}$),
- la f è strettamente concava in $]\pi/4, 3\pi/4]$, dunque in tutti gli intervalli del tipo $]\pi/4 + n\pi, 3\pi/4 + n\pi]$ (con $n \in \mathbb{Z}$);
- il diagramma di f presenta nei punti di ascissa $3\pi/4 + n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$) dei punti di flesso a tangente obliqua.

a. Per la continuità di f in ogni intervallo di periodicità, risulta:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = \mathbb{R}$.

b. Data la periodicità della funzione, la continuità, la monotònia e il riultato del punto **a**, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- un'infinità numerabile di soluzioni per ogni $k \in \mathbb{R}$, una in ogni intervallo di ampiezza π.

Esercizio (E.11)**.** La funzione $f(x) := x \log |x|$ è:

- definita in$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- continua e derivabile quante volte si vuole nel suo insieme di definizione.

Calcolando esplicitamente $f(-x)$ si vede che:

- f è dispari,

dunque essa può essere studiata anche solo limitatamente all'insieme $X :=]0, +\infty[$; in tale insieme, la legge di assegnazione esplicita di f è più semplice, cioè:

$$f(x) = x\ \log x \qquad (x \in X),$$

poiché si può sopprimere il valore assoluto.
Inoltre:

- f non è periodica.

Calcolando i limiti agli estremi dell'insieme X si trova:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x\ \log x \\ &\overset{x=\mathbf{e}^{-y}}{=} \lim_{y\to+\infty} \mathbf{e}^{-y}\ \log \mathbf{e}^{-y} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{-y}{\mathbf{e}^{y}} \\ &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty\ , \end{aligned}$$

cosicché, tenendo presente la disparità di f, si può asserire che:

- f diverge positivamente in $+\infty$, dunque non è limitata superiormente e non ha massimo assoluto,
- f diverge negativamente in $-\infty$, dunque non è limitata inferiormente e non ha minimo assoluto,
- f ha limite finito in 0, dunque essa si può prolungare con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

D'ora in avanti, la lettera f denoterà sempre il prolungamento continuo della funzione assegnata a tutto $\mathbb{R}$, ossia la funzione definita ponendo:

$$f(x) := \begin{cases} x\ \log|x| & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Le informazioni ricavate finora consentono di escludere la presenza di asintoti verticali ed orizzontali; si può ricercare però l'asintoto obliquo. Tuttavia, dato che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

e vista la disparità di f, si può anche escludere la presenza di asintoti obliqui. Ne consegue che:

- il diagramma di f non è dotato di asintoti di alcun genere.

La derivata prima della funzione f limitatamente all'insieme X si calcola con la regola del prodotto:

$$f'(x) = \log x + 1\ ;$$

d'altra parte, per controllare la derivabilità da destra in 0 basta calcolare:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty\ .$$

Ne consegue, data la disparità di f, che:

- f non è derivabile in 0 né da destra né da sinistra, poiché $f'_\pm(0) = -\infty$;

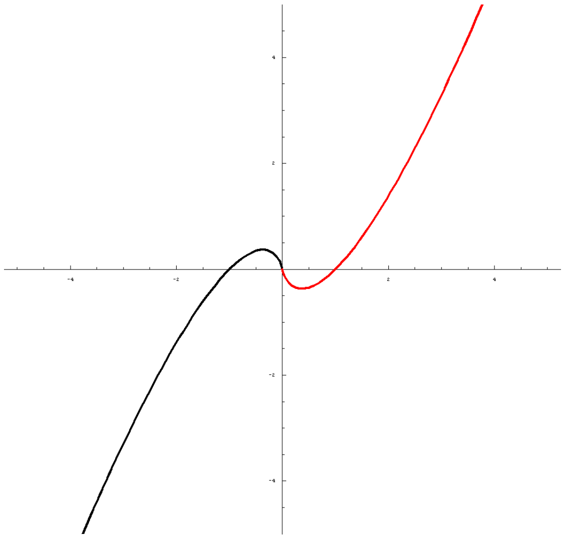

FIGURA 11. Diagramma di $f(x) := x\ \log|x|$ (E.11).

- il diagramma di f ha nel punto di ascissa 0 un flesso a tangente verticale.

La derivata f' è non negativa non appena $x \geq \mathbf{e}^{-1}$; dunque per la disparità di f si ha:

- f è strettamente crescente in $]-\infty, -\mathbf{e}^{-1}]$ ed in $[\mathbf{e}^{-1}, +\infty[$,
- f è strettamente decrescente in $[-\mathbf{e}^{-1}, \mathbf{e}^{-1}]$,
- f ha un massimo relativo in $-\mathbf{e}^{-1}$, con $f(-\mathbf{e}^{-1}) = \mathbf{e}^{-1}$,
- f ha un minimo relativo in $\mathbf{e}^{-1}$, con $f(\mathbf{e}^{-1}) = -\mathbf{e}^{-1}$.

La derivata seconda di f limitatamente ad X è:

$$f''(x) = \frac{1}{x} ,$$

quindi esa è sempre positiva in X; conseguentemente:

- f è strettamente convessa in $[0, +\infty[$,
- f è strettamente concava in $]-\infty, 0]$.

a. Per il *Teorema dei Valori Intermedi* risulta:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = \mathbb{R}$.

b. Vista la monotònia di f e valutati i suoi estremi relativi, si può affermare che l'equazione $f(x) = k$ ha:

- una soluzione se $k < -\mathbf{e}^{-1}$ oppure $k > \mathbf{e}^{-1}$,
- due soluzioni se $k = \pm\mathbf{e}^{-1}$,
- tre soluzioni se $-\mathbf{e}^{-1} < k < \mathbf{e}^{-1}$.

Esercizio (E.12)**.** La funzione assegnata è ovunque definita, cosicché:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Calcolando esplicitamente $f(-x)$ vede che la funzione non gode di particolari proprietà di simmetria; inoltre, f non è periodica. Perciò:

- f non è né pari, né dispari, né periodica.

Lo studio del segno di f può essere svolto con tecniche elementari: in particolare si trova che essa è non negativa per $x = -2$ e quando risulta $\frac{x}{x+2} \geq 0$. Conseguentemente:

- f è positiva in $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$,
- f è negativa in $]-2, 0[$,
- f si annulla in 0 ed in -2.

La funzione f è evidentemente continua in $\mathbb{R} - \{-2\}$; per controllare il suo comportamento in -2 bisogna calcolare:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} f(x) &= \lim_{x \to -2^-} \arctan \frac{x}{x+2} \\ &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} \arctan \frac{x}{x+2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e da ciò dedurre che:

- la f presenta in -2 una discontinuità di prima specie, con salto verso il basso di ampiezza π.

Inoltre, agli estremi del dominio si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} ,$$

cosicché:

- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale in $\pm\infty$ la retta di equazione $y = \frac{\pi}{4}$,
- il diagramma di f non ha alcun altro asintoto.

La funzione f è evidentemente derivabile solo in $\mathbb{R} - \{-2\}$.
La sua derivata prima si calcola con la regola di derivazione della funzione composta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2} \ \frac{2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2}{(x+2)^2 + x^2} , \end{aligned}$$

e si vede immediatamente che f' è positiva in $\mathbb{R} - \{2\}$; perciò:

- f è strettamente crescente in $]-\infty, -2[$ ed in $]-2, +\infty[$,
- f non ha punti di estremo relativo.

La derivata seconda di f è:

$$f''(x) = -8 \ \frac{x+1}{((x+2)^2 + x^2)^2}$$

e si intuisce immediatamente che essa è non negativa per $x < -2$ oppure $-2 < x \leq -1$; quindi:

- f è strettamente convessa in $]-\infty, -2[$ ed in $[-2, -1]$,

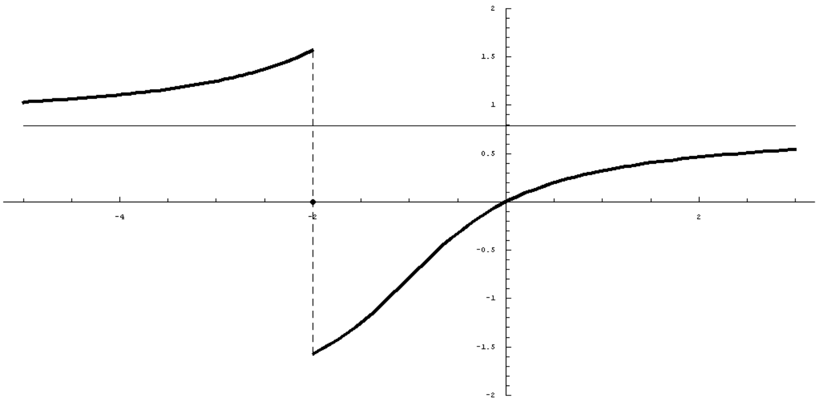

FIGURA 12. Diagramma di $f(x) := \arctan \frac{x}{x+2}$, se $x \neq -2$; 0, altrimenti (E.12).

- f è strettamente concava in $[-1, +\infty[$;
- il diagramma di f ha un punto di flesso a tangente obliqua nel punto di ascissa -1.

a. Per la monotònia abbiamo:

$$\begin{aligned} \inf_{x<-2} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \\ \sup_{x<-2} f(x) &= \lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \\ \inf_{x\geq-2} f(x) &= \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} \\ \sup_{x\geq-2} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}\ , \end{aligned}$$

cosicché:

$$\begin{aligned} f\Big(]-\infty, -2[\Big) &= \Big]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\Big[\\ f\Big([-2, +\infty[\Big) &= \Big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\Big[\ . \end{aligned}$$

Ne viene:

- $f(\operatorname{Dom} f) =]-\pi/2, \pi/2[-\{\pi/4\}$.

b. Visti i risultati acquisiti, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k \leq -\frac{\pi}{2}$ oppure se $k \geq \frac{\pi}{2}$ ovvero se $k = \frac{\pi}{4}$,
- una soluzione se $-\frac{\pi}{2} < k < 0$, se $0 < k < \frac{\pi}{4}$ o se $\frac{\pi}{4} < k < \frac{\pi}{2}$,
- due soluzioni se $k = 0$.

Esercizio (E.13)**.** La funzione $f(x) := |x|^x$ è definita per $x \neq 0$, pertanto:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$.

La f non gode di particolari proprietà che semplifichino i calcoli, giacché:

- f non è né pari, né dispari e nemmeno periodica.

Tuttavia, si può notare che l'uguaglianza:

$$|x|^x = \mathbf{e}^{\log(|x|^x)} = \mathbf{e}^{x\ \log|x|}$$

(valida, data la positività di $|x|$ in $\mathbb{R} - \{0\}$) si può usare per formulare diversamente la legge di assegnazione di f:

$$f(x) = \mathbf{e}^{x \ \log|x|} ;$$

tale formulazione può essere sfruttata, qualora si presentino difficoltà di calcolo, per semplificare il problema.

È evidente che:

- f è ovunque positiva in $\mathbb{R} - \{0\}$.

Poiché f è composta da applicazioni continue:

- f è continua in $\operatorname{Dom} f$.

Per la continuità, gli unici limiti che ha senso calcolare sono quelli agli estremi degli intervalli che compongono il dominio: si ha[6]:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x \ \log|x|} = 0 \\
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \mathbf{e}^{x \ \log|x|} = \mathbf{e}^0 = 1 \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x \ \log|x|} = +\infty ,
\end{aligned}$$

e da ciò segue immediatamente che:

- f è positivamente divergente in $+\infty$, cosicché f non è limitata superiormente e non ha massimo assoluto,
- f si può prolungare su 0 con continuità.

In particolare, d'ora in avanti la lettera f denoterà sempre il prolungamento continuo su 0 di f, cioè la funzione:

$$f(x) := \begin{cases} |x|^x & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

con dominio $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Tale funzione gode di tutte le proprietà elencate sopra ed in più è definita e continua ovunque.

Per la continuità di f in $\operatorname{Dom} f$, per la struttura del dominio e per la convergenza in $-\infty$ si può affermare che:

- il diagramma di f non ha asintoti verticali,
- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale in $-\infty$ la retta di equazione $y = 0$ (asse delle ascisse);

inoltre, la divergenza in $+\infty$ consente di controllare la presenza di asintoto obliquo: tuttavia, dato che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{x-1} = +\infty ,$$

si può dire che:

- il diagrama di f non ha asintoti in $+\infty$.

Per calcolare la derivata prima di f si può determinare la legge di assegnazione esplicita e derivarla come si fa di solito con le funzioni definite per casi: si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{x \ \log(-x)} & , \text{ se } x < 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \\ \mathbf{e}^{x \ \log x} & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

[6] I calcoli tengono conto di quanto già stabilito nello svolgimento dell'Esercizio (E.11).

cosicché per la regola di derivazione della funzione composta:

$$f'(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{x \ \log(-x)} \ \big(\log(-x)+1\big) & \text{, se } x<0 \\ \mathbf{e}^{x \ \log x} \ (\log x + 1) & \text{, se } x>0 \ ; \end{cases}$$

si vede che è possibile riunire i casi introducendo nuovamente i valori assoluti, così da ottenere:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathbf{e}^{x \ \log|x|} \ \big(\log|x|+1\big) \\ &= f(x) \ \big(\log|x|+1\big) \end{aligned}$$

per $x \neq 0$.
Rimane da stabilire se la f è derivabile in 0 e, per fare ciò, si può usare una notevole conseguenza del *Teorema di de l'Hôpital* e calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} f(x) \ \big(\log|x|+1\big) = +\infty \ ;$$

dunque f non è derivabile in 0. Quindi:

- la f è derivabile in $\mathbb{R} - \{0\}$,
- la f non è derivabile in 0 né da destra né da sinistra, poiché $f'_\pm(0) = +\infty$;
- il diagramma di f ha nel punto di ascissa 0 un flesso a tangente verticale.

Dato che f è positiva, la derivata f' è non negativa non appena risulta $\log|x| + 1 \geq 0$, cioè per $x \leq -\mathbf{e}^{-1} \approx -0.37$ o per $x \geq \mathbf{e}^{-1} \approx 0.37$; perciò:

- f è strettamente crescente in $]-\infty, -\mathbf{e}^{-1}]$ ed in $[\mathbf{e}^{-1}, +\infty[$,
- f è strettamente decrescente in $[-\mathbf{e}^{-1}, \mathbf{e}^{-1}]$,
- f ha massimo relativo nel punto $-\mathbf{e}^{-1}$, con $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^{\mathbf{e}^{-1}} \approx 1.44$,
- f ha minimo relativo nel punto $\mathbf{e}^{-1}$, con $f(\mathbf{e}^{-1}) = \mathbf{e}^{-\mathbf{e}^{-1}} \approx 0.7$.

La derivata seconda si calcola come già fatto per la derivata prima, applicando la regola di derivazione del prodotto: si trova:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x) \ \big(\log|x|+1\big) + f(x) \ \frac{1}{x} \\ &= f(x) \ \big(\log|x|+1\big)^2 + f(x) \ \frac{1}{x} \\ &= f(x) \ \left(\big(\log|x|+1\big)^2 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

e da ciò segue che non è elementare lo studio del segno di f''.
Tuttavia, è possibile notare che si ha certamente $f''(x) > 0$ per $x > 0$ e che $f''(-1) = 0$; possiamo perciò dedurre che:

- f è strettamente convessa in $[0, +\infty[$;
- il diagramma di f presenta un flesso a tangente obliqua nel punto di ascissa -1.[7]

a. Da quanto trovato circa la monotònia, gli estremi e la continuità di f, per il *Teorema dei Valori Intermedi* si ha:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) =]0, +\infty[$.

b. Da quanto visto al punto **a** e dell'analisi della monotònia di f segue che l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k \leq 0$,

[7] A rigore, la presenza del punto di flesso andrebbe confermata o smentita analizzando i segni delle derivate successive in -1 (almeno della derivata terza).

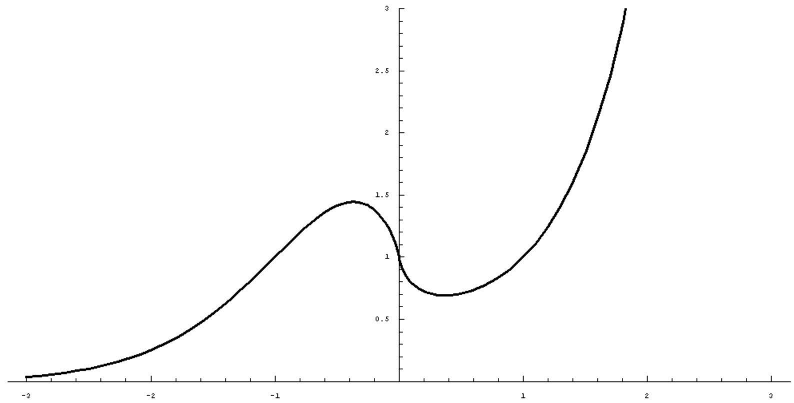

FIGURA 13. Diagramma di $f(x) := |x|^x$ (E.13).

- una soluzione se $0 < k < \mathbf{e}^{-\mathbf{e}^{-1}}$ oppure se $k > \mathbf{e}^{\mathbf{e}^{-1}}$,
- due soluzioni se $k = \mathbf{e}^{\pm\mathbf{e}^{-1}}$,
- tre soluzioni se $\mathbf{e}^{-\mathbf{e}^{-1}} < k < \mathbf{e}^{\mathbf{e}^{-1}}$.

Esercizio (E.14)**.** Osservando con attenzione la legge di assegnazione, si scopre che la funzione assegnata è definita ovunque, cosicché:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Calcolando esplicitamente $f(-x)$ si scopre che:

- f è una funzione pari;

conseguentemente, è possibile studiare il comportamento di f solo nell'insieme $X := [0, +\infty[$, cosa che sarà fatta d'ora in avanti.
Inoltre è evidente che:

- f non è periodica.

Dalla stessa legge di assegnazione di f segue che:

- f è positiva in $]-1, 1[$,
- f è identicamente nulla negli intervalli $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$.

Altrettanto evidente è che f è continua in $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, cosicché rimane da stabilire cosa accada nei punti ± 1 di raccordo tra gli intervalli in cui valgono diverse espressioni analitiche di f. Si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1,\ x<1} \mathbf{e}^{\overbrace{\frac{x^2}{x^2-1}}^{\to -\infty}} \\
&= 0 = f(0) \\
\lim_{x \to 1^+} f(x) &= 0 = f(0)\ ,
\end{aligned}$$

e da ciò e dalla parità di f segue che:

- f è continua ovunque in $\operatorname{Dom} f$.

Dalla continuità di f e dalle caratteristiche del dominio segue che:

- il diagramma di f non ha asintoti verticali,
- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale in $\pm\infty$ la retta di equazione $y = 0$ (asse delle ascisse).

La f è derivabile per $x \neq \pm 1$ e la sua derivata prima è data da:

$$f'(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} \ \frac{-2x}{(x^2-1)^2} & \text{, se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{, se } x < -1 \text{ oppure } x > 1 \end{cases} ,$$

cosicché rimane da studiare la derivabilità in ± 1. Per fare ciò, sfruttando una notevole conseguenza del *Teorema di de l'Hôpital*, basta calcolare:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f'(x) &= \lim_{x\to 1^-} \mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} \ \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\mathbf{e}^{\frac{x^2}{1-x^2}}} \ \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \\ &\overset{y=\frac{x^2}{1-x^2}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^y} \ \frac{-2\sqrt{\frac{y}{y+1}}}{\left(\frac{y}{y+1}-1\right)^2} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{-2(y+1)^2}{\mathbf{e}^y} \ \sqrt{\frac{y}{y+1}} \\ &= 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

e da ciò inferire che $f'_{\pm}(1) = 0$; tenendo presente la parità di f si ottiene:

- f è derivabile ovunque in $\operatorname{Dom} f$ con derivata data da:

  $$f'(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} \ \frac{-2x}{(x^2-1)^2} & \text{, se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{, se } x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \end{cases}$$

  anch'essa continua in $\operatorname{Dom} f$.

La f' è positiva per $-1 < x < 0$ e si annulla identicamente negli intervalli $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$; conseguentemente:

- f è crescente in $]-\infty, 0]$ (strettamente in $[-1, 0]$),
- f è decrescente in $[0, +\infty[$ (strettamente in $[0, 1]$),
- il punto 0 è di massimo assoluto per f, con $\max f = f(0) = \mathbf{e}^{-1}$,
- ogni punto degli intervalli $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$ è di minimo assoluto per f, con $\min f = 0$.

La derivata seconda di f si calcola con la regola di derivazione del prodotto per $x \neq \pm 1$; per semplificare il calcolo, si noti che per tali valori della variabile è possibile scrivere:

$$f'(x) = -2 \ f(x) \ \frac{x}{(x^2-1)^2}$$

cosicché:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \left(f'(x) \ \frac{x}{(x^2-1)^2} - f(x) \ \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} \right) \\ &= -2 \left(-2 \ f(x) \ \frac{x^2}{(x^2-1)^4} - f(x) \ \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} \right) \\ &= 2 \ f(x) \ \frac{2x^2 + (3x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \\ &= 2 \ f(x) \ \frac{3x^4-1}{(x^2-1)^4} \ . \end{aligned}$$

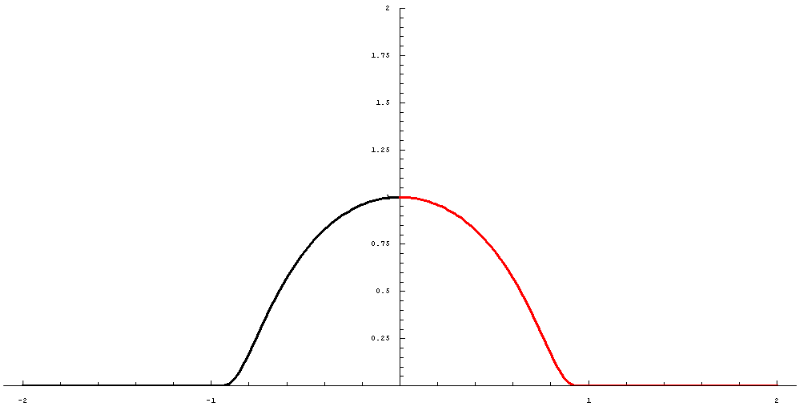

FIGURA 14. Diagramma di $f(x) := \mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}}$, se $|x| < 1$; 0, altrimenti (E.14).

Con la stessa tecnica usata per stabilire la derivabilità di f in ± 1 si può provare che f' è derivabile in ± 1 ed ha derivata nulla, perciò:

- f è derivabile due volte ovunque in $\operatorname{Dom} f$, con derivata seconda data da:
$$f''(x) = \begin{cases} 2\mathbf{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} \frac{3x^4-1}{(x^2-1)^4} & \text{, se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{, se } x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \end{cases}$$
anch'essa continua in $\operatorname{Dom} f$.

Si vede che f'' è positiva non appena risulta $f(x)\,(3x^4-1) > 0$, cioè per $-1 < x < -3^{-1/4} \approx -0.76$ o per $3^{-1/4} < x < 1$, dunque:

- f è convessa in $]-\infty, -3^{-1/4}]$ ed in $[3^{-1/4}, 1[$ (strettamente in $[-1, -3^{-1/4}]$ ed in $[3^{-1/4}, 1]$),
- f è strettamente concava in $[-3^{-1/4}, 3^{-1/4}]$;
- il diagramma di f ha punti di flesso a tangente obliqua nei punti di ascissa $\pm 3^{-1/4}$.

a. Per la continuità e la monotònia di f si ha:

- $f(\operatorname{Dom} f) = [0, \mathbf{e}^{-1}]$.

b. Per la monotònia di f e per quanto detto al punto **a**, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k < 0$ oppure se $k > \mathbf{e}^{-1}$,
- una soluzione se $k = \mathbf{e}^{-1}$,
- due soluzioni se $0 < k < \mathbf{e}^{-1}$,
- infinite soluzioni se $k = 0$.

Esercizio (E.15)**.** La funzione $f(x) := |x| - \log(x^2+1)$ è definita per i valori di x tali che $x^2+1 > 0$, quindi:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$;

si vede inoltre immediatamente che:

- f è una funzione pari.

Perciò basta studiarne il comportamento limitatamente all'insieme $X := [0, +\infty[$, nel quale vale l'espressione:

$$f(x) = x - \log(x^1 + 1) \ .$$

Lo studio del segno di f conduce alla disequazione $x \geq \log(x^2 + 1)$ che non si risolve con tecniche elementari; quindi passiamo oltre.
Poiché f è differenza in $\mathbb{R}$ di funzioni continue, è evidente che:

- f è continua in $\mathbb{R}$;

ciò e la struttura del dominio assicurano che:

- il diagramma di f non presenta asintoti verticali.

D'altra parte, trascurando via via i termini d'ordine inferiore, abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi:

- la funzione f non è limitata superiormente e, perciò, non ha massimo assoluto;
- il diagramma di f non ha asintoti orizzontali né in $+\infty$ né in $-\infty$;

inoltre, visto che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m_{+\infty}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - m_{+\infty} x = -\infty$$

possiamo affermare che:

- il diagramma di f non ha asintoto obliquo né in $+\infty$ né in $-\infty$.

Evidentemente:

- la f è derivabile quante volte si vuole in $\mathbb{R} - \{0\}$

poiché ottenuta sommando funzioni che godono di tale proprietà; d'altra parte in 0 abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^\pm} \frac{|x|}{x} - \frac{\log(x^2 + 1)}{x} \\ &= \pm 1 = f'_\pm(0) \ , \end{aligned}$$

cosicché:

- f non è derivabile in 0, pur essendo ivi derivabile da destra e da sinistra con derivate uguali a $f'_\pm(0) = \pm 1$;
- il punto di ascissa 0 è un punto angoloso per il diagramma di f.

La derivata di f limitatamente ai punti interni ad X si calcola con le usuali regole ed è:

$$f'(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \ ;$$

si vede che tale derivata è ovunque non negativa in $]0, +\infty[$ (e si annulla nel punto 1). Pertanto, tenuto conto anche della parità di f, abbiamo:

- f è strettamente crescente in $[0, +\infty[$;
- f è strettamente decrescente in $] - \infty, 0]$;

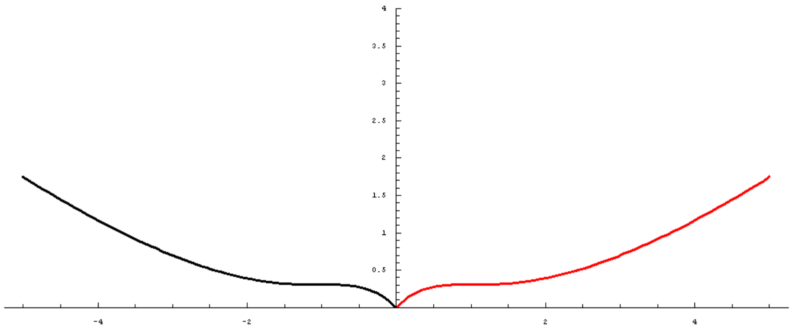

FIGURA 15. Diagramma di $f(x) := |x| - \log(x^2 + 1)$ (E.15).

- il punto 0 (di non derivabilità) è di minimo assoluto, con $f(0) = 0$.

La derivata seconda in $]0, +\infty[$ è:

$$f''(x) = 2\,\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}\ ,$$

e si vede che essa è non negativa solo se $x \geq 1$. Perciò, tenuto come al solito conto della parità di f, possiamo affermare che:

- f è strettamente convessa in $[1, +\infty[$ ed in $] - \infty, -1]$;
- f è strettamente concava in $[0, 1]$ ed in $[-1, 0]$;
- i punti di ascissa ± 1 sono di flesso a tangente orizzontale per il diagramma di f.

a. Visto quanto trovato più sopra, si ha:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = [\min f, \sup f[= [0, +\infty[$.

b. Per le proprietà di monotònia di f e la parità, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k < 0$,
- una soluzione se $k = 0$,
- due soluzioni se $k > 0$.

Esercizio (E.16)**.** Si vede facilmente che la funzione $f(x) := \arctan(x^2) - \frac{x^2}{x^4+1}$:

- ha $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$;
- è una funzione pari;
- è continua e derivabile quante volte si vuole in tutto $\mathrm{Dom}\, f$.

Vista la parità, basta studiare il comportamento di f limitatamente all'insieme $X := [0, +\infty[$.
Lo studio del segno di f conduce alla disequazione $\arctan(x^2) \geq \frac{x^2}{x^4+1}$ che non si risolve con tecniche elementari; quindi passiamo oltre.
La struttura del dominio e la continuità della funzione assicurano che:

- il diagramma di f non presenta asintoti verticali.

D'altra parte, abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

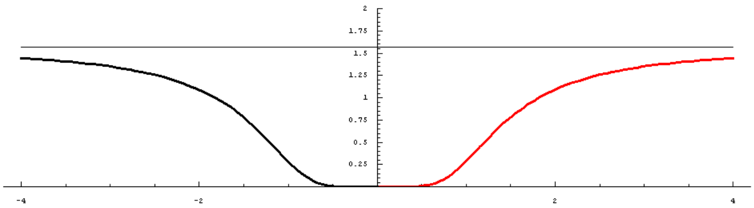

FIGURA 16. Diagramma di $f(x) := \arctan(x^2) - \frac{x^2}{x^4+1}$ (E.16).

dunque:

- il diagramma di f ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ sia in $+\infty$ sia in $-\infty$.

La derivata di f si calcola con le usuali regole ed è:

$$f'(x) = \frac{4x^5}{(x^4+1)^2} \ ;$$

si vede che tale derivata è positiva in $]0, +\infty[$, negativa in $]-\infty, 0[$ e si annulla nel punto 0. Pertanto abbiamo:

- f è strettamente crescente in $[0, +\infty[$;
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$;
- il punto 0 è di minimo assoluto, con $f(0) = 0$.

La derivata seconda in $]0, +\infty[$ è:

$$f''(x) = \frac{4x^4}{(x^4+1)^3}\,(5 - 3x^4) \ ,$$

e si vede che essa è non negativa solo se $-\sqrt[4]{5/3} \le x \le \sqrt[4]{5/3} \approx 1.14$. Perciò possiamo affermare che:

- f è strettamente convessa in $[-\sqrt[4]{5/3}, \sqrt[4]{5/3}]$;
- f è strettamente concava in $]-\infty, -\sqrt[4]{5/3}]$ ed in $[\sqrt[4]{5/3}, +\infty[$;
- i punti di ascissa $\pm\sqrt[4]{5/3}$ sono di flesso a tangente obliqua per il diagramma di f.

a. Visto quanto trovato più sopra, abbiamo certamente:

$$\sup f = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \ ,$$

dunque:

- $f(\mathrm{Dom}\, f) = [\min f, \sup f[= [0, \frac{\pi}{2}[$.

b. Per le proprietà di monotònia di f, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k < 0$ oppure se $k \ge \pi/2$,
- una sola soluzione se $k = 0$,
- due soluzioni se $0 < k < \pi/2$.

Esercizio (E.17)**.** La funzione $f(x) := x^2(\log x - 1)$ è definita per i valori positivi di x, quindi:

- $\operatorname{Dom} f =]0, +\infty[$.

Il segno della funzione f è completamente determinato dal segno di $\log x - 1$, ergo possiamo dire che:

- f è positiva in $]\mathbf{e}, +\infty[$;
- f è negativa in $]0, \mathbf{e}[$;
- f si annulla in $\mathbf{e}$.

Si vede inoltre immediatamente che:

- f è continua in $\mathbb{R}$,

cosicché dobbiamo calcolare i limiti solo agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{x=\mathbf{e}^{-y}}{=} \lim_{y\to+\infty} \mathbf{e}^{-2y}\ (-y-1) \\
&\qquad = \lim_{y\to+\infty} -\frac{y+1}{\mathbf{e}^{2y}} \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

quindi:

- la funzione f non è limitata superiormente e, perciò, non ha massimo assoluto;
- f si può prolungare su 0 con continuità ponendo $f(0) = 0$;
- il diagramma di f non ha asintoti verticali né orizzontali;

d'ora in avanti chiameremo f il prolungamento continuo della funzione in esame sul punto 0, cioè porremo:

$$f(x) := \begin{cases} x^2(\log x - 1) & \text{, se } x > 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0\ . \end{cases}$$

Visto che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

possiamo affermare che:

- il diagramma di f non ha asintoto obliquo in $+\infty$.

La derivata di f nei punti di $]0, +\infty[$ si calcola con le usuali regole ed è:

$$f'(x) = x\ (2\log x - 1)\ ;$$

d'altra parte, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x\ (\log x - 1) = 0\ ,$$

cosicché:

- il prolungamento f continuo in 0 è derivabile in 0 da destra ed ha $f'_+(0) = 0$.

Si vede immediatamente che $f'(x) \geq 0$ per $x \geq \sqrt{\mathbf{e}} \approx 1.65$; pertanto:

- f è strettamente crescente in $[\sqrt{\mathbf{e}}, +\infty[$;
- f è strettamente decrescente in $[0, \sqrt{\mathbf{e}}]$;

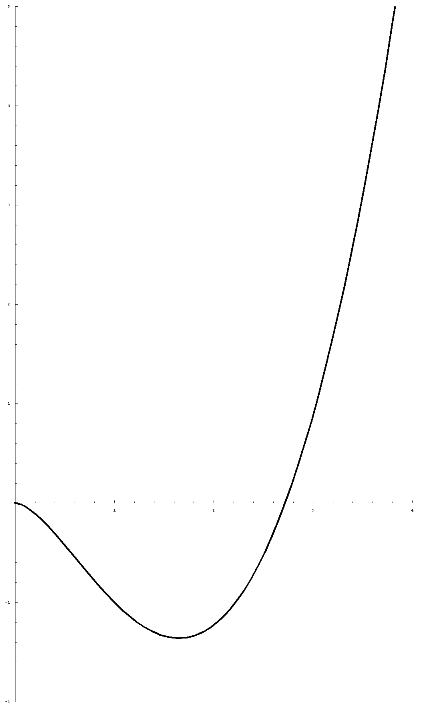

FIGURA 17. Diagramma di $f(x) := x^2(\log x - 1)$ (E.17).

- il punto 0 è di massimo relativo, con $f(0) = 0$;
- il punto $\sqrt{\mathbf{e}}$ è di minimo assoluto, con $f(\sqrt{\mathbf{e}}) = -\frac{\mathbf{e}}{2} \approx -1.36$.

La derivata seconda in $]0, +\infty[$ è:

$$f''(x) = 2\log x + 1 ,$$

e si vede che essa è non negativa solo se $x \geq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} \approx 0.61$. Perciò possiamo affermare che:

- f è strettamente convessa in $[1/\sqrt{\mathbf{e}}, +\infty[$;
- f è strettamente concava in $[0, 1/\sqrt{\mathbf{e}}]$;
- il punto di ascissa $1/\sqrt{\mathbf{e}}$ è di flesso a tangente obliqua per il diagramma di f.

a. Per la continuità di f abbiamo:

- $f(\operatorname{Dom} f) = [\min f, \sup f[= [-\frac{\mathbf{e}}{2} + \infty[$.

b. Per le proprietà di monotònia di f, l'equazione $f(x) = k$ ha:

- nessuna soluzione se $k < -\frac{\mathbf{e}}{2}$,
- una sola soluzione se $k = -\frac{\mathbf{e}}{2}$ oppure $k > 0$,
- due soluzioni se $-\frac{\mathbf{e}}{2} < k \leq 0$.

Esercizio (E.18)**.** La funzione $f(x) := \log(x^2 - 8x + 17)$ è definita per i valori di x per cui risulta $x^2 - 8x + 17 > 0$, quindi:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Il segno della funzione f si ottinene risolvendo $\log(x^2-8x+17) \geq 0$, ossia $x^2-8x+17 \geq 1$; perciò:

- f è positiva in $\mathbb{R} - \{4\}$;
- f si annulla in 4;

conseguentemente possiamo già affermare che:

- f ha minimo assoluto in 4, tale minimo essendo $f(4) = 0$.

Si vede inoltre immediatamente che:

- f è continua in $\mathbb{R}$,

cosicché dobbiamo calcolare i limiti solo agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

quindi:

- la funzione f non è limitata superiormente e, perciò, non ha massimo assoluto;
- il diagramma di f non ha asintoti verticali né orizzontali;

inoltre, visto che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

possiamo affermare che:

- il diagramma di f non ha asintoto obliquo né in $+\infty$ né in $-\infty$.

La derivata di f si calcola con le usuali regole ed è:

$$f'(x) = \frac{2(x-4)}{x^2-8x+17} \ ;$$

si vede immediatamente che $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 4$; pertanto:

- f è strettamente crescente in $[4, +\infty[$;
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, 4]$.

La derivata seconda in $]0, +\infty[$ è:

$$f''(x) = -2\,\frac{x^2-8x+15}{(x^2-8x+17)^2} \ ,$$

e si vede che essa è non negativa solo se $3 \leq x \leq 5$. Perciò possiamo affermare che:

- f è strettamente convessa in $[3, 5]$;
- f è strettamente concava in $]-\infty, 3]$ ed in $[5, +\infty[$;
- i punti di ascissa 3 e 5 sono di flesso a tangente obliqua per il diagramma di f.

a. Visto quanto trovato più sopra, si ha:

- $f(\operatorname{Dom} f) = [\min f, \sup f[= [0, +\infty[$.

b. Per le proprietà di monotònia di f, l'equazione $f(x) = k$ ha:

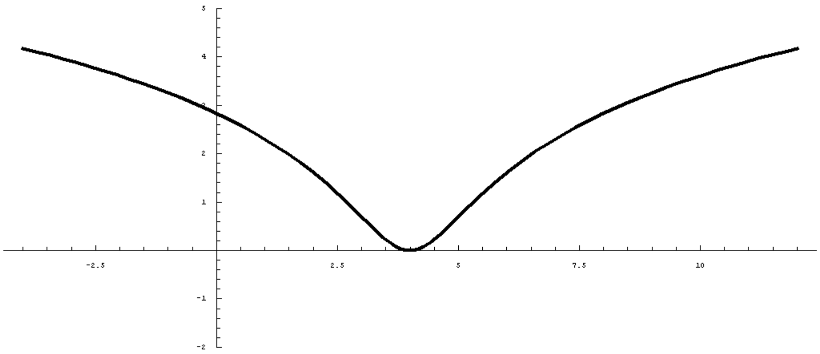

FIGURA 18. Diagramma di $f(x) := \log(x^2 - 8x + 17)$ (E.18).

- nessuna soluzione se $k < 0$,
- una sola soluzione se $k = 0$,
- due soluzioni se $k > 0$.

Esercizio (E.19)**.** La funzione $f(x) := \frac{2\log^2|x|+5\log|x|+2}{x}$ è definita per $x \neq 0$, ergo:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$;

inoltre è evidente che:

- f è una funzione continua e derivabile quante volte si vuole in $\operatorname{Dom} f$;
- f è una funzione dispari;

perciò possiamo limitarci a studiare f in $X :=]0, +\infty[$, intervallo in cui la funzione ha l'espressione:

$$f(x) = \frac{2\log^2 x + 5\log x + 2}{x} .$$

Il segno di f in X è determinato dal numeratore e si studia risolvendo la disequazione $2\log^2 x + 5\log x + 2 \geq 0$; introducendo l'incognita ausiliaria $t = \log x$, vediamo che la disequazione è soddisfatta se e solo se $\log x \leq -2$ oppure $\log x \geq -1/2$, ossia solo se $0 < x \leq \mathbf{e}^{-2} \approx 0.14$ oppure $x \geq \mathbf{e}^{-1/2} \approx 0.61$; pertanto, tenendo presente la disparità di f, possiamo dire che:

- f è positiva in $]-\mathbf{e}^{-1/2}, -\mathbf{e}^{-2}[$, in $]0, \mathbf{e}^{-2}[$ ed in $]\mathbf{e}^{-1/2}, +\infty[$;
- f è negativa in $]-\infty, -\mathbf{e}^{-1/2}[$, in $]-\mathbf{e}^{-2}, 0[$ ed in $]\mathbf{e}^{-2}, \mathbf{e}^{-1/2}[$;
- f si annulla in $\pm\mathbf{e}^{-2}$ e $\pm\mathbf{e}^{-1/2}$.

Gli unici limiti che interessa calcolare sono quelli agli estremi di X, ossia:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 ;$$

ne consegue, tenendo presente la disparità di f, che:

- f non è limitata né inferiormente né inferiormente;
- la retta di equazione $x = 0$ (asse y) è un asintoto verticale per il diagramma di f, da destra verso l'alto e da sinistra verso il basso;

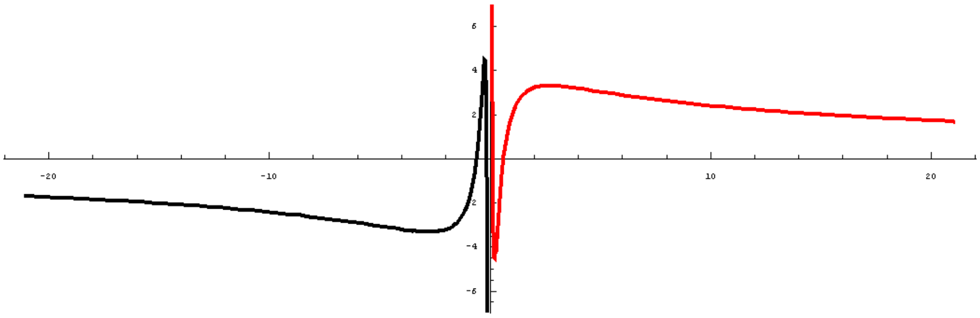

FIGURA 19. Diagramma di $f(x) := \frac{2\log^2|x|+5\log|x|+2}{x}$ (E.19).

- la retta di equazione $y = 0$ (asse x) è un asintoto orizzontale per il diagramma di f, sia in $+\infty$ sia in $-\infty$.

La derivata di f in X si calcola con le solite regole:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\frac{4}{x}\log x + \frac{5}{x})\ x - (2\log^2 x + 5\log x + 2)}{x^2} \\ &= \frac{-2\log^2 x - \log x + 3}{x^2}\ ; \end{aligned}$$

essa è non negativa non appena risulti $2\log^2 x + \log x - 3 \leq 0$, ossia per $-3/2 \leq \log x \leq 1$ ovvero per $0.22 \approx \mathbf{e}^{-3/2} \leq x \leq \mathbf{e} \approx 2.71$, cosicché:

- f è strettamente crescente in $[\mathbf{e}^{-3/2}, \mathbf{e}]$ ed in $[-\mathbf{e}, -\mathbf{e}^{-3/2}]$;
- f è strettamente decrescente in $]0, \mathbf{e}^{-3/2}]$, $[\mathbf{e}, +\infty[$, $[-\mathbf{e}^{-3/2}, 0[$ ed in $]-\infty, -\mathbf{e}]$;
- i punti $-\mathbf{e}$ ed $\mathbf{e}^{-3/2}$ sono di minimo relativo per f con $f(-\mathbf{e}) = -9/\mathbf{e} \approx -3.31$ ed $f(\mathbf{e}^{-3/2}) = -\mathbf{e}^{3/2} \approx -4.48$;
- i punti $-\mathbf{e}^{-3/2}$ ed $\mathbf{e}$ sono di massimo relativo per f con $f(-\mathbf{e}^{-3/2}) = \mathbf{e}^{3/2} \approx 4.48$ ed $f(\mathbf{e}) = 9/\mathbf{e} \approx 3.31$.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{4\log^2 x - 2\log x - 7}{x^3}\ ,$$

la quale è ≥ 0 se e solo se $\log x \leq \frac{2-\sqrt{29}}{4}$ oppure $\log x \geq \frac{2+\sqrt{29}}{4}$, ossia solo se $0 < x < \mathbf{e}^{\frac{2-\sqrt{29}}{4}}$ oppure $x \geq \mathbf{e}^{\frac{2+\sqrt{29}}{4}}$. Pertanto, ricordando la disparità di f, possiamo affermare che:

- f è strettamente convessa in $]0, \mathbf{e}^{\frac{2-\sqrt{29}}{4}}]$, $[\mathbf{e}^{\frac{2+\sqrt{29}}{4}}, +\infty[$ ed in $[-\mathbf{e}^{\frac{2+\sqrt{29}}{4}}, -\mathbf{e}^{\frac{2-\sqrt{29}}{4}}]$;
- f è strettamente concava in $[\mathbf{e}^{\frac{2-\sqrt{29}}{4}}, \mathbf{e}^{\frac{2+\sqrt{29}}{4}}]$, $[-\mathbf{e}^{\frac{2-\sqrt{29}}{4}}, 0[$ ed in $]-\infty, -\mathbf{e}^{\frac{2+\sqrt{29}}{4}}]$;
- i punti di ascisse $\pm\mathbf{e}^{\frac{2-\sqrt{29}}{4}}$ e $\pm\mathbf{e}^{\frac{2+\sqrt{29}}{4}}$ sono punti di flesso a tangente obliqua per il diagramma di f.

a. Per la continuità di f in $\operatorname{Dom} f$ e per la disparità, abbiamo:

$$\begin{aligned} f\Big(]0, +\infty[\Big) &= [-\mathbf{e}^{-3/2}, +\infty[\\ f\Big(]-\infty, 0[\Big) &=]-\infty, \mathbf{e}^{-3/2}]\ ; \end{aligned}$$

conseguentemente:

- $f(\operatorname{Dom} f) = [-\mathbf{e}^{-3/2}, +\infty[\cup]-\infty, \mathbf{e}^{-3/2}] = \mathbb{R}$.

b. Visto il risultato del punto **a**, l'equazione $f(x) = k$ ha almeno una soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$. Più in particolare, sfruttando le informazioni sugli estremi relativi e sulla monotònia, otteniamo che l'equazione $f(x) = k$ ha:

- un'unica soluzione se $k < -\mathbf{e}^{-3/2}$ oppure $k > \mathbf{e}^{-3/2}$;
- due soluzioni se $k = \pm\mathbf{e}^{-3/2}$;
- tre soluzioni se $-\mathbf{e}^{-3/2} < k < -9/\mathbf{e}$ opppure $9/\mathbf{e} < k < \mathbf{e}^{-3/2}$;
- quattro soluzioni se $k = \pm 9/\mathbf{e}$ oppure $k = 0$;
- cinque soluzioni se $-9/\mathbf{e} < k < 0$ oppure $0 < k < 9/\mathbf{e}$.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: guglielmo.dimeglio@unina.it