QUALCHE ESERCIZIO AVANZATO SULLO STUDIO DELLA FUNZIONE

G. DI MEGLIO

Introduzione

In questi fogli sono proposti alcuni esercizi avanzati sullo studio della funzione. La maggior parte di tali esercizi è presa da prove d'esame, prove intercorso ed esercitazioni di Analisi Matematica I per Ingegneria Edile/Gestionale assegnate tra il 1991 ed il 2000.

Ricordo che *studiare una funzione* f significa determinare, a partire dalla sola legge di assegnazione di f, tutte quelle informazioni utili affinché sia possibile tracciare un *diagramma qualitativo* del grafico della funzione.
In particolare, và posta molta attenzione ai fatti elencati di seguito:

1. determinazione del dominio della funzione;
2. descrizione di proprietà della funzione utili alla semplificazione del problema[1];
3. determinazione degli intervalli di positività e negatività della funzione (il cosiddetto *studio del segno*), qualora ciò si possa fare in maniera "elementare";
4. descrizione delle proprietà di continuità della funzione, calcolo dei limiti al finito ed all'infinito ed eventuale prolungamento per continuità della funzione;
5. determinazione delle equazioni di eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) del diagramma della funzione;
6. discussione delle proprietà di derivabilità della funzione;
7. calcolo della derivata prima e determinazione degli intervalli di monotònia della funzione[2];
8. individuazione degli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
9. calcolo della derivata seconda e determinazione degli intervalli di convessità della funzione[3];

Date: 29 dicembre 2017.

[1] Ad esempio, si può provare a stabilire se la funzione assegnata è pari, dispari o periodica; oppure si può cercare di esplicitare la legge di assegnazione fornita distinguendo opportuni casi (e.g., come quando si studia una funzione col valore assoluto).

[2] Ricordo che, per noti fatti di Calcolo Differenziale, ciò può esser fatto studiando il segno della derivata prima della funzione (qualora, ovviamente, la funzione in esame sia derivabile e lo studio del segno si possa fare in maniera "elementare").

[3] Come sopra, per noti fatti di Calcolo Differenziale, ciò può esser fatto studiando il segno della derivata seconda della funzione (qualora, ovviamente, la funzione in esame sia derivabile due volte e lo studio del segno si possa fare in maniera "elementare").

10. individuazione degli eventuali punti di flesso nel diagramma.

Ogni problema dovrà essere concluso disegnando un diagramma che presenti l'andamento qualitativo del grafico della funzione, il quale sia coerente con tutte le informazioni ricavate nello svolgimento dell'esercizio.

1. Un Esercizio Svolto

Studiamo la funzione definita ponendo:

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{\cos x}\ , \tag{1}$$

seguendo lo schema riportato nell'Introduzione.

1. *Determinazione del dominio.*
Il dominio della funzione si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 1+\sin^2 x \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} ,$$

il quale è equivalente alla sola seconda disequazione (la prima essendo sempre vera); dato che $\cos x \neq 0$ per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} f &= \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\ . \end{aligned} \tag{2}$$

2. *Individuazione di particolari proprietà della funzione.*
La funzione f è pari, in quanto rapporto di funzioni pari; pertanto ci basta studiarne il comportamento in $[0, +\infty[$.
Inoltre, la f è periodica di periodo $T = 2\pi$, cosicché possiamo studiare f limitatamente all'intervallo di periodicità $[-\pi, \pi]$, cioè nell'insieme $X_{2\pi} := \operatorname{Dom} f \cap [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$.
Da ciò segue che, per dedurre il comportamento di f in qualsiasi punto di $\operatorname{Dom} f$ occorre e basta analizzare cosa accade limitatamente all'insieme $X = X_{2\pi} \cap [0, +\infty[= [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$. Pertanto, d'ora in avanti supporremo sempre $x \in X$.

3. *Determinazione degli intervalli di positività e negatività.*
Abbiamo $f(x) \geq 0$ in X se e solo se $\cos x > 0$, dunque solo se $x \in [0, \pi/2[$.
Perciò f è positiva in $[0, \pi/2[$, negativa in $]\pi/2, \pi]$ e non si annulla in alcun punto di X.

4. *Discussione della continuità e calcolo dei limiti.*
La f si esprime in X come rapporto di funzioni continue con denominatore mai nullo; pertanto, essa è una funzione continua in X.
Nel punto $\pi/2$ abbiamo:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty\ , \end{aligned} \tag{3}$$

cosicché f non può essere prolungata con continuità nel punto $\pi/2$.
Dato che l'insieme X è limitato, non ha senso calcolare i limiti all'infinito.

5. *Determinazione degli asintoti.*
Dalle relazioni di limite (3) segue che la retta di equazione $x = \pi/2$ è un asintoto verticale per il diagramma di f, a sinistra in alto ed a destra in basso.

6. *Discussione della derivabilità.*
La funzione f si esprime come rapporto di funzioni derivabili quante volte si vuole in $\mathbb{R}$[4] e denominatore mai nullo; pertanto, essa è una funzione derivabile in X (ivi inclusi gli estremi 0 e π) quante volte si vuole, con derivate tutte continue in X.

7. *Calcolo della derivata prima e determinazione degli intervalli di monotònia.*
Derivando troviamo:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \cos x - \sqrt{1+\sin^2 x} \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} + \sqrt{1+\sin^2 x} \right) \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x \, \sqrt{1+\sin^2 x}} \, (\cos^2 x + 1 + \sin^2 x) \\
&= \frac{2\sin x}{\cos^2 x \, \sqrt{1+\sin^2 x}} \, .
\end{aligned}$$

Dato che $\sin x \geq 0$ in X, è evidente che $f'(x) \geq 0$ in X; pertanto, f è crescente in ognuno degli intervalli $[0, \pi/2[$ e $]\pi/2, \pi]$. Inoltre, la monotònia è stretta, poiché f' non si annulla su alcun sottointervallo di X.

8. *Individuazione degli estremi relativi ed assoluti.*
Dalle considerazioni circa la monotònia segue che i punti 0 e π (nei quali si ha $f(0) = 1$ ed $f(\pi) = -1$) sono, rispettivamente, un minimo relativo proprio ed un massimo relativo proprio per f.
Inoltre, stanti le relazioni di limite (3), la f è priva di punti di massimo o minimo assoluti.

9. *Calcolo della derivata seconda e determinazione degli intervalli di convessità.*
Derivando nuovamente, troviamo:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2\, \frac{\cos x \cdot \cos^2 x\sqrt{1+\sin^2 x} - \sin x \cdot \left(-2\cos x \sin x \, \sqrt{1+\sin^2 x} + \cos^2 x \, \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \right)}{\cos^4 x \, (1+\sin^2 x)} \\
&= 2\, \frac{\cos^2 x(1+\sin^2 x) + 2\sin^2 x(1+\sin^2 x) - \cos^2 x\sin^2 x}{\cos^3 x \, (1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}} \\
&= 2\, \frac{1+\sin^2 x + 2\sin^4 x}{\cos^3 x \, (1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}} \, .
\end{aligned}$$

Dato che $1+\sin^2 x + 2\sin^4 x, 1+\sin^2 x \geq 1 > 0$, è evidente che $f''(x) \geq 0$ in X non appena risulta $\cos x > 0$, ossia per $x \in [0, \pi/2[$; pertanto, f è convessa in $[0, \pi/2[$ e concava in $]\pi/2, \pi]$.

[4] Si tenga presente che il numeratore è una funzione derivabile ovunque, poiché il radicando è derivabile ovunque e non si annulla mai.

10. *Individuazione degli eventuali punti di flesso.*
Dato che f'' non si annulla in X, il diagramma non presenta punti di flesso a tangente orizzontale o obliqua.
Inoltre, poiché f'' non cambia segno attorno ad alcun punto di continuità per f in cui f è dotata di derivata infinita, il diagramma non presenta nemmeno flessi a tangente verticale.

Il diagramma (di una porzione limitata) del grafico di f nell'insieme $\operatorname{Dom} f$ sono riportati in FIGURA 1.

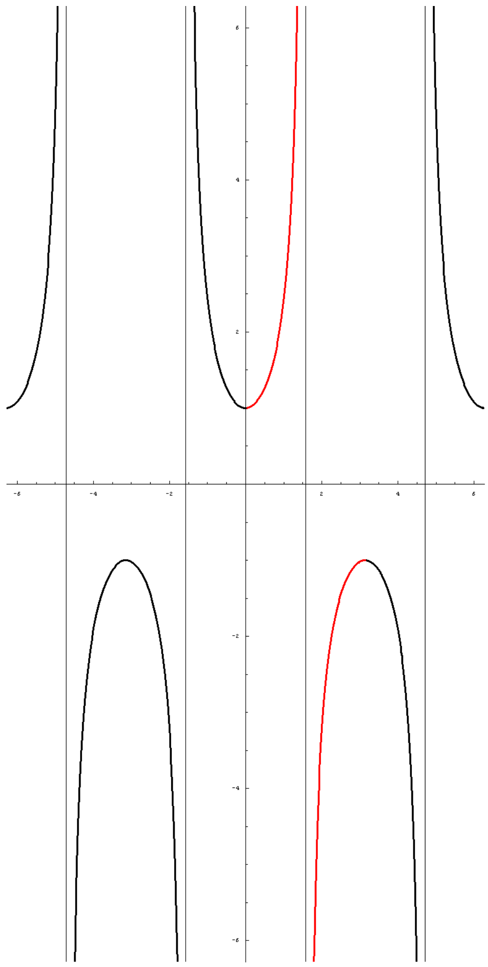

FIGURA 1. Diagramma della funzione $f(x) := \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{\cos x}$ del § 1. In **rosso** è evidenziata la porzione del diagramma relativa all'insieme X.

2. Esercizi

Studiare le seguenti funzioni:

(E.1) $$f(x) := 3x^2 - x^4$$

(E.2) $$f(x) := \sqrt{3x^2 - x^4}$$

(E.3) $$f(x) := \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

(E.4) $$f(x) := \left| \frac{x^3 + 3}{x^3 - 9x} \right|$$

(E.5) $$f(x) := \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

(E.6) $$f(x) := \begin{cases} (x-2)\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} & , \text{se } x \neq -1 \\ 0 & , \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(E.7) $$f(x) := \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x$$

(E.8) $$f(x) := \sqrt{|x|}\ \log^2 |x|$$

(E.9) $$f(x) := x\ \log x - x - \frac{x^2}{2}$$

(E.10) $$f(x) := x\ \log x + x^2$$

(E.11) $$f(x) := \left| \frac{\mathbf{e}^x - 2}{x} \right|$$

(E.12) $$f(x) := \log \left| \mathbf{e}^{2x} + 6\mathbf{e}^x - 16 \right|$$

(E.13) $$f(x) := \log \left(\frac{1}{4} + \left| \mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^x \right| \right)$$

(E.14) $$f(x) := |x - 1| + |\arctan x|$$

(E.15) $$f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\log x - 2}{\log x - 1} & , \text{se } 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \\ \sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x & , \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(E.16) $$f(x) := \sin^2 x - \log \sin x$$

(E.17) $$f(x) := \frac{1}{1 + \sin 3x}$$

(E.18) $$f(x) := x + 1 + \arccos(x^2 - 1)$$

(E.19) $$f(x) := x^{\frac{\log x}{1 + \log x}}$$

(E.20) $$f(x) := \min \left\{ 10 - x, \max \left\{ x, \frac{x^2}{2} - 2 \right\} \right\}$$

(E.21) $$f(x) := \arctan x + \arctan \frac{1}{x}\ .$$

3. Diagrammi Qualitativi delle Funzioni Proposte

Qui di seguito sono riportati i diagrammi qualitativi delle funzioni proposte nel paragrafo precedente.
Come nell'esercizio svolto, adottiamo la convenzione di riportare in **rosso** i tratti del diagramma provenienti dallo studio della funzione in particolari sottoinsiemi del dominio (scelti, di volta in volta, in base alle proprietà della funzione stessa) cui basta limitare le considerazioni in modo da semplificare il problema.

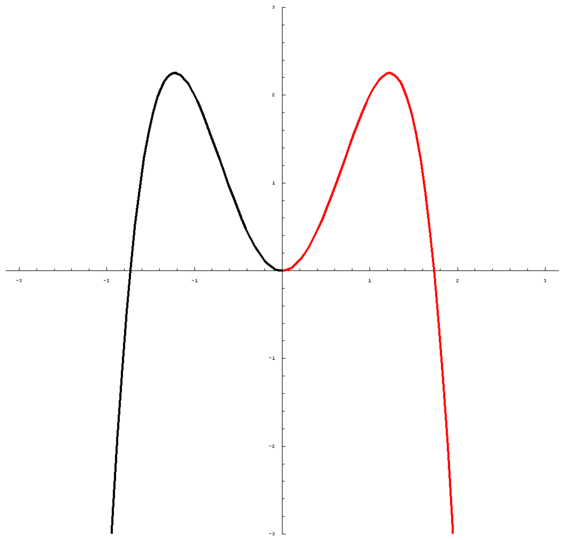

FIGURA 2. Diagramma di $f(x) := 3x^2 - x^4$ (E.1).

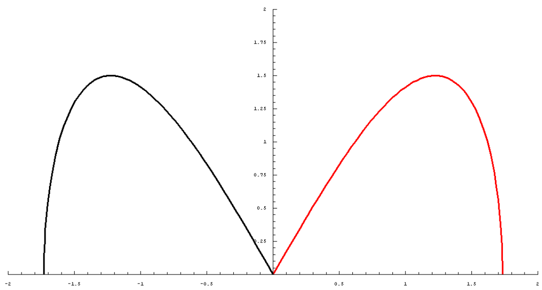

FIGURA 3. Diagramma di $f(x) := \sqrt{3x^2 - x^4}$ (E.2).

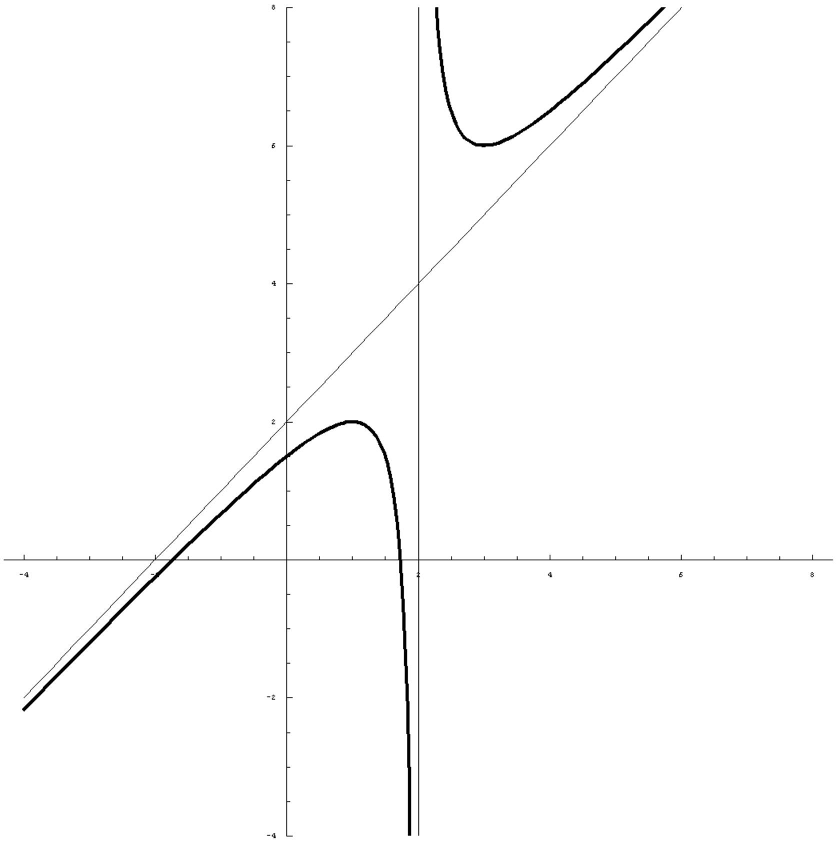

FIGURA 4. Diagramma di $f(x) := \frac{x^2-3}{x-2}$ (E.3).

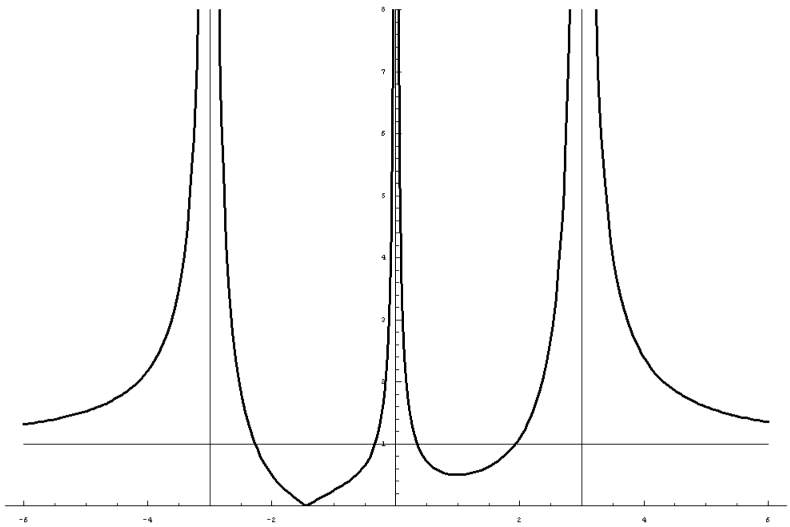

FIGURA 5. Diagramma di $f(x) := \left|\frac{x^3+3}{x^3-9x}\right|$ (E.4).

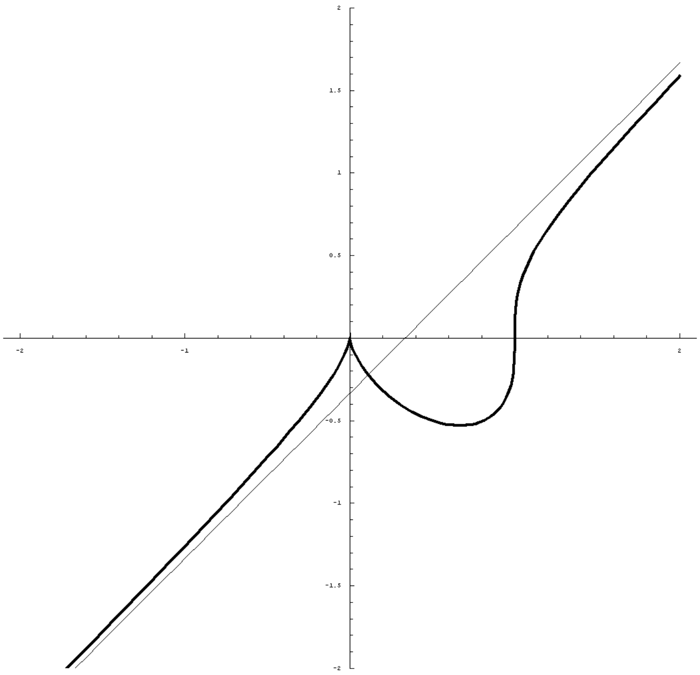

FIGURA 6. Diagramma di $f(x) := \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ (E.5).

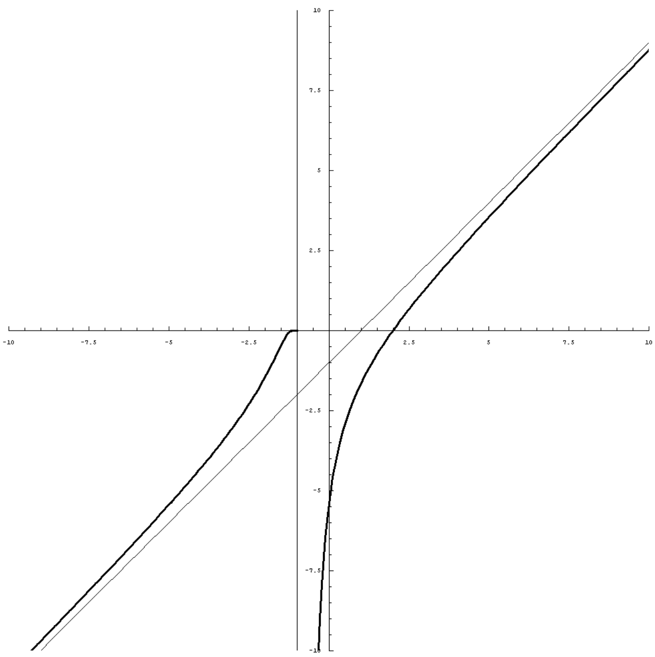

FIGURA 7. Diagramma di $f(x) := (x-2)\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}}$, se $x \neq -1$; $f(x) := 0$, se $x = -1$ (E.6).

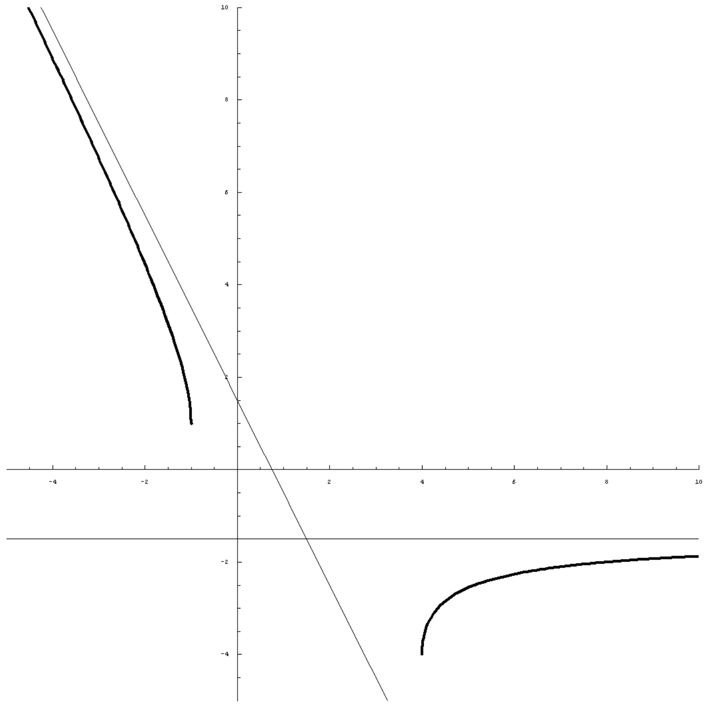

FIGURA 8. Diagramma di $f(x) := \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x$ (E.7).

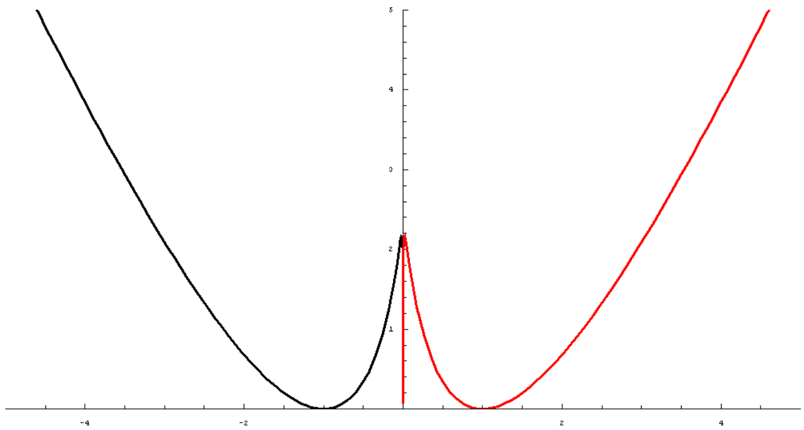

FIGURA 9. Diagramma di $f(x) := \sqrt{|x|}\ \log^2 |x|$ (E.8).

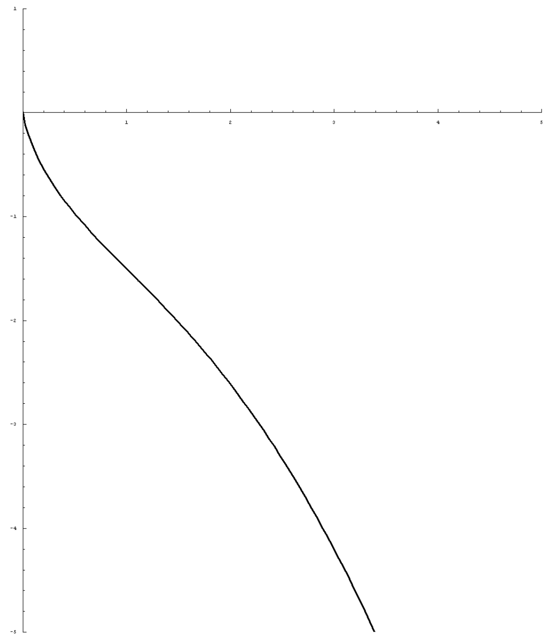

FIGURA 10. Diagramma di $f(x) := x \ \log x - x - \frac{x^2}{2}$ (E.9).

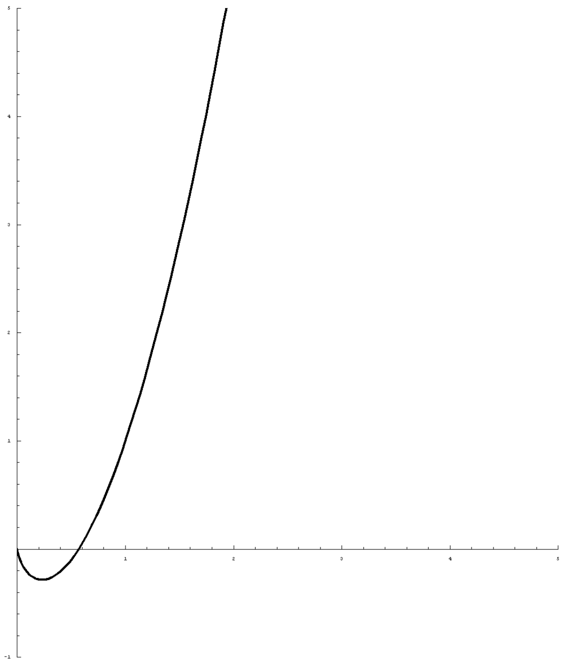

FIGURA 11. Diagramma di $f(x) := x \ \log x + x^2$ (E.10).

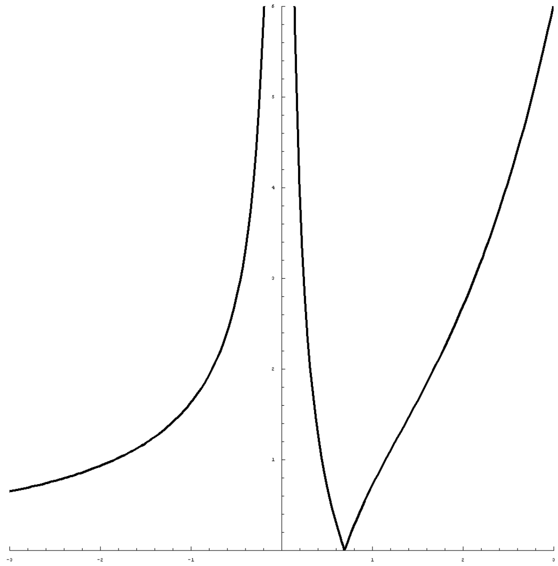

FIGURA 12. Diagramma di $f(x) := \left|\frac{\mathbf{e}^x - 2}{x}\right|$ (E.11).

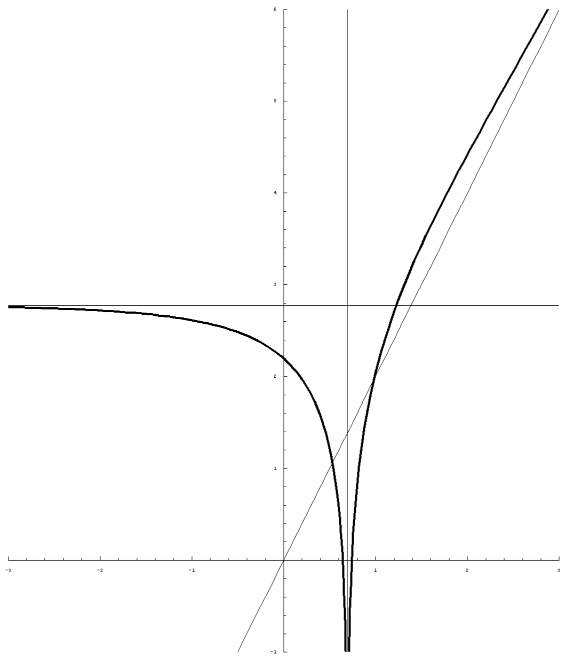

FIGURA 13. Diagramma di $f(x) := \log\left|\mathbf{e}^{2x} + 6\mathbf{e}^x - 16\right|$ (E.12).

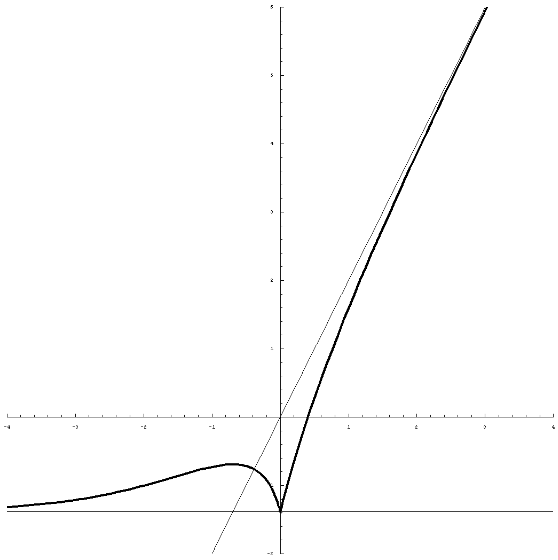

FIGURA 14. Diagramma di $f(x) := \log\left(\frac{1}{4} + \left|\mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^{x}\right|\right)$ (E.13).

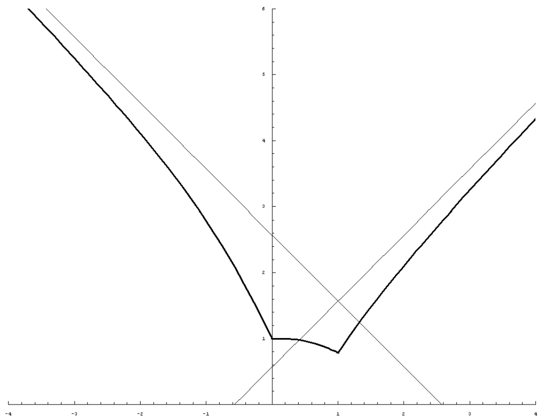

FIGURA 15. Diagramma di $f(x) := |x-1| + |\arctan x|$ (E.14).

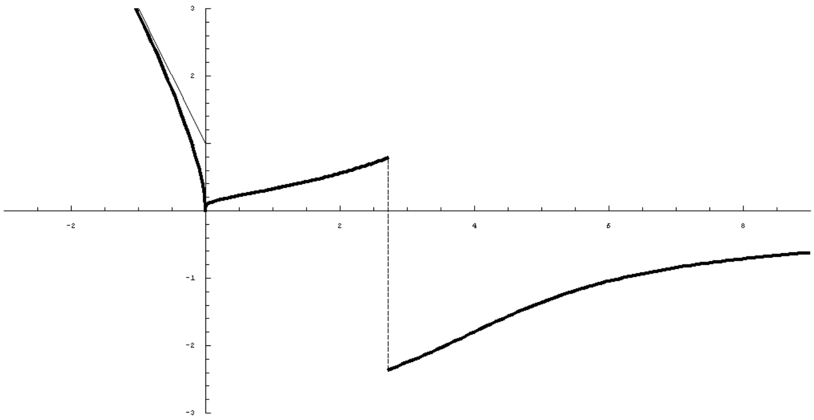

FIGURA 16. Diagramma di $f(x) := -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\log x - 2}{\log x - 1}$, se $0 < x < \mathbf{e}$ oppure $x > \mathbf{e}$; $\sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x$, se $x \leq 0$ (E.15).

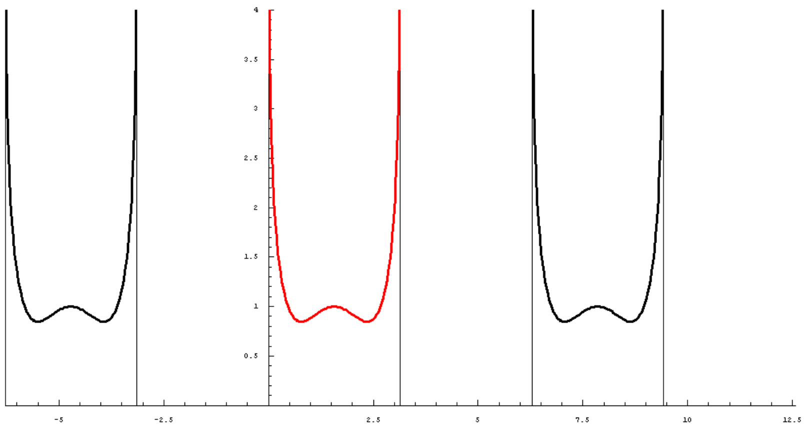

FIGURA 17. Diagramma di $f(x) := \sin^2 x - \log \sin x$ (E.16).

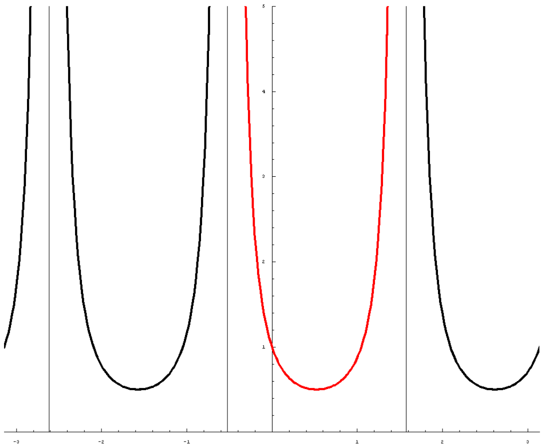

FIGURA 18. Diagramma di $f(x) := \frac{1}{1+\sin 3x}$ (E.17).

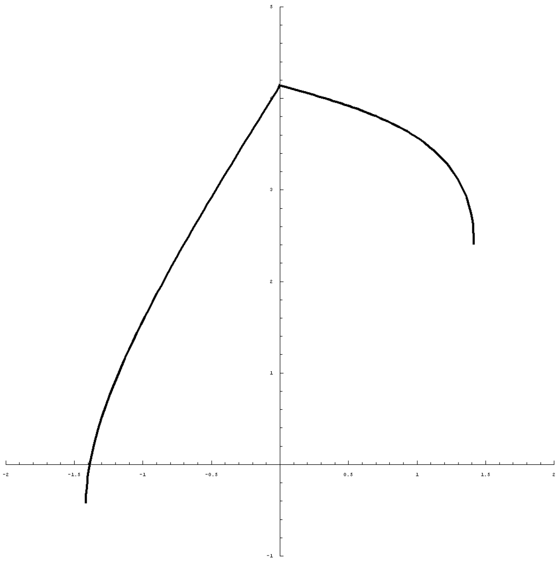

FIGURA 19. Diagramma di $f(x) := x + 1 + \arccos(x^2 - 1)$ (E.18).

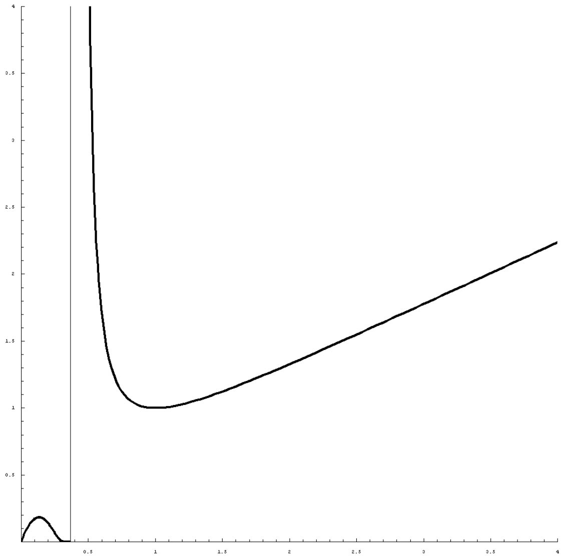

FIGURA 20. Diagramma di $f(x) := x^{\frac{\log x}{1+\log x}}$ (E.19).
[N.B.: la parte del diagramma a sinistra dell'asintoto non è in scala con la parte a destra.]

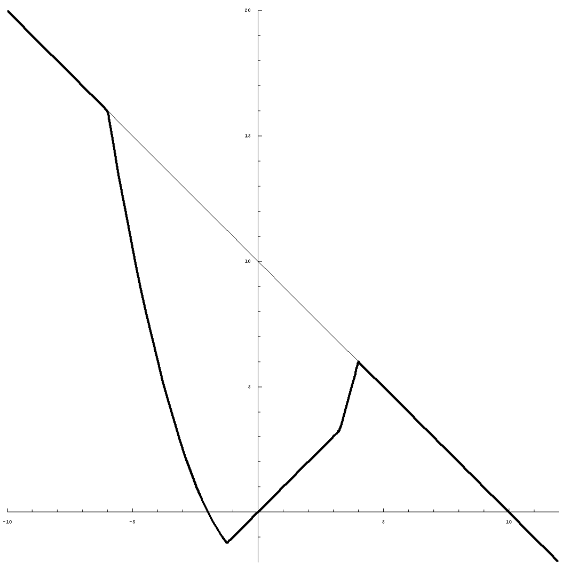

FIGURA 21. Diagramma di $f(x) := \min\left\{10 - x, \max\left\{x, \frac{x^2}{2} - 2\right\}\right\}$ (E.20).

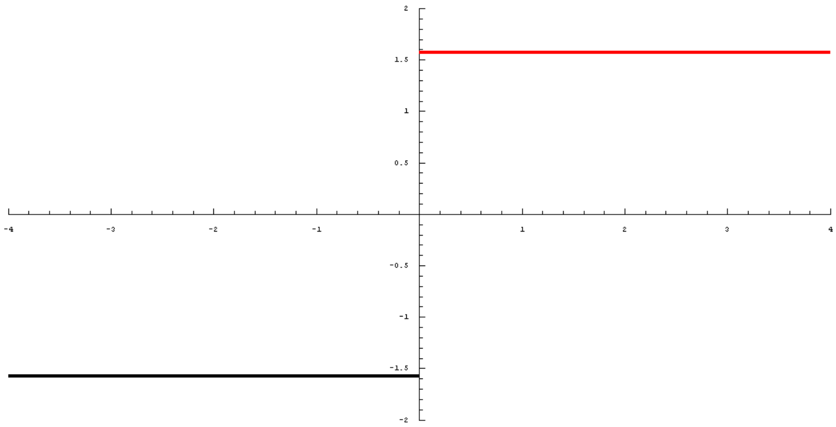

FIGURA 22. Diagramma di $f(x) := \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ (E.21).

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: guglielmo.dimeglio@unina.it