ALCUNE SOLUZIONI AGLI ESERCIZI AVANZATI SULLO STUDIO DELLA FUNZIONE

G. DI MEGLIO

1. Esercizi

Studiare le seguenti funzioni:

$$f(x) := 3x^2 - x^4 \tag{E.1}$$

$$f(x) := \sqrt{3x^2 - x^4} \tag{E.2}$$

$$f(x) := \frac{x^2 - 3}{x - 2} \tag{E.3}$$

$$f(x) := \left| \frac{x^3 + 3}{x^3 - 9x} \right| \tag{E.4}$$

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3 - x^2} \tag{E.5}$$

$$f(x) := \begin{cases} (x-2)\mathbf{e}^{\frac{1}{x+1}} & \text{, se } x \neq -1 \\ 0 & \text{, se } x = -1 \end{cases} \tag{E.6}$$

$$f(x) := \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x \tag{E.7}$$

$$f(x) := \sqrt{|x|}\ \log^2 |x| \tag{E.8}$$

$$f(x) := x\ \log x - x - \frac{x^2}{2} \tag{E.9}$$

$$f(x) := x\ \log x + x^2 \tag{E.10}$$

$$f(x) := \left| \frac{\mathbf{e}^x - 2}{x} \right| \tag{E.11}$$

$$f(x) := \log \left| \mathbf{e}^{2x} + 6\mathbf{e}^x - 16 \right| \tag{E.12}$$

$$f(x) := \log \left(\frac{1}{4} + \left| \mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^x \right| \right) \tag{E.13}$$

$$f(x) := |x - 1| + |\arctan x| \tag{E.14}$$

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\log x - 2}{\log x - 1} & \text{, se } 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \\ \sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x & \text{, se } x \leq 0 \end{cases} \tag{E.15}$$

$$f(x) := \sin^2 x - \log \sin x \tag{E.16}$$

$$f(x) := \frac{1}{1 + \sin 3x} \tag{E.17}$$

$$f(x) := x + 1 + \arccos(x^2 - 1) \tag{E.18}$$

$$f(x) := x^{\frac{\log x}{1 + \log x}} \tag{E.19}$$

$$f(x) := \min \left\{ 10 - x, \max \left\{ x, \frac{x^2}{2} - 2 \right\} \right\} \tag{E.20}$$

Date: 29 dicembre 2017.

$$f(x) := \arctan x + \arctan \frac{1}{x}\ . \tag{E.21}$$

2. Svolgimento di Alcuni Esercizi

2.1. **Esercizio** (E.2)**.** La funzione:

$$f(x) := \sqrt{3x^2 - x^4}$$

è definita per i valori di x che soddisfano la condizione $3x^2 - x^4 \geq 0$, la quale equivale a $x^2\ (3 - x^2) \geq 0$; dunque:

- $\operatorname{Dom} f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Poiché $\operatorname{Dom} f$ è bilanciato[1] ha senso calcolare $f(-x)$ e si nota che:

$$f(-x) = \sqrt{3(-x)^2 - (-x)^4} = \sqrt{3x^2 - x^4} = f(x)\,;$$

cosicché:

- f è una funzione pari,

e per tracciare il grafico basta studiare il suo comportamento solo per $x \geq 0$, ossia nell'insieme $X := \operatorname{Dom} f \cap [0, +\infty[= [0, \sqrt{3}]$.
Inoltre, è immediato notare che:

- f non può essere periodica (le caratteristiche del dominio non lo consentono);
- f è positiva in $]0, \sqrt{3}[$,
- $f(x) = 0$ solo se $x = 0$ oppure $x = \sqrt{3}$;
- f è continua in X (poiché composta da funzioni continue).

Dato che f è continua in X compatto, non abbiamo limiti da calcolare; inoltre, il *Teorema di Weierstrass* assicura che f è limitata in X (ed, anzi, dotata di massimo e minimo assoluti) cosicché:

- il diagramma non può presentare asintoti di alcun genere.

Poiché il polinomio $3x^2 - x^4$ è derivabile quante volte si vuole in tutto $\mathbb{R}$ e la funzione radice quadrata è derivabile quante volte si vuole lì dove il suo argomento non si annulla, possiamo ben dire che:

- f è derivabile quante volte si vuole in $X - \{0, \sqrt{3}\} =]0, \sqrt{3}[$;

d'altra parte, svolgendo calcoli diretti con i rapporti incrementali:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{3x^2 - x^4}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ \sqrt{3 - x^2}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \sqrt{3 - x^2} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

[1] Ricordiamo che un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *bilanciato* se per ogni $x \in X$ risulta pure $-x \in X$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{f(x)-f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}} &= \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{\sqrt{3x^2-x^4}}{x-\sqrt{3}} \\
&= \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{\sqrt{x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}}{x-\sqrt{3}} \\
&= \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x\ \sqrt{\sqrt{3}-x}\ \sqrt{\sqrt{3}+x}}{x-\sqrt{3}} \\
&= -\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x\ \sqrt{\sqrt{3}+x}}{\sqrt{\sqrt{3}-x}} \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

e ricordando la parità di f, otteniamo che:

- f è derivabile in 0 da destra ed a sinistra ed ha $f'_\pm(0) = \pm\sqrt{3}$,
- f non è derivabile in $\sqrt{3}$ da sinistra, né in $-\sqrt{3}$ da destra e le tangenti al grafico di f nei punti di ascissa $\pm\sqrt{3}$ sono verticali.

La derivata prima di f si calcola con le regole usuali:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2-x^4}}\ (6x-4x^3) \\
&= \frac{x(3-2x^2)}{\sqrt{x^2(3-x^2)}} \\
&= \frac{3-2x^2}{\sqrt{3-x^2}}
\end{aligned}
$$

(con le semplificazioni effettuate ricordando che $x \geq 0$ in X); quindi risulta $f'(x) \geq 0$ in X se e solo se $3-2x^2 \geq 0$, cioè se $0 \leq x \leq \sqrt{3/2}$. Ne consegue che:

- f è strettamente crescente in $[0, \sqrt{3/2}]$ ed in $[-\sqrt{3}, -\sqrt{3/2}]$,
- f è strettamente decrescente in $[\sqrt{3/2}, \sqrt{3}]$ ed in $[-\sqrt{3/2}, 0]$,
- i punti $\pm\sqrt{3/2}$ sono punti di massimo assoluto per f e $\max f = f(\pm\sqrt{3/2}) = 3/2$,
- i punti 0 e $\pm\sqrt{3}$ sono punti di minimo assoluto per f e $\min f = f(0) = f(\pm\sqrt{3}) = 0$.

La derivata seconda di f si calcola con le solite regole:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-4x\ \sqrt{3-x^2} - (3-2x^2)\ \frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}}{(\sqrt{3-x^2})^2} \\
&= \frac{-4x(3-x^2)+x(3-2x^2)}{(3-x^2)\ \sqrt{3-x^2}} \\
&= \frac{x\ (2x^2-9)}{(3-x^2)\ \sqrt{3-x^2}}\ ;
\end{aligned}
$$

quindi risulterebbe $f''(x) \geq 0$ in X se e solo se $2x^2-9 \geq 0$, ossia se $x \geq \sqrt{9/2}$; ma, dato che $\sqrt{9/2} > \sqrt{3}$, è evidente che nessun $x \in X$ può soddisfare la condizione $2x^2-9 \geq 0$, pertanto si ha $f''(x) < 0$ in X. Ne consegue che:

- f è concava in $[0, \sqrt{3}]$ ed in $[-\sqrt{3}, 0]$;
- il diagramma di f non ha punti di flesso.

2.2. **Esercizio** (E.5). La funzione:

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

è composta da funzioni definite in $\mathbb{R}$; pertanto:

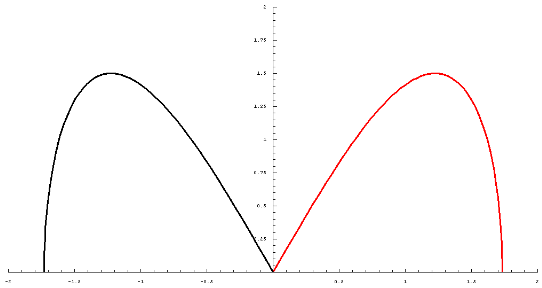

FIGURA 1. Diagramma di $f(x) := \sqrt{3x^2 - x^4}$ (E.2).

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

Applicando le definizioni, si vede che:

- f non è pari, né dispari, né periodica.

Si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $x^3 - x^2 \geq 0$, ossia solo se $x - 1 \geq 0$; pertanto:

- f è positiva in $]1, +\infty[$,
- f si annulla in 1,
- f è negativa in $]-\infty, 1[$.

Dato che f è composta da funzioni continue:

- f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

La continuità della f in $\mathbb{R}$ assicura che non è necessario calcolare limiti al finito; d'altro canto, bisogna studiare il comportamento intorno a $\pm\infty$. Calcolando i limiti troviamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} &= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \\ &= \pm\infty ,\end{aligned}$$

sicché:

- il diagramma di f non è dotato di asintoti orizzontali,
- f non è limitata né superiormente né inferiormente, quindi f non ha né minimo né massimo assoluti.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui: ricordando i limiti notevoli, troviamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \\ &= 1 = m_{\pm\infty} ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3-x^2}-x &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-1\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{y=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{-y} \\
&= -\frac{1}{3} = q_{\pm\infty} \ ,
\end{aligned}$$

cosicché:

- il diagramma di f è dotato di asintoto obliquo in $+\infty$, l'asintoto avendo equazione $y = x - \frac{1}{3}$,
- il diagramma di f è dotato di asintoto obliquo in $-\infty$, l'asintoto avendo equazione $y = x - \frac{1}{3}$.

Dato che il polinomio $x^3 - x^2$ è derivabile ovunque in $\mathbb{R}$ e che la funzione radice cubica è derivabile lì dove il suo argomento non si annulla, è certo che f è derivabile almeno in $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Per stabilire se f è derivabile in 0 o in 1 analizziamo il comportamento dei rapporti incrementali: abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^{2/3}\ \sqrt[3]{x-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^{1/3}} \\
&= \lim_{x\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \\
&= \mp\infty \ , \\
\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3}\ \sqrt[3]{x-1}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\
&= \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}} \\
&= +\infty \ ,
\end{aligned}$$

quindi:

- f è derivabile in $\mathbb{R} - \{0, 1\}$,
- f non è derivabile né da destra né da sinistra in 0, ed il grafico ha in tal punto una cuspide (rivolta verso l'alto),
- f non è derivabile né da destra né da sinistra in 1, ed il grafico ha in tal punto tangente verticale.

La derivata di f si calcola con le tecniche usuali:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} \\
&= \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}
\end{aligned}$$

e si vede che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x(3x-2) \geq 0$, ossia solo se $x < 0$ oppure $x \geq 2/3$; pertanto:

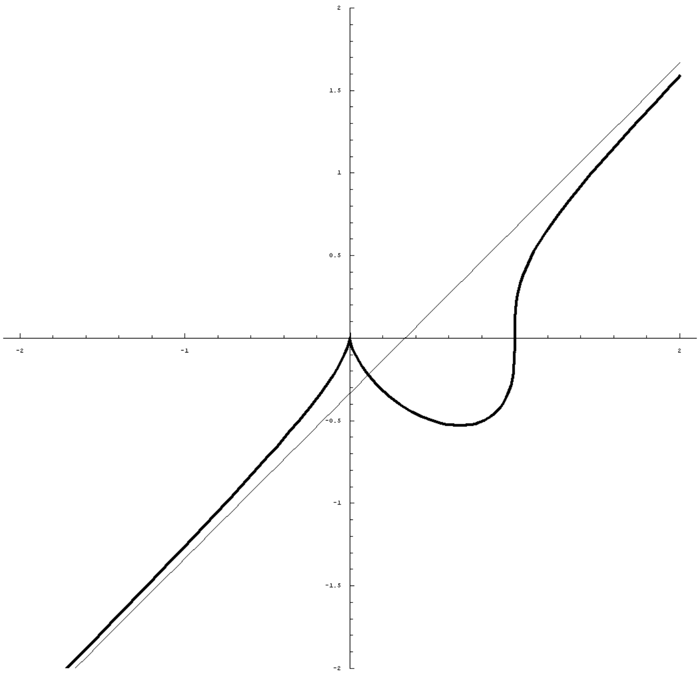

FIGURA 2. Diagramma di $f(x) := \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ (E.5).

- f è strettamente crescente in $]-\infty, 0]$ ed in $[2/3, +\infty[$,
- f è strettamente decrescente in $[0, 2/3]$;
- il punto 0 è un punto di massimo relativo per f e $f(0) = 0$,
- il punto $2/3$ è un punto di minimo relativo per f e $f(2/3) = -\sqrt[3]{4}/3 \approx -0.53$.

La derivata seconda si calcola con le solite regole:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(6x-2)\ \sqrt[3]{(x^3-x^2)^2} - (3x^2-2x)\ \frac{2(3x^2-2x)}{3\sqrt[3]{x^3-x^2}}}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^4}} \\
&= \frac{3(6x-2)\ (x^3-x^2) - 2(3x^2-2x)^2}{9\sqrt[3]{(x^3-x^2)^5}} \\
&= \frac{2x^2\big(3(3x-1)(x-1) - (3x-2)^2\big)}{9\sqrt[3]{(x^3-x^2)^5}} \\
&= \frac{-2x^2}{9\sqrt[3]{(x^3-x^2)^5}} \\
&= \frac{-2x^2}{9(x^3-x^2)\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} \\
&= -\frac{2}{9(x-1)\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}\ ,
\end{aligned}$$

e si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x - 1 < 0$, ossia se $x < 1$; pertanto:

- f è strettamente convessa in $]-\infty, 0]$ ed in $[0, 1]$,
- f è strettamente concava in $[1, +\infty[$,
- il diagramma di f ha un punto di flesso a tangente verticale nel punto di ascissa 1.

2.3. **Esercizio** (E.8)**.** La funzione $f(x) := \sqrt{|x|}\ \log^2|x|$ è definita non appena l'argomento del logaritmo risulti positivo, cioè quando $|x| > 0$; pertanto:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Poiché $\operatorname{Dom} f$ è bilanciato, ha senso calcolare $f(-x)$ e si vede che:

$$f(-x) = \sqrt{|-x|}\ \log^2|-x| = \sqrt{|x|}\ \log^2|x| = f(x)\ ,$$

cosicché:

- f è pari.

Ne consegue che basta, per tracciare il diagramma di f, limitarsi a studiare la funzione solo per $x > 0$, ossia nell'insieme $X :=]0, +\infty[$: limitatamente a tale intervallo, la legge di assegnazione di f si semplifica, poiché è possibile eliminare senza indugi i valori assoluti, ottenendo:

$$f(x) = \sqrt{x}\ \log^2 x\ .$$

Inoltre, è evidente che:

- f non è periodica.

Tenendo presente che i due fattori $\sqrt{x}$ e $\log^2 x$ sono sempre non negativi per $x > 0$ e che solo il secondo si annulla in 1, tenendo presente la parità di f si può affermare che:

- $f(x) > 0$ in $\operatorname{Dom} f - \{\pm 1\}$,
- $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$.

Dato che f è continua in X, gli unici limiti che importa calcolare sono quelli agli estremi dell'intervallo di definizione: si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0,\ x>0} \sqrt{x}\ \log^2 x \\
&\overset{\sqrt{x}=\mathbf{e}^{-y}}{=} \lim_{y\to+\infty} \mathbf{e}^{-y}\ \log^2 \mathbf{e}^{-2y} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{(-2y)^2}{\mathbf{e}^y} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{4y^2}{\mathbf{e}^y} \\
&= 0\ , \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ \log^2 x \\
&= +\infty\ ,
\end{aligned}$$

da cui, tenendo sempre presenta la parità di f, segue che:

- f è convergente in 0 e si può prolungare con continuità da destra e da sinistra su tale punto ponendo $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^\pm} f(x)$,
- f diverge positivamente in $\pm\infty$, perciò non è limitata superiormente e non è dotata di massimo assoluto.

D'ora in avanti la lettera f denoterà sempre il prolungamento per continuità della funzione assegnata sul punto 0, cioè la funzione definita in $\mathbb{R}$ ponendo:

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{|x|}\ \log^2|x| & ,\ \text{se } x \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{se } x = 0\ . \end{cases}$$

Tale funzione conserva tutte le proprietà dette finora ed in più:

- f è continua in $\mathbb{R}$;

- $f(x) > 0$ in $\mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$,
- $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, \pm 1$.

La continuità di f in $\overline{X} = [0, +\infty[$ assicura che il diagramma della funzione non è dotato di asintoti verticali.
D'altra parte, la divergenza in $+\infty$ di f consente la ricerca dell'asintoto obliquo: usando le solite tecniche, si trova:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\ \log^2 x}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} \\ &= 0\ ,\end{aligned}$$

da cui segue che il diagramma non può presentare asintoto obliquo. Perciò:

- il diagramma di f non presenta asintoti di alcun tipo.

Dato che le funzioni radice e logaritmo sono derivabili quante volte si vuole quando i propri argomenti assumono valori positivi, si può affermare con certezza che la f è derivabile quante volte si vuole in $\mathbb{R} - \{0\}$. D'altra parte, in 0 si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{\sqrt{x}\ \log^2 x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} \\ &= +\infty;\ ,\end{aligned}$$

e da ciò, ricordando la parità di f, segue che:

- la f è derivabile quante volte si vuole in $\mathbb{R} - \{0\}$,
- la f non è derivabile in 0 né da destra né da sinistra, ed il diagramma ha nel punto di ascissa 0 una cuspide rivolta verso il basso.

La derivata di f, limitatamente all'insieme X, si calcola con le tecniche usuali:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log^2 x + \sqrt{x} \cdot 2\ \log x\ \frac{1}{x} \\ &= \frac{\log x\ \ (\log x + 4)}{2\sqrt{x}}\ ,\end{aligned}$$

e lo studio del segno è fattibile con tecniche elementari.
Dato che $f'(x) \geq 0$ se e solo se:

$$\log x\ (\log x + 4) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq \underbrace{\mathbf{e}^{-4}}_{\approx 0.018} \quad \text{oppure } x \geq 1\ ,$$

la parità di f ed il fatto che $f(x) \geq 0$ ovunque in $\mathbb{R}$ implicano che:

- la f è strettamente crescente in $[-1, -\mathbf{e}^{-4}]$, in $[0, \mathbf{e}^{-4}]$ ed in $[1, +\infty[$,
- la f è strettamente decrescente in $]-\infty, -1]$, in $[-\mathbf{e}^{-4}, 0]$ ed in $[\mathbf{e}^{-4}, 1]$,
- i punti ± 1 sono di minimo assoluto a tangente orizzontale e $\min f = f(\pm 1) = 0$,
- il punto di non derivabilità 0 è anch'esso di minimo assoluto.

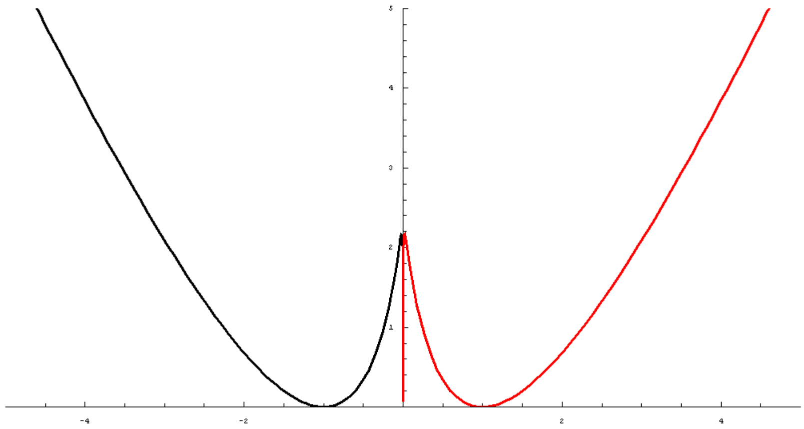

FIGURA 3. Diagramma di $f(x) := \sqrt{|x|}\ \log^2 |x|$ (E.8).

La derivata seconda di f in X si calcola con le usuali regole:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{2\log x+4}{x}\cdot\sqrt{x} - (\log^2 x + 4\log x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} \\ &= \frac{\frac{2\log x+4}{\sqrt{x}} - (\log^2 x + 4\log x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} \\ &= \frac{2(2\log x+4) - (\log^2 x + 4\log x)}{4x\sqrt{x}} \\ &= \frac{8-\log^2 x}{4x\sqrt{x}}\ , \end{aligned}$$

e lo studio del segno può essere svolto canonicamente.
Si ha $f''(x) \geq 0$ in X solo se $-2\sqrt{2} \leq \log x \leq 2\sqrt{2}$, ossia se:

$$\underbrace{\mathbf{e}^{-2\sqrt{2}}}_{\approx 0.06} \leq x \leq \underbrace{\mathbf{e}^{2\sqrt{2}}}_{\approx 16.9}\ .$$

Conseguentemente:

- f è convessa in $[-\mathbf{e}^{2\sqrt{2}}, -\mathbf{e}^{-2\sqrt{2}}]$ ed in $[\mathbf{e}^{-2\sqrt{2}}, \mathbf{e}^{2\sqrt{2}}]$,
- f è concava in $]-\infty, -\mathbf{e}^{2\sqrt{2}}]$, in $[-\mathbf{e}^{-2\sqrt{2}}, 0]$, in $[0, \mathbf{e}^{-2\sqrt{2}}]$ ed in $[\mathbf{e}^{2\sqrt{2}}, +\infty[$,
- i punti di ascisse $\pm\mathbf{e}^{-2\sqrt{2}}$ e $\pm\mathbf{e}^{2\sqrt{2}}$ sono punti di flesso a tangente obliqua per il diagramma di f.

2.4. **Esercizio** (E.14)**.** Osserviamo innanzitutto che la funzione $f(x) := |x-1| + |\arctan x|$ è composta da funzioni ovunque definite, ovunque non negative, prive di zeri in comune ed ovunque continue in $\mathbb{R}$; pertanto, risulta:

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$;
- $f(x) > 0$ in $\mathbb{R}$;
- f è continua in $\mathbb{R}$.

Inoltre, si vede che f è ottenuta sommando ad una funzione pari (i.e., $|\arctan x|$) una funzione né pari, né dispari, né periodica, di modo che:

- f non è né pari, né dispari, né periodica.

La continuità di f assicura che non è necessario calcolare limiti al finito.
D'altra parte, risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x-1| + |\arctan x| = +\infty\ ,$$

cosicché:

- la f diverge positivamente sia in $+\infty$ sia in $-\infty$, dunque non è limitata superiormente;
- il diagramma di f non presenta né asintoti orizzontali né asintoti verticali.

Per controllare l'eventuale presenza di asintoti obliqui, ed in vista del calcolo delle derivate, sembra opportuno ricavare l'espressione esplicita della legge di assegnazione di f.
Tale espressione si riesce ad ottenere distinguendo opportunamente *tutti* i casi legati alla presenza dei due valori assoluti: dato che:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x-1+\arctan x & ,\ \text{se } x-1\geq 0 \text{ e } \arctan x\geq 0 \\ x-1-\arctan x & ,\ \text{se } x-1\geq 0 \text{ e } \arctan x< 0 \\ -(x-1)+\arctan x & ,\ \text{se } x-1< 0 \text{ e } \arctan x\geq 0 \\ -(x-1)-\arctan x & ,\ \text{se } x-1< 0 \text{ e } \arctan x< 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-1+\arctan x & ,\ \text{se } x\geq 1 \text{ e } x\geq 0 \\ x-1-\arctan x & ,\ \text{se } x\geq 1 \text{ e } x< 0 \\ 1-x+\arctan x & ,\ \text{se } x< 1 \text{ e } x\geq 0 \\ 1-x-\arctan x & ,\ \text{se } x< 1 \text{ e } x< 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e visto che il secondo caso non può presentarsi (altrimenti sarebbe violato il *Principio di Tricotomia*), si ottiene:

$$f(x) = \begin{cases} x-1+\arctan x & ,\ \text{se } x\geq 1 \\ 1-x+\arctan x & ,\ \text{se } 0\leq x< 1 \\ 1-x-\arctan x & ,\ \text{se } x< 0\ . \end{cases}$$

Conseguentemente si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1+\arctan x}{x} \\ &= 1 = m_{+\infty} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - m_{+\infty}x &= \lim_{x\to+\infty} x-1+\arctan x - x \\ &= \underbrace{\frac{\pi}{2}-1}_{\approx 0.571} = q_{+\infty}\ , \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x-\arctan x}{x} \\ &= -1 = m_{-\infty} \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty}x &= \lim_{x\to-\infty} 1-x-\arctan x + x \\ &= \underbrace{\frac{\pi}{2}+1}_{\approx 2.571} = q_{-\infty}\ , \end{aligned}$$

e da ciò segue che:

- il diagramma di f è dotato di asintoto obliquo a destra e tale asintoto ha equazione $y = x+\frac{\pi}{2}-1$
- il diagramma di f è dotato di asintoto obliquo a sinistra e tale asintoto ha equazione $y = -x+\frac{\pi}{2}+1$.

Ricordate le proprietà di derivabilità delle funzioni elementari e vista l'espressione esplicita della legge di assegnazione di f, possiamo affermare con certezza che f è derivabile quante volte si vuole in tutti i punti del dominio diversi da 0 ed 1 (punti di raccordo tra espressioni analitiche diverse).

Per gli $x \neq 0, 1$ la derivata si calcola con le tecniche usuali:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1+x^2} & , \text{se } x > 1 \\ -1 + \frac{1}{1+x^2} & , \text{se } 0 < x < 1 \\ -1 - \frac{1}{1+x^2} & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{2+x^2}{1+x^2} & , \text{se } x > 1 \\ -\frac{x^2}{1+x^2} & , \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{2+x^2}{1+x^2} & , \text{se } x < 0 \ , \end{cases}$$

mentre, a rigore, per controllare se la funzione assegnata è derivabile in 0 ed in 1 dovremmo calcolare esplicitamente i limiti (destro e sinistro) dei rapporti incrementali; tuttavia, dato che f è continua in 0 ed in 1, possiamo ricorrere ad una notevole conseguenza del *Teorema di de l'Hôpital* per semplificare la verifica.
Dato che:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} -\frac{2+x^2}{1+x^2} = -2 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{1+x^2} = 0 \ , \\ \lim_{x\to 1^-} f'(x) &= \lim_{x\to 1^-} -\frac{x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2+x^2}{1+x^2} = \frac{3}{2} \ , \end{aligned}$$

è evidente che f è derivabile sia da destra sia da sinistra in 0 ed in 1, ma che essa non è derivabile globalmente né in 0 né in 1, poiché:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= -2 \neq 0 = f'_+(0) \\ f'_-(1) &= -\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} = f'_+(1) \ . \end{aligned}$$

Ne consegue che:

- la f è derivabile quante volte si vuole in $\mathbb{R} - \{0, 1\}$,
- f è derivabile da destra e da sinistra sia in 0 sia in 1 ed il diagramma di f presenta nei punti con tali ascisse dei punti angolosi.

Per stabilire il segno di f' basta notare che le tre diverse espressioni analitiche conservano segno immutato ognuna nel proprio intervallo di competenza: pertanto si ha $f'(x) > 0$ per $x > 1$ e $f'(x) < 0$ per $x < 0$ ed $0 < x < 1$ ed i *Criteri di Monotònia* implicano:

- f è strettamente decrescente in $]-\infty, 1]$,
- f è strettamente crescente in $[1, +\infty[$.

Poiché 1 separa un intervallo di decrescenza (a sinistra) da un intervallo di crescenza (a destra) possiamo ben dire che:

- 1 è un punto di minimo assoluto di f in $\mathbb{R}$ e $\min f = f(1) = \frac{\pi}{4}$;

inoltre, dato che f non è limitata superiormente, possiamo affermare che:

- f non ha punti di massimo assoluto.

Infine, calcolando la derivata seconda si trova:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & , \text{se } x > 1 \\ -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & , \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & , \text{se } x < 0 \ . \end{cases}$$

e si vede immediatamente che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$; ne consegue che:

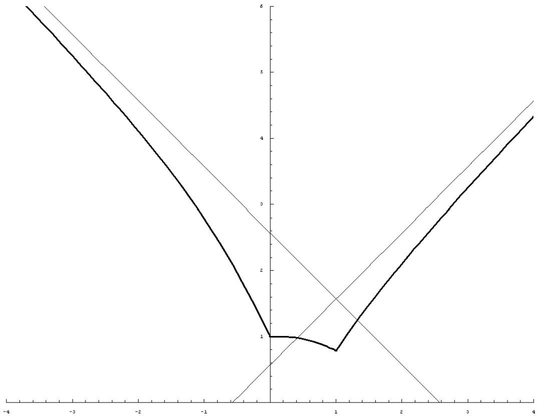

FIGURA 4. Diagramma di $f(x) := |x-1| + |\arctan x|$ (E.14).

- f è strettamente concava in $]-\infty, 0]$, in $[0,1]$ ed in $[1, +\infty[$.

Si osservi anche che:

- f non è *globalmente* concava in $\mathbb{R}$.

Infatti, se così fosse, per la monotònia dei rapporti incrementali si dovrebbe avere $f'_-(x_0) \geq f'_+(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, contro il fatto che tale relazione non sussiste né in 0 né in 1.

Dato che non ci sono punti che separano intervalli in cui f presenta concavità opposte, possiamo infine dire che:

- il diagramma di f è privo di punti di flesso.

2.5. **Esercizio** (E.15)**.** Per comodità poniamo:

$$f_1(x) := -\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{\log x - 2}{\log x - 1} \qquad X_1 :=]0, \mathbf{e}[\cup]\mathbf{e}, +\infty[=]0, +\infty[- \{\mathbf{e}\},$$
$$f_2(x) := \sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x \qquad X_2 :=]-\infty, 0]\ ,$$

di modo che la legge di assegnazione di f può essere riscritta come:

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & , \text{se } x \in X_1 \\ f_2(x) & , \text{se } x \in X_2\ . \end{cases}$$

Dato che f_1 ed f_2 sono definite, rispettivamente, in tutto X_1 ed in tutto X_2, si ha certamente:

- $\operatorname{Dom} f = X_1 \cup X_2 = \mathbb{R} - \{\mathbf{e}\}$.

Poiché il dominio di f non è *bilanciato* e poiché contiene tutti i numeri reali ad eccezione di $\mathbf{e}$, è evidente che:

- f non è né pari, né dispari e nemmeno periodica.

Per studiare il segno di f occorre studiare il segno di ognuna delle due espressioni analitiche limitatamente al rispettivo insieme di validità; in altri termini abbiamo $f(x) \geq 0$ se e solo se è soddisfatto uno dei sistemi:

(I) $$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \arctan\frac{\log x - 2}{\log x - 1} \geq 0 \\ 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \end{cases}$$

(II) oppure $$\begin{cases} \sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x \geq 0 \\ x \leq 0\ . \end{cases}$$

Il sistema (I) si può risolvere con le tecniche usuali; in particolare, la prima disequazione è soddisfatta non appena:

$$\begin{aligned}
\arctan \frac{\log x - 2}{\log x - 1} \geq \frac{\pi}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\log x - 2}{\log x - 1} \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log x - 1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \log x - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x < \mathbf{e} \ ,
\end{aligned}$$

dunque il primo sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x < \mathbf{e} \\ 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \end{cases}$$

ed ha come soluzioni gli $0 < x < \mathbf{e}$. Il sistema (II), invece, si risolve notando che la disequazione $\sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x \geq 0$ è sempre soddisfatta per $x \leq 0$, in quanto il primo membro è somma di quantità ≥ 0; dunque (II) ha come soluzioni tutti gli $x \leq 0$.[2] Ne viene che:

- f è positiva in $]-\infty, 0[$ ed in $]0, \mathbf{e}[$,
- f è nulla in 0,
- f è negativa in $]\mathbf{e}, +\infty[$.

Usando le proprietà delle funzioni elementari si vede che f è certamente continua in $\operatorname{Dom} f - \{0\}$, essendo lo 0 il punto di raccordo tra gli insiemi X_1 ed X_2 nei quali valgono espressioni analitiche diverse per la legge di assegnazione di f. Per studiare la continuità in 0 calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0,\ x<0} \sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x \\
&= 0 = f(0) \\
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0,\ x>0} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\log x - 2}{\log x - 1} \\
&= 0 = f(0) \ ,
\end{aligned}$$

cosicché f è continua anche in 0. Pertanto:

- f è continua in $\operatorname{Dom} f$.

Studiamo ora il comportamento di f ai limiti del dominio, cioè intorno a $\pm\infty$ ed $\mathbf{e}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\log x - 2}{\log x - 1} \\
&= \lim_{x \to +\infty} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{1 - \frac{2}{\log x}}{1 - \frac{1}{\log x}} \\
&= -\frac{\pi}{4} + \arctan 1 \\
&= 0 \ ,
\end{aligned}$$

[2] Inoltre, notiamo che l'equazione $f_2(x) = 0$ ha per soluzione $x = 0$ (si vede per ispezione diretta) e non ha alcuna altra soluzione (poiché per $x < 0$ entrambi gli addendi del primo membro sono positivi).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\mathbf{e}^+} f(x) &= \lim_{x\to\mathbf{e},\ x>\mathbf{e}} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\overbrace{\log x - 2}^{\to -1}}{\underbrace{\log x - 1}_{\to 0^+}} \\
&= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \\
&= -\frac{3\pi}{4}\ , \\
\lim_{x\to\mathbf{e}^-} f(x) &= \lim_{x\to\mathbf{e},\ x<\mathbf{e}} -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\overbrace{\log x - 2}^{\to -1}}{\underbrace{\log x - 1}_{\to 0^-}} \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{4}\ , \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}} - 2x \\
&= +\infty\ ,
\end{aligned}$$

quindi:

- f presenta un salto dall'alto verso il basso in $\mathbf{e}$, passando da $f_-(\mathbf{e}) = \frac{\pi}{4}$ ad $f_+(\mathbf{e}) = -\frac{3\pi}{4}$,
- f converge in $+\infty$ verso 0,
- f diverge positivamente (quindi non è limitata superiormente) in $-\infty$.

Da ciò segue che:

- il diagramma di f ha asintoto orizzontale a destra di equazione $y = 0$ (asse delle ascisse);

inoltre, dato che f diverge in $-\infty$ possiamo indagare la presenza di asintoto obliquo a sinistra: con semplici calcoli troviamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}} - 2x}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}}{x} - 2 \\
&= -2 = m_{-\infty}\ , \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty}\, x &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}} - 2x + 2x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}} \\
&= 1 = q_{-\infty}\ ,
\end{aligned}$$

perciò:

- il diagramma di f ha asintoto obliquo a sinistra di equazione $y = -2x + 1$.

Poiché f_1 ed f_2 sono funzioni elementari, possiamo ben dire che f è certamente derivabile quante volte si vuole $\operatorname{Dom} f - \{0\}$; per capire cosa succede in 0 (punto di continuità per la funzione f) dovremmo, a rigore, esaminare il comportamento del rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ al tendere ci x a 0 sia da sinistra sia da destra: tuttavia, per una notevole conseguenza del *Teorema di de l'Hôpital* (applicabile in quanto f è derivabile sia a destra sia a sinistra di 0), è possibile ottenere queste informazioni anche attraverso il calcolo dei limiti della derivata di f.
La derivata di f si calcola distinguendo i casi ed escludendo (in via precauzionale) il punto 0 di raccordo tra gli insiemi in cui valgono espressioni analitiche diverse per la legge di assegnazione

di f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} f_1'(x) & \text{, se } 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \\ f_2'(x) & \text{, se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1+\left(\frac{\log x-2}{\log x-1}\right)^2}\ \frac{1}{x(\log x-1)^2} & \text{, se } 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \\ \frac{-2\mathbf{e}^{2x}}{2\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}} - 2 & \text{, se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{(\log x-1)^2+(\log x-2)^2}\ \frac{1}{x} & \text{, se } 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \\ \frac{-\mathbf{e}^{2x}-2\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}}{\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}} & \text{, se } x < 0\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

Per quanto detto in precedenza, per analizzare la derivabilità in 0 basta calcolare i due limiti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0,\ x<0} \frac{\overbrace{-\mathbf{e}^{2x}}^{\to -1}}{\underbrace{\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}}_{\to 0^+}} - 2 \\
&= -\infty\ , \\
\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{1}{\underbrace{1+\left(\frac{\log x - 2}{\log x - 1}\right)^2}_{\to 2}}\ \frac{1}{\underbrace{x(\log x-1)^2}_{\to 0^+}} \\
&= +\infty\ ,
\end{aligned}$$

e trarne che:

- f non è derivabile in 0 né da sinistra né da destra ed in tal punto il diagramma presenta una cuspide verso il basso.

Per studiare il segno di f' occorre risolvere i seguenti sistemi:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{(\log x-1)^2+(\log x-2)^2}\ \frac{1}{x} \geq 0 \\ 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \end{cases}$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{-\mathbf{e}^{2x}-2\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}}{\sqrt{1-\mathbf{e}^{2x}}} \geq 0 \\ x < 0\ . \end{cases}$$

La disequazione del primo sistema è evidentemente soddisfatta per ogni $x > 0$; dunque (I′) ha per soluzioni gli $0 < x < \mathbf{e}$ oppure $x > \mathbf{e}$. La disequazione del secondo sistema, invece, non è mai soddisfatta per alcun $x < 0$; dunque il secondo sistema non ha soluzioni.
Conseguentemente:

- f è strettamente crescente in $[0, \mathbf{e}[$ ed in $]\mathbf{e}, +\infty[$,
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$.

Poiché 0 separa un intervallo di decrescenza (a sinistra) da un intervallo di crescenza (a destra), possiamo ben dire che:

- 0 è un punto di minimo relativo per f (pur non essendo un punto di derivabilità per f).

D'altro canto, un'analisi attenta dell'andamento della monotònia mostra che:

- f non è dotata di massimo assoluto, in quanto essa non è limitata superiormente,
- f è limitata inferiormente e si ha $\inf f = f_+(\mathbf{e}) = -\frac{3\pi}{4}$,
- f non ha minimo assoluto, poiché non esiste alcun $\xi \in \operatorname{Dom} f$ tale che $f(\xi) = -\frac{3\pi}{4}$.

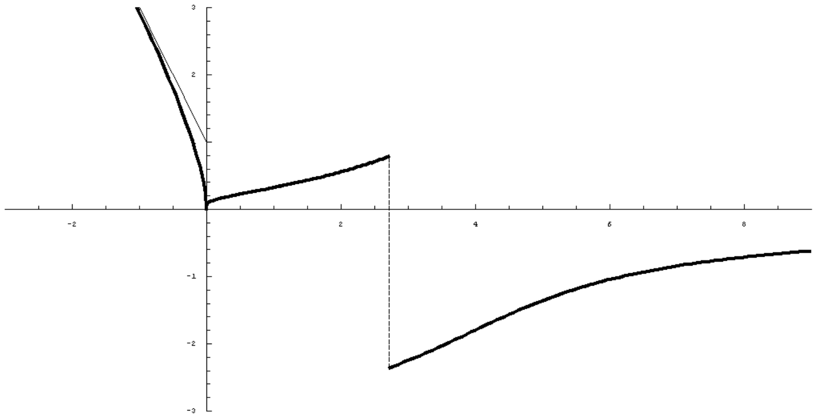

FIGURA 5. Diagramma di $f(x) := -\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{\log x - 2}{\log x - 1}$, se $0 < x < \mathbf{e}$ oppure $x > \mathbf{e}$; $\sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}} - 2x$, se $x \leq 0$ (E.15).

La f è derivabile una seconda volta in $\operatorname{Dom} f - \{0\} = \mathbb{R} - \{0, \mathbf{e}\}$ e coi soliti calcoli (che lasciamo allo studioso lettore) troviamo:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1 + 2\log x - 2\log^2 x}{x^2\,\left((\log x - 1)^2 + (\log x - 2)^2\right)^2} & \text{, se } 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \\ \frac{\mathbf{e}^{2x}(\mathbf{e}^{2x} - 2)}{(1 - \mathbf{e}^{2x})\,\sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}}} & \text{, se } x < 0\,. \end{cases}$$

Per studiare il segno di f'' occorre risolvere i sistemi:

$$(\mathrm{I}'') \qquad \begin{cases} \frac{1 + 2\log x - 2\log^2 x}{x^2\,\left((\log x - 1)^2 + (\log x - 2)^2\right)^2} \geq 0 \\ 0 < x < \mathbf{e} \text{ oppure } x > \mathbf{e} \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}'') \qquad \text{oppure} \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{e}^{2x}(\mathbf{e}^{2x} - 2)}{(1 - \mathbf{e}^{2x})\,\sqrt{1 - \mathbf{e}^{2x}}} \geq 0 \\ x < 0\,. \end{cases}$$

La disequazione presente in (I$''$) si risolve con tecniche standard: abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2\log x - 2\log^2 x}{x^2\,\left((\log x - 1)^2 + (\log x - 2)^2\right)^2} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + 2\log x - 2\log^2 x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1 + \sqrt{3}} \leq \log x \leq \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \leq \log x \leq \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\mathbf{e}^{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}}}_{\approx 0.69} \leq x \leq \underbrace{\mathbf{e}^{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}}_{\approx 3.92} \end{aligned}$$

cosicché il sistema ha per soluzioni le $\mathbf{e}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \leq x < \mathbf{e}$ oppure $\mathbf{e} < x \leq \mathbf{e}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$. La disequazione in (II$''$) non è soddisfatta per alcun $x < 0$; dunque (II$''$) non ha soluzioni.
Conseguentemente:

- f è convessa in $[\mathbf{e}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}, \mathbf{e}[$ ed in $]\mathbf{e}, \mathbf{e}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}]$,
- f è concava in $]-\infty, 0]$, in $[0, \mathbf{e}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}]$ ed in $[\mathbf{e}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}, \mathbf{e}]$.

Guardando l'andamento della concavità, vediamo che:

- il diagramma di f ha punti di flesso a tangente obliqua nei punti di ascisse $\mathbf{e}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$ e $\mathbf{e}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$.

2.6. **Esercizio** (E.18). La funzione:

$$f(x) = x + 1 + \arccos(x^2 - 1)$$

è definita per gli x che soddisfano le limitazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq -1 \\ x^2 - 1 \leq 1 \ , \end{cases}$$

pertanto:

- $\operatorname{Dom} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Usando le definizioni si vede che:

- f non è né pari né dispari, né periodica.

Lo studio del segno di f richiederebbe di risolvere elementarmente la disequazione:

$$x + 1 + \arccos(x^2 - 1) \geq 0 \ ,$$

la quale però non ha soluzioni esprimibili elementarmente. Quindi il problema verrà accantonato per il momento.[3]

La funzione f è composta di funzioni continue, dunque:

- f è continua in $\operatorname{Dom} f$.

La continuità di f ci consente di evitare il calcolo dei limiti. Inoltre, per il *Teorema di Weierstrass* possiamo affermare che f è limitata in $\operatorname{Dom} f$ (anzi, essa ha massimo e minimo assoluti), cosicché:

- il diagramma di f non ha asintoti di alcun tipo.

La funzione f è somma di una funzione derivabile, cioè il polinomio $x + 1$, e di una funzione composta, $\arccos(x^2 - 1)$, che è derivabile almeno nei punti in cui l'argomento dell'arccoseno non prende i valori ± 1; pertanto, possiamo certamente dire che f è derivabile almeno nell'insieme $\operatorname{Dom} f - \{0, \pm\sqrt{2}\}$.
Per analizzare la derivabilità di f da sinistra in $\sqrt{2}$ e da destra in $-\sqrt{2}$ e la derivabilità in 0 dovremmo passare al limite i relativi rapporti incrementali; tuttavia, dato che f è continua in $\operatorname{Dom} f$ e derivabile fuori da 0 e $\pm\sqrt{2}$, è possibile sfruttare una notevole conseguenze del *Teorema di de l'Hôpital* per semplificare tale operazione lavorando sui limiti della derivata prima f'.
La derivata prima di f si calcola seguendo le regole usuali:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} \ ,$$

[3] Tuttavia, allo studioso lettore sarà utile notare che si possono ricavare alcune informazioni parziali sul segno di f usando le proprietà delle funzioni elementari. Ad esempio, è possibile asserire che f assume certamente valori positivi in $[-1, \sqrt{2}]$: infatti, se $-1 \leq x \leq 1$ si ha $x + 1 \geq 0$ e $\arccos(x^2 - 1) \geq \frac{\pi}{2}$, cosicché $f(x) \geq \frac{\pi}{2} > 0$ in $[-1, 1]$; d'altra parte, se $1 < x \leq \sqrt{2}$, si ha $x + 1 > 2$ e $\arccos(x^2 - 1) \geq 0$, cosicché $f(x) > 2 > 0$ in $]1, \sqrt{2}]$.

e si vede che:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0,\ x>0} 1 - \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \\
&= \lim_{x\to 0,\ x>0} 1 - \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} \\
&= \lim_{x\to 0,\ x>0} 1 - \frac{2x}{|x|\ \sqrt{2-x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0,\ x>0} 1 - \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= 1-\sqrt{2} \\
\lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0,\ x<0} 1 - \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \\
&= \lim_{x\to 0,\ x<0} 1 - \frac{2x}{|x|\ \sqrt{2-x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0,\ x<0} 1 + \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= 1+\sqrt{2} \\
\lim_{x\to \sqrt{2}^-} f'(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to -\sqrt{2}^+} f'(x) &= +\infty\ ;
\end{aligned}
$$

quindi:

- f è derivabile in $]-\sqrt{2},0[\cup]0,\sqrt{2}[$,
- f è derivabile sia da sinistra sia da destra in 0 e si ha $f'_\pm(0) = 1 \mp \sqrt{2}$, cosicché il diagramma di f ha un punto angoloso nel punto di ascissa 0,
- f non è derivabile né da destra in $-\sqrt{2}$, né da sinistra in $\sqrt{2}$ ed il diagramma di f ha nei punti di ascisse $\pm\sqrt{2}$ tangenti verticali.

Lo studio del segno di f' chiede di risolvere la disequazione:

$$
1 - \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \geq 0\ ,
$$

che può essere risolta con tecniche standard. Tuttavia, è immediato notare che per $x<0$ la f' è somma di quantità positive, dunque $f'(x)>0$ per $x<0$; mentre per $x>0$ la disequazione è equivalente a:

$$
1-(x^2-1)^2 \geq 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^4+2x^2 \leq 0\ ,
$$

la quale non è mai soddisfatta. Dunque:

- f è strettamente crescente in $[-\sqrt{2},0]$,
- f è strettamente decrescente in $[0,\sqrt{2}]$.

Guardando l'andamento della monotònia, possiamo affermare che:

- f prende massimo assoluto nel punto 0, tale massimo essendo $\max f = f(0) = 1+\pi$,
- f ha minimi relativi in $-\sqrt{2}$ ed in $\sqrt{2}$, nei quali prende valori $f(\pm\sqrt{2}) = 1 \pm \sqrt{2}$,
- f prende il suo minimo assoluto nel punto $-\sqrt{2}$, tale minimo essendo $\min f = 1-\sqrt{2}$.

Incidentalmente, il confronto tra i segni di $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$ e $f(\sqrt{2})$ ed il fatto che f sia strettamente crescente in $[-\sqrt{2},0]$ e strettamente decrescente in $[0,\sqrt{2}]$ ci porta a concludere che è possibile applicare il *Teorema degli Zeri* per stabilire che esiste un unico punto $\xi \in]-\sqrt{2},0[$ tale che $f(\xi)=0$; pertanto, dallo studio della monotònia e degli estremi relativi consegue che:

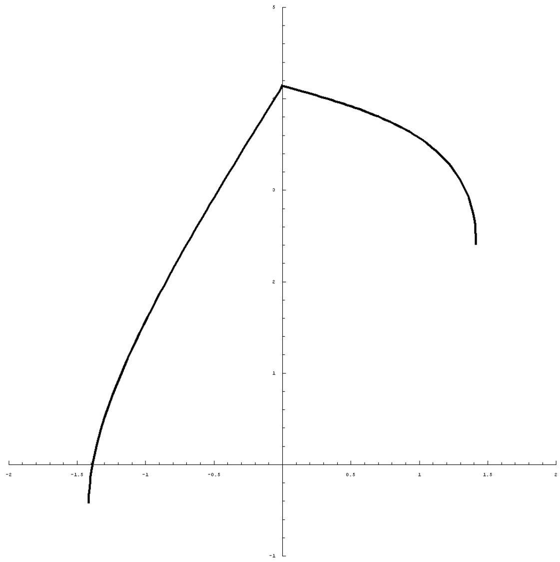

FIGURA 6. Diagramma di $f(x) := x + 1 + \arccos(x^2 - 1)$ (E.18).

- f è negativa in $[-\sqrt{2}, \xi[$,
- f è nulla in ξ,
- f è positiva in $]\xi, \sqrt{2}]$;

inoltre, è possibile trovare l'approssimazione numerica $\xi \approx -1.39$.

La f è derivabile anche una seconda volta (anzi, quante volte si vuole) nel suo insieme di derivabilità e, con le regole solite, si trova:

$$f''(x) = -2\sqrt{\frac{x^2}{(2-x^2)^3}} \ ,$$

e da ciò segue che $f''(x) < 0$ ovunque. Perciò:

- f è strettamente concava in $[-\sqrt{2}, 0]$ ed in $[0, \sqrt{2}]$,
- il diagramma di f non ha punti di flesso;

inoltre, osservando bene le proprietà di f' (in particolare, il fatto che essa è strettamente decrescente in $\mathrm{Dom}\, f - \{0, \pm\sqrt{2}\}$) si può asserire più precisamente che:

- f è strettamente concava in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

2.7. **Esercizio** (E.20)**.** La legge di assegnazione di f può essere espressa distinguendo opportunamente alcuni casi; in particolare, posto:

$$f_1(x) := 10 - x \ , \qquad f_2(x) := x \ , \qquad f_3(x) := \frac{x^2}{2} - 2$$

ed $f_{2,3} := \max\{f_2, f_3\}$, abbiamo:

$$f_{2,3}(x) = \begin{cases} f_2(x) & , \text{ se } f_2(x) > f_3(x) \\ f_3(x) & , \text{ se } f_2(x) \le f_3(x) \end{cases}$$

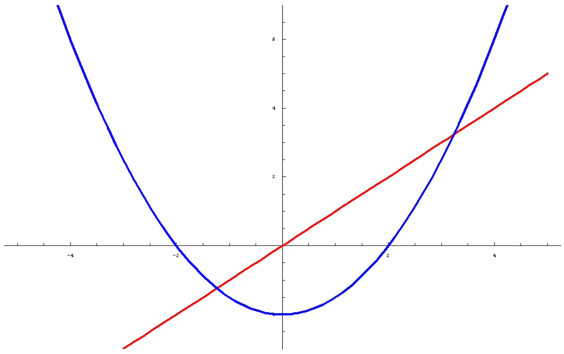

FIGURA 7. Diagramma di $f_2(x) := x$ ed $f_3(x) := \frac{x^2}{2} - 2$.

e dunque:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{, se } f_1(x) \leq f_{2,3}(x) \\ f_{2,3}(x) & \text{, se } f_1(x) > f_{2,3}(x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f_1(x) & \text{, se } f_1(x) \leq f_2(x) \text{ ed } f_1(x) \leq f_3(x) \\ f_2(x) & \text{, se } f_2(x) > f_3(x) \text{ ed } f_1(x) > f_2(x) \\ f_3(x) & \text{, se } f_2(x) \leq f_3(x) \text{ ed } f_1(x) > f_3(x)\ . \end{cases}$$

Ciò mostra che è possibile studiare la funzione con i metodi usuali per le funzioni definite per casi.

Tuttavia, visto che le funzioni f_1, f_2 ed f_3 hanno diagrammi facilmente rappresentabili, preferiamo indicare una via più semplice che si basa sul confronto grafico.

Per tracciare il grafico di f direttamente, proseguiamo come segue.
Innanzitutto, tracciamo in uno stesso sistema cartesiano i diagrammi di f_2 (in **rosso**) ed f_3 (in **blu**) come mostrato in FIGURA 7.

Per determinare graficamente il diagramma della funzione $f_{2,3} = \max\{f_2, f_3\}$ basta tenere i tratti del diagramma di f_2 in corrispondenza delle zone in cui tale diagramma sovrasta quello di f_3 ed i tratti del diagramma di f_3 in corrispondenza delle zone in cui tale diagramma sovrasta quello di f_2; otteniamo così il diagramma di $f_{2,3}$ rappresentato in FIGURA 8.

Il diagramma appena ottenuto mostra che $f_{2,3}(x) = f_2(x)$ non appena x appartiene all'intervallo compreso tra le due radici dell'equazione $x = \frac{x^2}{2} - 2$, cioè quando $x \in]1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}[$; viceversa, $f_{2,3}(x) = f_3(x)$ quando $x \in] - \infty, 1 - \sqrt{5}] \cup [1 + \sqrt{5}, +\infty[$.
Ora, tracciamo in uno stesso piano cartesiano i diagrammi di $f_{2,3}$ e di f_1 (in **verde**) ottenendo la FIGURA 9.

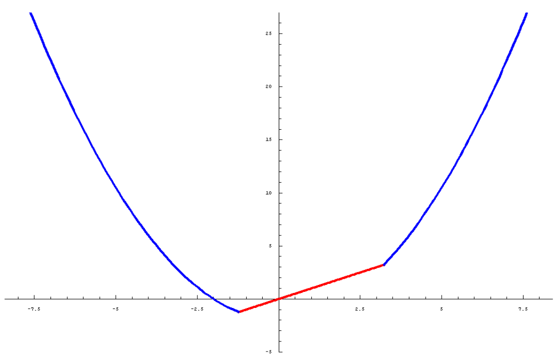

FIGURA 8. Diagramma di $f_{2,3}(x) := \max\{f_2(x), f_3(x)\}$.

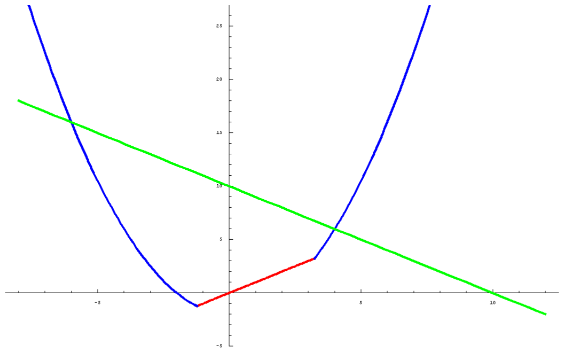

FIGURA 9. Diagramma di $f_1(x) := 10 - x$ ed $f_{2,3}(x) := \max\{f_2(x), f_3(x)\}$.

Per individuare graficamente il diagramma di f basta tenere i tratti del diagramma di f_1 in corrispondenza delle zone in cui tale diagramma è al di sotto di quello di $f_{2,3}$ e, viceversa, tenere i tratti del diagramma di $f_{2,3}$ in corrispondenza delle zone in cui esso è al di sotto di quello di f_1; otteniamo in tal modo il diagramma in FIGURA 10.

Il diagramma ora tracciato mostra che $f(x) = f_{2,3}(x)$ non appena x è nell'intervallo interno alle radici dell'equazione $10 - x = \frac{x^2}{2} - 2$, cioè quando $x \in]-6, 4[$; e che, viceversa, $f(x) = f_1(x)$ per $x \in]-\infty, -6[\cup]4, +\infty[$.
Ragionando graficamente abbiamo ottenuto la legge di assegnazione esplicita:

$$f(x) = \begin{cases} 10 - x & \text{, se } x < -6 \text{ oppure } x > 4 \\ \frac{x^2}{2} - 2 & \text{, se } -6 \le x \le 1 - \sqrt{5} \text{ oppure } 1 + \sqrt{5} \le x \le 4 \\ x & \text{, se } 1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}\ , \end{cases}$$

ed è possibile risalire a tutte le informazioni utili circa la funzione f, cioè:

- f è definita e continua ovunque in $\mathbb{R}$;
- f non è né pari, né dispari, né periodica;
- f è positiva in $]-\infty, -2[$ ed in $]0, 10[$,

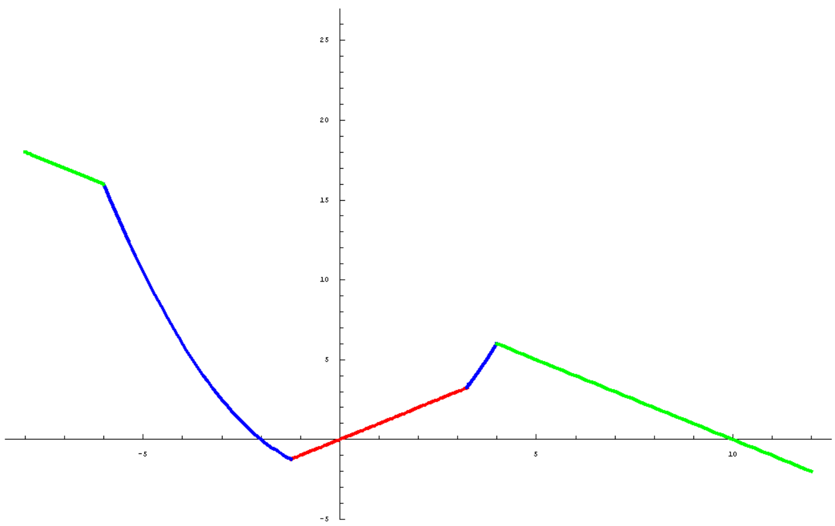

FIGURA 10. Diagramma di $f(x) := \min\{f_1(x), f_{2,3}(x)\}$.

- f è nulla in -2, 0 e 10,
- f è negativa in $]-2,0[$ ed in $]10,+\infty[$;
- il diagramma di f ha asintoto obliquo di equazione $y = 10 - x$ (poiché coincide con tale retta);
- f è derivabile in $\mathbb{R} - \{-6, 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}, 4\}$,
- il diagramma di f presenta punti angolosi nei punti di ascisse -6, $1-\sqrt{5}$, $1+\sqrt{5}$ e 4;
- f è strettamente crescente in $[1-\sqrt{5}, 4]$,
- f è strettamente decrescente in $]-\infty, 1-\sqrt{5}]$ ed in $[4,+\infty[$;
- f è convessa (non strettamente) in $]-\infty,-6]$, in $[-6,4]$ ed in $[4,+\infty[$ (e strettamente convessa limitatamente agli intervalli $[-6, 1-\sqrt{5}]$ e $[1+\sqrt{5}, 4]$);
- il diagramma di f non presenta punti di flesso.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: guglielmo.dimeglio@unina.it