# QUALCHE ESERCIZIO SULLE SERIE

G. DI MEGLIO

## Indice



## Introduzione

In questi fogli ho raccolto alcuni esercizi sulle serie.
Al solito, nel primo paragrafo sono proposti alcuni esercizi di calcolo mentre nel secondo alcuni esercizi di teoria.

## 1. Esercizi

`Esercizio 1:` Sia $x > -1$.
Provare che la serie:

$$\sum \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

è convergente e che ha come somma il numero $\frac{1}{x+1}$.

`Esercizio 2:` Calcolare:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

[**Suggerimento**: Usare opportunamente le stime [DM2, § 3.5, (2)].]

`Esercizio 3:` Determinare per quali valori del parametro $q \in \mathbb{R}$ la serie $\sum a_n$ con addendi:

$$a_n := \frac{1}{1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}}$$

è convergente.

`Esercizio 4:` Studiare la convergenza della serie:

$$\sum \frac{1}{n \log n \log^{\gamma}(\log n)}$$

(in cui $\gamma \in \mathbb{R}$) usando il Criterio di Condensazione.

`Esercizio 5:` Stabilire che la serie:

$$\sum \frac{1}{n \log^{\beta} n}$$

(in cui $\beta \geq 0$) converge se e solo se $\beta > 1$ usando il Criterio dell'Integrale.

---

*Date*: 29 dicembre 2017.

`Esercizio 6:` Usando opportunamente i criteri di convergenza noti, studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^4 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+\mathbf{e}^n)}{n\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k)} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n(n^2-1)}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+\sqrt[3]{n}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n\log^2 n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) .$$

`Esercizio 7:` Dire per quali valori reali del parametro $x$ le seguenti serie convergono determinandone, quando possibile, la somma:

$$\sum \frac{x^n}{2^{n-2}}, \qquad \sum \frac{1}{\arctan^n x}, \qquad \sum (2\sin^2 x)^n,$$

$$\sum \sqrt{1-\frac{1}{n^x}}, \qquad \sum (-1)^n n^x, \qquad \sum \frac{1}{n+1}\left(2\cos x + 2\sin x + \sqrt{3}\right)^n .$$

`Esercizio 8:` Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**1**. Dire per quali valori dei parametri $\alpha$ e $\beta$ la serie:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+n^\beta)^\alpha}$$

risulta convergente.

**2**. Per quali valori di $\alpha > 0$ la serie:

$$\sum \frac{\alpha^n n!}{n^n}$$

converge?

[**Suggerimento**: Valutare l'ordine di infinitesimo della successione degli addendi usando la *formula di Stirling*, cioè $n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2}\mathbf{e}^{-n}(1+\mathrm{o}(1))$.]

**3**. Provare che per ogni $0 < \alpha < 1$ esiste un valore $\beta > 0$ tale che il:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

esiste finito e non nullo. Calcolare tale limite.
Cosa si può dire per $\alpha = 0$? E per $\alpha = 1$?

[**Suggerimento**: Sfruttare le stime [DM2, § 3.5, (2)].]

`Esercizio 9:` Provare che la serie:

$$\sum \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

è a segni alterni e studiarne la convergenza col *Criterio di Leibniz*.
La serie è assolutamente convergente?
È possibile calcolare *esplicitamente* le somme parziali della serie?

`Esercizio 10:` Si supponga di avere a disposizione una striscia di carta molto "lunga" e con uno spessore positivo $\varepsilon \ll 1$.
Si cominci a piegare la striscia a metà sul lato lungo, poi la si pieghi di nuovo a metà, poi ancora, e così via...

**1**. Calcolare lo spessore della striscia così ripiegata dopo un certo numero $n$ di pieghe.

**2**. Dopo quante pieghe la striscia ripiegata avrà uno spessore superiore ad 1?

`Esercizio 11 (Serie ed Espansioni Decimali):` **1**. Sia $(a_n)$ una qualsiasi successione a valori in $\{0,1,\dots,8,9\}$.
Provare che la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

converge ed ha per somma il numero decimale $0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

**2**. Siano $N$ un numero naturale ed $a_1,\dots,a_N \in \{0,1,\dots,8,9\}$.
Si provi che il numero decimale periodico $0,\overline{a_1a_2\cdots a_N}$ di periodo $N$ si può esprimere come un numero razionale, ritrovando la seguente regola (nota dalle scuole medie):

> "Il numero decimale periodico $0,\overline{a_1\cdots a_N}$ di periodo $N$ si può scrivere come una frazione che ha al numeratore il numero di $N$ cifre $a_1\dots a_N$ (ossia $a_1 10^N + a_2 10^{N-1} + \cdots + a_{N-1}10 + a_N$) ed al denominatore il numero con $N$ cifre tutte uguali a 9, cioè:
>
> $$0,\overline{a_1\cdots a_N} = \frac{\overbrace{a_1\cdots a_N}^{N \text{ cifre}}}{\underbrace{9\cdots 9}_{N \text{ cifre}}} \text{''}.$$

Ad esempio:

$$0,\overline{321} = \frac{321}{999}\ .$$

**3**. Siano $N,p$ numeri naturali e $a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_{p+N}\{0,1,\dots,8,9\}$.
Provare che il numero decimale $0,a_1\cdots a_p\overline{a_{p+1}\cdots a_{p+N}}$ periodico di periodo $N$ avente antiperiodo $a_1\cdots a_p$ di lunghezza $p$ si può esprimere come numero razionale, ritrovando la regola (nota dalle scuole medie):

> "Il numero decimale $0,a_1\cdots a_p\overline{a_{p+1}\cdots a_{p+N}}$ di periodo $N$ ed antiperiodo $a_1\cdots a_p$ di lunghezza $p$ si può scrivere come una frazione che ha al numeratore il numero che si ottiene sottraendo dal numero di $N+p$ cifre $a_1\cdots a_{p+N}$ il numero formato con le $p$ cifre

dell'antiperiodo $a_1 \cdots a_p$ ed al denominatore il numero di $N + p$ cifre con le prime $N$ uguali a 9 e le ultime $p$ uguali a zero, cioè:

$$0, a_1 \cdots a_p \overline{a_{p+1} \cdots a_{p+N}} = \frac{\overbrace{a_1 \cdots a_{p+N}}^{N+p \text{ cifre}} - \overbrace{a_1 \cdots a_p}^{p \text{ cifre}}}{\underbrace{99 \cdots 99}_{N \text{ cifre}}\underbrace{0 \cdots 0}_{p \text{ cifre}}} \text{''}.$$

Ad esempio:

$$0, 19\overline{321} = \frac{19321 - 19}{99900} = \frac{19302}{99900} .$$

**4**. Cosa succede se si tenta di scrivere come frazione i numeri periodici $0, \overline{9}$ e $0.4\overline{9}$? Che conseguenze ha ciò sull'unicità della rappresentazione decimale dei numeri razionali?

`Esercizio 12:` Provare che le serie $\sum \frac{\sin n}{n}$ e $\sum \frac{\cos n}{n}$ sono entrambe convergenti.

[**Suggerimento**: Usare il trucco seguente per passare in campo complesso. Dato che $\mathbf{e}^{\mathbf{i}n} = \cos n + \mathbf{i} \sin n$, si ha $\frac{\cos n}{n} + \mathbf{i}\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{n}\mathbf{e}^{\mathbf{i}n}$; dette $x_n$ ed $y_n$ le somme parziali delle serie $\sum \frac{\cos n}{n}$ e $\sum \frac{\sin n}{n}$, risulta $x_n + \mathbf{i}y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\mathbf{e}^{\mathbf{i}n}$, cioè $s_n = x_n + \mathbf{i}y_n$ è la somma parziale della serie con addendi complessi $z_n = \frac{1}{n}\mathbf{e}^{\mathbf{i}n}$. La serie complessa $\sum z_n$ ha gli addendi che ricadono nella tipologia del Criterio di Dirichlet, in quanto sono il prodotto di una successione $a_n = \frac{1}{n}$ (reale, non negativa, infinitesima e decrescente) e di $b_n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n}$. Dato che $\sum \mathbf{e}^{\mathbf{i}n} = \sum \mathbf{e}^{\mathbf{i}} \cdot (\mathbf{e}^{\mathbf{i}})^{n-1}$ si può riguardare come serie geometrica complessa di ragione $q = \mathbf{e}^{\mathbf{i}}$ (complessa!), le sue somme parziali si esprimono come $B_n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}} \cdot \frac{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}n}}{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}}}$; per disuguaglianza triangolare si ha $|B_n| \leq |\mathbf{e}^{\mathbf{i}}| \cdot \frac{1+|\mathbf{e}^{\mathbf{i}}|^n}{|1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}}|} = \frac{2}{|1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}}|}$, cosicché $(B_n)$ è una successione complessa limitata. Applicando Dirichlet, troviamo che $s_n$ è una successione complessa convergente verso un numero complesso $s = x + \mathbf{i}y$. Conseguentemente anche la successione dei coniugati $\overline{s_n} = x_n - \mathbf{i}y_n$ è convergente e converge verso $\overline{s} = x - \mathbf{i}y$. Dunque anche $x_n = \frac{s_n + \overline{s_n}}{2}$ ed $y_n = \frac{s_n - \overline{s_n}}{2\mathbf{i}}$ sono successioni convergenti, rispettivamente, verso $x = \mathrm{Re}(s) \approx 0.042$ ed $y = \mathrm{Im}(s) \approx 1.071$.]

## 2. Serie Numeriche

`Esercizio 13:` Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi convergente.
Per $\lambda > 0$ si ponga:

$$A_\lambda := \{n \in \mathbb{N} : \; a_n \geq \lambda\} .$$

Dimostrare che il numero di elementi di $A_n$ è minore od uguale a $\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty a_n$.

[**Suggerimento**: Osservare che $\sum_{n=0}^\infty a_n \geq \sum_{n \in A_\lambda} a_n$ e concludere.]

`Esercizio 14 (Criterio del Rapporto "Migliorato"):` Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ serie a termini positivi.

**1**. Provare che se risulta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

per ogni indice $n$ (o anche per $n$ "sufficientemente grande"), allora:

i. se $\sum b_n$ converge, allora anche $\sum a_n$ converge;

ii. se $\sum a_n$ diverge, allora anche $\sum b_n$ diverge.

[**Suggerimento**: Dalle ipotesi consegue che la successione $\frac{a_n}{b_n}$ è decrescente e limitata dal basso; detto $l \geq 0$ il suo limite, mostrare che si può applicare il *Criterio del Confronto Asintotico*.]

**2**. Usare il *Criterio del Rapporto "Migliorato"* **1** per provare che se $\sum a_n$ è una serie a termini positivi tale che:

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

per ogni indice $n \in \mathbb{N}$ (o anche per $n$ "sufficientemente grande"), allora $\sum a_n$ diverge.

`Esercizio 15 (Criteri di Kummer):` Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi.

**1** `(Critero di Convergenza di Kummer).` Dimostrare che se esistono una successione $(t_n)$ a termini positivi ed un numero $\tau > 0$ tali che:

$$t_n \, \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \geq \tau$$

per ogni indice $n \in \mathbb{N}$, allora $\sum a_n$ converge.

[**Suggerimento**: Sfruttare l'ipotesi per mostrare che la serie $\sum \tau a_{n+1}$ si può maggiorare con una serie telescopica convergente; concludere.]

**2** `(Criterio di Divergenza di Kummer).` Dimostrare che se esiste una successione $(t_n)$ a termini positivi e tale che:

$$t_n \, \frac{a_n}{a_{n+1}} - t_{n+1} \leq 0$$

per ogni indice $n \in \mathbb{N}$ e tale che $\sum \frac{1}{t_n}$ è divergente, allora la serie $\sum a_n$ è divergente.

[**Suggerimento**: Sfruttare l'ipotesi per provare che i rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sono minorati dai corrispondenti rapporti di una serie divergente; concludere invocando il *Criterio del Rapporto "Migliorato"*.]

`Esercizio 16:` Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi tale che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} = \lambda \in \widehat{\mathbb{R}} \, .$$

**1**. Provare che se $\lambda > 1$, allora la serie $\sum a_n$ converge.

**2**. Dimostrare che se $\lambda < 1$, allora la serie $\sum a_n$ è divergente.

[**Suggerimento**: Sfruttare il *Criterio del Confronto* e la serie armonica generalizzata.]

**3**. Cosa succede se $\lambda = 1$?
Analizzare il comportamento delle serie con addendi $\sum 1/(n \log n)$ e $\sum 1/(n \log^2 n)$.

`Esercizio 17:` Sia $(a_n)$ una successione a termini non negativi.

**1**. Provare che se $\sum a_n$ converge allora anche la serie $\sum a_n^2$ converge.
È vero il viceversa? Dimostrarlo od esibire un controesempio.

**2**. Più in generale, provare che se $\sum a_n$ converge allora, comunque si scelga $p > 1$, pure la serie $\sum a_n^p$ è convergente.
È vero il viceversa? Dimostrarlo od esibire un controesempio.

**3**. Dimostrare che la serie $\sum a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

**4**. Sia $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ una funzione:

(1) continua in $[0, +\infty[$,
(2) derivabile in $]0, +\infty[$,
(3) tale che $f(0) = 0$,
(4) per la quale esistono due costanti $0 < c \leq C$ tali che $c \leq f'(x) \leq C$ in $]0, +\infty[$.

Mostrare che $\sum a_n$ converge se e solo se $\sum f(a_n)$ converge.

`Esercizio 18:` Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi.

**1**. Provare che se $\sum a_n$ è convergente e se $(b_n)$ è limitata, allora $\sum a_n b_n$ è convergente.

**2**. Provare che se $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergono, allora la serie $\sum a_n b_n$ converge.

[**Suggerimento**: Usare la disuguaglianza $(a - b)^2 \geq 0$.]

**3**. Provare che, più in generale, se esiste un $p > 1$ tale che $\sum a_n^p$ e $\sum b_n^{\frac{p}{p-1}}$ convergono, allora $\sum a_n b_n$ pure converge.

[**Suggerimento**: Usare la *disuguaglianza di Young* $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{p-1}{p}b^p$ [DM1, § 5.3].]

`Esercizio 19:` Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi con successione degli addendi decrescente.
Provare che non solo si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ma anche $\lim_{n\to+\infty} n\ a_n = 0$.

[**Suggerimento**: Basta provare che le successioni estratte $(2ka_{2k})$ e $((2h+1)a_{2h+1})$ tendono a zero; osservare che $2ka_{2k} \leq 2\sum_{j=k}^{2k} a_j$ e concludere usando il *Criterio di Cauchy*; lo stesso per l'altra sottosuccessione.]

`Esercizio 20:` Sia $(a_n)$ una successione crescente di numeri positivi.
Provare che se la serie $\sum \frac{1}{n + a_n}$ converge allora converge pure $\sum \frac{1}{a_n}$.

[**Suggerimento**: Sfruttare l'`Esercizio 19`.]

`Esercizio 21 (Serie di Taylor):` Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione indefinitamente derivabile in $I$ ed $x_0$ un punto interno ad $I$.

**1**. Provare che se le derivate di $f$ sono *equilimitate* intorno ad $x_0$, cioè se esistono un $\delta > 0$ ed un $M \geq 0$ tale che risulti:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ per ogni indice $n \in \mathbb{N}$, allora intorno ad $x_0$ la $f$ coincide con la somma della sua *serie di Taylor centrata in* $x_0$, ossia si ha:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$$

per ogni $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

[**Suggerimento**: Osservare che, la somma parziale $n$-esima della serie di Taylor coincide con il polinomio di Taylor d'ordine $n$; mettere il resto della formula di Taylor nella forma di Lagange, maggiorare usando $M$ e $\delta$ e concludere passando al limite su $n$.]

**2**. Determinare gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni elementari.

## Riferimenti bibliografici

[DM1] Di Meglio, G. (2017) *Funzioni Convesse*, reperibile su wwww.docenti.unina.it.

[DM2] Di Meglio, G. (2017) *Complementi sulle Serie Numeriche*, reperibile su wwww.docenti.unina.it.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: guglielmo.dimeglio@unina.it