QUALCHE ESERCIZIO SUI NUMERI COMPLESSI

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione

In questi fogli propongo esercizi (alcuni dei quali presi da vecchie tracce d'esame) sui numeri complessi.
Oltre ai consueti esercizi di carattere computazionale, sono presenti alcuni esercizi di teoria (e.g., dimostrazioni di proprietà di coniugato, modulo, argomento, etc... omesse nella dispensina che questi fogli accompagnano).

1. Forma Algebrica dei Numeri Complessi ed Operazioni

`Esercizio 1 (Parte Reale, Coefficiente dell'Immaginario e Coniugato):` Determinare esplicitamente la parte reale, il coefficiente della parte immaginaria ed il coniugato di ciascuno dei seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -2, \qquad z_3 = 3\mathbf{i}, \qquad z_4 = -\pi\ \mathbf{i},$$
$$z_5 = 1 + \mathbf{i}, \qquad z_6 = 1 - \mathbf{i}, \qquad z_7 = \pi + \sqrt{2}\ \mathbf{i}, \qquad z_8 = 0,$$
$$z_9 = \frac{1 - \sqrt{3}\ \mathbf{i}}{2}, \quad z_{10} = -\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\ \mathbf{i}, \quad z_{11} = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6}\ \mathbf{i}, \quad z_{12} = \mathbf{i}\sqrt{15} - \sqrt{5}\ .$$

`Esercizio 2:` Sia $z \in \mathbb{C}$.
Dimostrare le relazioni che legano z e $\overline{z}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \operatorname{Re} \overline{z}\ , \\ \operatorname{Im} z &= -\operatorname{Im} \overline{z}\ , \\ \overline{\overline{z}} &= z\ , \\ 2\operatorname{Re} z &= z + \overline{z}\ , \\ (2\operatorname{Im} z)\mathbf{i} &= z - \overline{z}\ . \end{aligned}$$

Date: 29 dicembre 2017.

`Esercizio 3 (Operazioni in Forma Algebrica - Somme e Prodotti):` Calcolare somma, differenza e prodotto di ogni possibile coppia di numeri complessi che si può formare coi seguenti numeri:

$$\begin{array}{llll} z_1 = 1 + \mathbf{i}, & z_2 = 1 - \mathbf{i}, & z_3 = 2\mathbf{i}, & z_4 = -\pi\mathbf{i}, \\ z_5 = 1 - 2\mathbf{i}, & z_6 = 1 + 2\mathbf{i}, & z_7 = 3 - 4\mathbf{i}, & z_8 = 5\ . \end{array}$$

`Esercizio 4:` Provare che risulta:

$$\operatorname{Re}(z \cdot \mathbf{i}) = -\operatorname{Im} z \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im}(z \cdot \mathbf{i}) = \operatorname{Re} z$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

`Esercizio 5:` Provare che il prodotto tra un numero complesso z ed il suo complesso coniugato $\overline{z}$ è *sempre* un numero reale non negativo.[1]
Sotto quali condizioni risulta $z \cdot \overline{z} > 0$?

`Esercizio 6 (Potenze dell'Unità Immaginaria i):` Calcolare $\mathbf{i}^2$, $\mathbf{i}^3$ ed $\mathbf{i}^4$.
Da ciò dedurre informazioni circa il valore delle successive potenze ad esponente naturale di $\mathbf{i}$.

`Esercizio 7 (Operazioni in Forma Algebrica - Potenze):` Calcolare i quadrati, i cubi e le quarte potenze dei numeri complessi dell'`Esercizio` 3.

`Esercizio 8 (Espressioni Esplicite di Alcune Potenze):` Provare che per ogni $z = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ risulta:

$$\begin{aligned} z^2 &= (a^2 - b^2) + 2ab\mathbf{i}\ , \\ z^3 &= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\mathbf{i}\ , \\ z^4 &= (a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + (4a^3b - 4ab^3)\mathbf{i}\ . \end{aligned}$$

`Esercizio 9 (Proprietà del Coniugio):` Siano $z, w \in \mathbb{C}$ ed $n \in \mathbb{N}$.
Provare che:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n\ .$$

`Esercizio 10:` Verificare che:

$$z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \overline{z}} \cdot \overline{z}$$

per ogni $z \neq 0$.
Dedurne che se z è tale che $z \cdot \overline{z} = 1$, allora $z^{-1} = \overline{z}$.

`Esercizio 11 (Operazioni in Forma Algebrica - Reciproci e Potenze Negative):`
1. Esprimere in forma algebrica il reciproco di ogni numero complesso non nullo dell'`Esercizio` 1.

2. Esprimere in forma algebrica le potenze z^{-2} e z^{-3} per ogni numero complesso non nullo dell'`Esercizio` 1.

[1] Ciò vuol dire che risulta $\operatorname{Im}(z \cdot \overline{z}) = 0$ e $z \cdot \overline{z} = \operatorname{Re}(z \cdot \overline{z}) \geq 0$.

`Esercizio 12 (Operazioni in Forma Algebrica - Rapporti):` Esprimere in forma algebrica il rapporto tra ogni possibile coppia di numeri complessi dell'`Esercizio` 3.

`Esercizio 13 (Operazioni in Forma Algebrica - Riepilogo):` Esprimere in forma algebrica i seguenti numeri:

$$\frac{\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\,,\qquad \frac{2-\mathbf{i}}{3+4\mathbf{i}}\cdot\overline{(1+\mathbf{i})}\,,\qquad \frac{(3-3\mathbf{i})(2\mathbf{i}-2)^2}{(1+\sqrt{3}\mathbf{i})(\overline{\sqrt{3}+\mathbf{i}})}\,,$$

$$(\mathbf{i}+1)^2\cdot(\mathbf{i}-1)\,,\qquad \frac{\mathbf{i}^2}{\mathbf{i}^3-4\mathbf{i}+6}\,,\qquad \mathbf{i}\cdot\frac{(4\mathbf{i}-3)^2}{-1+(4\mathbf{i}-3)}\,,$$

$$(\mathbf{i}-1)\cdot(1+\mathbf{i})\cdot(\mathbf{i}-2)\,,\qquad \left(\frac{\mathbf{i}-1}{6+2\mathbf{i}}\right)^3\,,\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathbf{i}}\right)^8\,,$$

$$(1+\mathbf{i})^{20}\qquad \frac{(1-\mathbf{i})^{11}}{\mathbf{i}^{13}}\,,\qquad \frac{4-8\mathbf{i}\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i})^4}{(5+3\mathbf{i})^2}\,.$$

`Esercizio 14 (Somma di una Progressione Geometrica):` Provare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ con $z \neq 1$ ed ogni $N \in \mathbb{N}$ risulta:

$$w + w\cdot z + w\cdot z^2 + \cdots + w\cdot z^{N-1} = w\cdot\frac{z^N-1}{z-1}\,.$$

[**Suggerimento**: Ragionare come nel caso reale, sfruttando le usuali regole del calcolo letterale.]

2. Modulo, Argomento e Forma Trigonometrica

`Esercizio 15 (Passaggio da Forma Algebrica a Forma Trigonometrica):` Determinare modulo, argomento principale (cioè quello appartenente a $]-\pi,\pi]$) e tutti i possibili argomenti dei seguenti numeri complessi:

$$\sqrt{3}+\mathbf{i}\qquad 1-\sqrt{3}\,\mathbf{i}\qquad -6+6\mathbf{i}\qquad 2\mathbf{i}$$

$$-\pi\mathbf{i}\qquad \frac{1}{\mathbf{i}}\qquad \frac{\mathbf{i}-1}{\mathbf{i}+1}\qquad (\mathbf{i}+1)^2\cdot(\mathbf{i}-1)$$

$$10(1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})\qquad \frac{|3+4\mathbf{i}|}{\mathbf{i}}\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right)^2\qquad \frac{1}{5\mathbf{i}-5}\,.$$

Scrivere ognuno dei numeri precedenti in forma trigonometrica.

`Esercizio 16 (Passaggio da Forma Trigonometrica a Forma Algebrica):` Scrivere in forma algebrica i numeri complessi espressi in forma trigonometrica:

$$\cos\pi + \mathbf{i}\,\sin\pi\,,\qquad 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathbf{i}\,\sin\frac{5\pi}{6}\right)\,,$$

$$\frac{1}{5}\left(\cos\frac{5\pi}{2}+\mathbf{i}\,\sin\frac{5\pi}{2}\right)\,,\qquad 10(\cos 4\pi+\mathbf{i}\,\sin 4\pi)\,,$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\mathbf{i}\,\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)\,,\qquad \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathbf{i}\,\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\,,$$

$$\frac{26}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathbf{i}\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\,,\qquad \mathbf{e}\left(\cos\frac{19\pi}{4}+\mathbf{i}\,\sin\frac{19\pi}{4}\right)\,,$$

$$\sqrt[3]{9}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathbf{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right)\,.$$

Dire quali tra i numeri precedenti è individuato da un argomento non principale e determinarne l'argomento principale (cioè quello appartenente a $]-\pi,\pi]$).

`Esercizio 17 (Proprietà del Modulo):` **1**. Provare che le uguaglianze:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z \cdot \overline{z} \\ |\overline{z}| &= |z| \\ |z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\ |z+w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) \\ |z+w|^2 - |z-w|^2 &= 2|z|^2 + 2|w|^2 \end{aligned}$$

sussistono per ogni scelta di $z, w \in \mathbb{C}$.

2. Provare che le disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Re}\, z|,\ |\,\mathrm{Im}\, z| &\leq |z| \\ \frac{|\,\mathrm{Re}\, z| + |\,\mathrm{Im}\, z|}{\sqrt{2}} &\leq |z| \\ |z| &\leq |\,\mathrm{Re}\, z| + |\,\mathrm{Im}\, z| \\ |z+w| &\leq |z| + |w| \\ \big||z| - |w|\big| &\leq |z-w| \end{aligned}$$

valgono per ogni $z, w \in \mathbb{C}$.

3. Verificare che:

$$|z|\ \frac{|z| - z}{|z| - \overline{z}} = -z$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $z \neq |z|$.

4. Provare che per ogni $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ il numero:

$$\frac{(z+|z|)^2}{z}$$

è reale e non negativo.[2]
Mostrare inoltre che $\frac{(z+|z|)^2}{z} = 0$ se e solo se z è reale negativo.[3]

5. Dimostrare che l'uguaglianza:

$$1 - \left| \frac{z-w}{1 - z \cdot \overline{w}} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)\ (1-|w|^2)}{|1 - \overline{z} \cdot w|^2}$$

vale per ogni coppia di numeri $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $\overline{z} \cdot w \neq 1$.

`Esercizio 18 (Una Scomodissima Formula per` $\mathrm{Arg}\, z$`):` Sia $z = x + y \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C} - \{0\}$.
Provare che:

$$\mathrm{Arg}\, z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & , \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & , \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & , \text{se } x, y < 0 \end{cases} .$$

[2] Il che, come al solito, significa che $\mathrm{Im}(\frac{(z+|z|)^2}{z}) = 0$ e $\mathrm{Re}(\frac{(z+|z|)^2}{z}) \geq 0$.
[3] Il che significa $\mathrm{Im}\, z = 0$ e $\mathrm{Re}\, z < 0$.

3. Operazioni in Forma Trigonometrica

`Esercizio 19 (Operazioni in Forma Trigonometrica - Prodotti, Rapporti e Potenze):` Usando le opportune regole di calcolo, esprimere i seguenti numeri complessi in forma trigonometrica:

$$(1+\mathbf{i})\cdot(\mathbf{i}-1)\,, \qquad \left(\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{i}\right)^2\,,$$

$$\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{5}\mathbf{i})^4}{|4+3\mathbf{i}|^3\cdot\mathbf{i}}\,, \qquad \frac{2\mathbf{i}+2}{(\mathbf{e}-\mathbf{e}\mathbf{i})^3}\cdot\overline{\mathbf{e}^2-\sqrt{3}\mathbf{e}^2\ \mathbf{i}}\,,$$

$$(\mathbf{i}+1)^{11}\,, \qquad \frac{\mathbf{i}^5\cdot(-3-3\mathbf{i})^7}{(\sqrt{3}-\sqrt{3}\mathbf{i})^{11}\cdot(\sqrt{3}\mathbf{i}-3)^3}\,.$$

Determinare l'argomento principale di ognuno dei risultati.

`Esercizio 20 (Operazioni in Forma Trigonometrica - Riepilogo):` Esprimere ognuno dei seguenti numeri complessi in forma trigonometrica usando l'argomento principale:

$$\frac{(2\mathbf{i}-2)^3\cdot\left(\overline{\sqrt{5}-\sqrt{5}\mathbf{i}}\right)^{10}}{|4+3\mathbf{i}|^5\cdot(-\frac{\sqrt{3}+\mathbf{i}}{8})}\cdot(-\pi\mathbf{i})^5$$

$$\frac{\left(\overline{\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathbf{i}}\right)^4\cdot(3-\sqrt{3}\mathbf{i})^2}{|9\mathbf{i}|^5\cdot(-\sqrt{18}\mathbf{i}-\sqrt{18})}\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\ \mathbf{i})^5$$

$$\left|\frac{3}{\sqrt{5}}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{20}}{5}\right|\cdot\frac{\mathbf{i}^{11}}{(\sqrt{10}-\sqrt{30}\mathbf{i})^3}\cdot(\overline{-\mathbf{i}+1})$$

$$\overline{\left(\frac{|12-5\mathbf{i}|^2\cdot(12+12\mathbf{i})}{(\sqrt{13}\mathbf{i}-\sqrt{39})^4}\right)}\cdot(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathbf{i})^{-1}\,.$$

`Esercizio 21 (Numeri Complessi e Formule Trigonometriche):` **1**. Ricordando la *formula di de Moivre*:

$$(\cos\vartheta+\mathbf{i}\ \sin\vartheta)^n=\cos(n\vartheta)+\mathbf{i}\ \sin(n\vartheta)$$

(valida per ogni $\vartheta\in\mathbb{R}$ ed $n\in\mathbb{Z}$) e le usuali regole di calcolo letterale in $\mathbb{C}$, ricavare le formule di duplicazione e triplicazione di coseno e seno.

2. Sfruttando anche la *relazione fondamentale della Trigonometria*, trovare espressioni di $\cos(5\vartheta)$ e $\sin(5\vartheta)$ in cui compaiano solo potenze di $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$.

3. Dalle regole per il calcolo delle potenze, ricavare le formule di bisezione di coseno e seno.

4. Radici N-esime Complesse

`Esercizio 22:` Calcolare le radici seconde, terze e seste dei numeri complessi degli `Esercizi` 15, 16 e 19, esprimendole in forma trigonometrica e (quando possibile) in forma algebrica.

`Esercizio 23:` Calcolare le radici quarte e le radici quinte dei risultati dell'`Esercizio` 20, esprimendole in forma trigonometrica.

`Esercizio 24 (Proprietà delle Radici` N`-esime dell'Unità):` Sia $N \in \mathbb{N}$ un numero ≥ 2.

1. Calcolare le N radici N-esime complesse $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}$ del numero 1.

2. Provare che:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1^n$$

per ogni $n = 0, \dots, N-1$.

3. Siano $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\zeta_0, \dots, \zeta_{N-1}$ le N radici N-esime complesse di z.
Provare che:

$$\zeta_n = \zeta_0 \cdot \varepsilon_n$$
$$\zeta_n = \zeta_0 \cdot \varepsilon_1^n$$

per ogni $n = 0, \dots, N-1$.

4. Provare che:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{N-1} = 0 \ .$$

[**Suggerimento**: Usare quanto trovato in **2** e la formula di sommazione delle progressioni geometriche (cfr. `Esercizio 14`).]

5. Dedurre da **2**, **3** e **4** che:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\vartheta + 2n\pi}{N}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\vartheta + 2n\pi}{N}\right) = 0$$

per ogni $\vartheta \in]-\pi, \pi]$.

6. Provare che per ogni $1 \leq k < N$ si ha anche:

$$\varepsilon_0^k + \varepsilon_1^k + \cdots + \varepsilon_{N-1}^k = 0$$

e dedurne che:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2nk\pi}{N}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2nk\pi}{N}\right) = 0 \ .$$

5. Equazioni Algebriche e non Algebriche in Campo Complesso

`Esercizio 25 (Equazioni di Primo Grado, Equazioni non Algebriche, Sistemi):`
1. Risolvere le seguenti equazioni di primo grado e riconducibili a queste:

$$\mathbf{i}z + 1 = 0 \ , \qquad (1 - 2\mathbf{i})z = 3\mathbf{i} \ ,$$

$$(\mathbf{i} - \mathbf{i}z + 1) \cdot \left(\frac{5}{3 - 4\mathbf{i}} \cdot z - 2\right) = 0 \ , \qquad z^2 - 2\mathbf{i}z - 1 = 0 \ .$$

[**Suggerimento**: Tenere presente che in $\mathbb{C}$ valgono tutte le usuali regole di calcolo (anche letterale) che consentono di risolvere le equazioni di primo grado e di fattorizzare i polinomi di secondo.]

2. Risolvere le seguenti equazioni non algebriche in campo complesso:

$$z^2 - \overline{z}^2 = 0 \ , \qquad \overline{z} \cdot z - z^2 = \mathbf{i} \ ,$$

$$z^2 - \mathbf{i} \cdot \overline{z} = 0 \ , \qquad \frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}} = \mathbf{i} \ ,$$

$$(1 + \mathbf{i}) \cdot z = (1 - \mathbf{i}) \cdot \overline{z} \ , \qquad z^3 - \overline{z}^3 = 0 \ .$$

[**Suggerimento**: Dopo aver fattorizzato (quando possibile) i primi membri, conviene porre $z = x + y\mathbf{i}$ e $\overline{z} = x - y\mathbf{i}$ e separare il reale dall'immaginario, ottenendo un sistema di equazioni reali nelle due incognite reali x ed y.]

3. Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} (2-2\mathbf{i}) \cdot z = \overline{z} \\ z - \overline{z} = 1 \end{cases} , \qquad \begin{cases} z^2 \cdot \overline{z} - z \cdot \overline{z} = -\overline{z} \\ (z^3 - \overline{z})^3 = 1 \end{cases} .$$

[**Suggerimento**: Conviene sostituire $z = x + y\mathbf{i}$ e $\overline{z} = x - y\mathbf{i}$ e poi separare il reale dall'immaginario.]

4. Quali condizioni devono soddisfare i numeri $u, v \in \mathbb{C}$ affinché il sistema (nell'incognita z):

$$\begin{cases} (u \cdot z - v \cdot \overline{z}) \cdot (v \cdot z - u \cdot \overline{z}) = 4 \\ z^2 - z \cdot \overline{z} = 0 \end{cases}$$

abbia almeno una soluzione in $\mathbb{C}$?

`Esercizio 26:` **1**. Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale l'implicazione:

$$z \cdot \overline{z} < 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}\left(\mathbf{i} \cdot \frac{1-z}{1+z}\right) > 0 .$$

2. Provare che per ogni numero complesso $w \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Im} w > 0$ esiste un unico $z \in \mathbb{C}$ tale che $z \cdot \overline{z} < 1$ e $w = \mathbf{i} \cdot \frac{1-z}{1+z}$.

[**Suggerimento**: Sfruttando le usuali regole del calcolo letterale, risolvere esplicitamente l'equazione $\mathbf{i} \cdot \frac{1-z}{1+z} = w$ rispetto all'incognita z; provare che il valore così determinato soddisfa le richieste.]

`Esercizio 27 (Equazioni che si Riconducono all'Estrazione di Radici):` Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + \mathbf{i} &= 0 , & z^2 - (1+\mathbf{i}) \cdot z + \mathbf{i} &= 0 , \\ z^3 - 6 &= 0 , & z^4 + \mathbf{i} &= 1 , \\ z^5 &= (1-\mathbf{i})^5 , & z^2 + 2z + \mathbf{i} &= 0 , \\ (1+\mathbf{i}) \cdot z^4 + \mathbf{i} \cdot z^2 + (\mathbf{i} - 1) &= 0 , & (z-1)^6 + 64\mathbf{i} &= 0 . \end{aligned}$$

[**Suggerimento**: Ricordare che per le equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$ vale la stessa formula risolutiva del caso reale, con l'unica differenza che la radice quadrata va intesa in senso complesso.]

`Esercizio 28 (Ulteriori Equazioni non Algebriche):` Risolvere le seguenti equazioni non algebriche in campo complesso:

$$
\begin{aligned}
&|z-\mathbf{i}| = |z+1|\ , && z+|z|^2 = 2\ ,\\
&\mathbf{i}\cdot z^2 = |z|^2\ , && z^3 = |z|^2\ ,\\
&|z|^2+5z+10\mathbf{i} = 0\ , && z^2+2|z|^2+\overline{z}^2 = 1\ ,\\
&\overline{z}^{-4} = |z|^2\ , && 2z^4 = \mathbf{i}\cdot\overline{z}^2\cdot|z|\ ,\\
&|z| = 3\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z\ , && z^2\cdot\overline{z} = -\sqrt{3}+\mathbf{i}\ ,\\
&z^3-|z|+z\cdot\overline{z} = 0 && |z-\overline{z}| = |z+\mathbf{i}|\ ,\\
&z^6-3|z^2| = 0\ , && z\cdot(z^2-3|z|^2) = |z|^3\ ,\\
&\frac{z}{1+|z|} = \frac{9}{4\,\overline{z}}\ , && \operatorname{Re}(z^2)\cdot(|z|^2-1) = 0\ ,\\
&z\cdot\arg z = \mathbf{i}-\frac{\pi}{2}\ z\ .
\end{aligned}
$$

[**Suggerimento**: Sfruttare la sostituzione $z = x + y\mathbf{i}$ e separare il reale dall'immaginario; oppure passare in forma trigonometrica e ricordare che due numeri in forma trigonometrica sono uguali se e solo se hanno ugual modulo ed argomenti che differiscono per un multiplo intero di 2π.]

6. Rappresentazione Geometrica dei Numeri Complessi

Ricordiamo che è possibile rappresentare i numeri complessi sul piano.

Osservazione 1: Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano Oxy, conveniamo di identificare il numero $z = a + b\mathbf{i}$ col punto P che ha come ascissa la parte reale di z e come ordinata il coefficiente della parte immaginaria, cioè con $P = (a, b)$; e, viceversa, conveniamo di identificare ogni punto $P = (a, b)$ col numero complesso z che ha l'ascissa di P come parte reale e l'ordinata di P come coefficiente della parte immaginaria, cioè con $z = a + b\mathbf{i}$.
Quando il piano cartesiano viene usato per rappresentare i numeri complessi, esso viene detto *piano di Gauss*[4] (o *piano di Argand*[5] – *Gauss*) e convenzionalmente l'asse delle ordinate è etichettato con il simbolo $\mathbf{i}y$, per rendere ancora più evidente che si sta usando il piano come rappresentazione di $\mathbb{C}$.
In tal caso, i numeri complessi che hanno $\operatorname{Im} z = 0$ vengono identificati con i punti dell'asse delle ascisse, mentre i punti che hanno $\operatorname{Re} z = 0$ vengono identificati coi punti dell'asse delle ordinate; per questo motivo gli assi x ed $\mathbf{i}y$ del piano di Gauss vengono detti, rispettivamente, *asse reale* ed *asse immaginario*. ♦

Osservazione 2: Nel piano di Gauss introduciamo il sistema di riferimento polare con polo nell'origine O e semiasse polare quello reale positivo.
Il numero complesso in forma trigonometrica $z = r(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$ viene identificato col punto $P = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$, il quale dista r da O ed appartiene alla semiretta uscente da O con anomalia ϑ.
Geometricamente, il punto P si ottiene intersecando la circonferenza di raggio r e centro O con la semiretta uscente da O che forma l'angolo ϑ col semiasse polare. ♦

`Esercizio 29:` Rappresentare sul piano di Gauss i numeri complessi degli `Esercizi 3` e `16`.

[4] Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), *princeps mathematicorum*.

[5] Jean-Robert Argand (1768 – 1822), libraio e matematico dilettante franco-svizzero, che per primo propose l'interpretazione geometrica dei numeri complessi.

`Esercizio 30:` Rappresentare sul piano di Gauss i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
A &:= \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z > 0\} \ , \\
B &:= \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z \leq 3\} \ , \\
C &:= \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \leq 0\} \ , \\
D &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im}\big((1+\mathbf{i}) \cdot z\big) = 4\right\} \ , \\
E &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\big((3+4\mathbf{i}) \cdot \overline{z}\big) = 5\right\} \ , \\
F &:= \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im}(2\overline{z}) < -1\} \ , \\
G &:= \{z \in \mathbb{C} : \ z \cdot \overline{z} = 4\} \ , \\
H &:= \{z \in \mathbb{C} : \ z \cdot \overline{z} > 1\} \ , \\
I &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}(z^2) = 1\right\} \ .
\end{aligned}$$

`Esercizio 31 (Equazione Complessa della Retta):` **1**. Provare che per ogni $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$, l'equazione nella variabile z:

$$w \cdot z + \overline{w \cdot z} + c = 0$$

rappresenta una retta nel piano di Gauss.

2. Viceversa, mostrare che per ogni equazione del tipo $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ed $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ (la quale individua una retta nel piano cartesiano Oxy) esistono un unico numero complesso $w \neq 0$ ed un unico numero reale c tali che:

$$w \cdot z + \overline{w \cdot z} + c = 0 \ .$$

`Esercizio 32:` Rappresentare sul piano di Gauss gli insiemi:

$$\begin{aligned}
A &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 2\} \\
B &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1 - \mathbf{i}| = 4\} \\
C &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1 \text{ e } \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z\} \\
D &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{4} < |z + 2\mathbf{i}| < 4 \geq\right\} \\
E &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = |z + \mathbf{i}|\} \\
F &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z-1|^2 + |z+1|^2 = 2\right\} \\
G &:= \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| + |z+1| = 2\} \\
H &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}\right\} \\
I &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ -\frac{2}{3} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}\right\} \\
J &:= \left\{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Arg} z| \geq \frac{\pi}{3} \text{ e } 1 \leq |z-1| \leq 3\right\} \ .
\end{aligned}$$

`Esercizio 33:` Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il numero complesso:

$$z_t := \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \mathbf{i}$$

soddisfa ognuna delle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
|z_t| &= 1\\
\operatorname{Arg} z_t &= \pi\\
\operatorname{Arg} z_t &= \frac{-\pi}{4}\\
\arg z_t &= \frac{7}{3}\pi\\
|\mathbf{i} - z_t| &= 0\\
\operatorname{Arg}^2 z_t &= \frac{\pi^2}{4}\\
|\operatorname{Arg} z_t| &\leq \frac{2}{3}\pi\ .
\end{aligned}$$

[**Suggerimento**: Evitare di calcolare esplicitamente $\operatorname{Arg} z_t$. Sfruttare l'interpretazione geometrica dell'argomento.]

2. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il numero complesso z_t si trova nel primo quadrante del piano di Gauss?
Per quali valori di t il numero complesso z_t^2 si trova nel semipiano reale positivo? E per quali nel secondo quadrante del piano di Gauss?
Per quali valori di t il numero z_t^4 è immaginario puro?

[**Suggerimento**: Calcolare z_t^2 e z_t^4 in forma algebrica e ricordare che le condizioni geometriche da imporre sono equivalenti a uguaglianze/diseguaglianze che coinvolgono parte reale e coefficiente dell'immaginario.]

`Esercizio 34:` **1**. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ il numero complesso:

$$z_x := x + \frac{1}{x}\ \mathbf{i}$$

soddisfa ognuna delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
|z_x| &= 1\\
\operatorname{Arg} z_x &= -\frac{\pi}{3}\\
\operatorname{Arg} z_x &= \frac{\pi}{4}\\
\arg z_x &= \frac{7}{3}\pi\\
|2 + 2\mathbf{i} - z_x|^2 &= 2\\
\operatorname{Arg}^2 z_x &= \frac{4\pi^2}{9}\\
|\operatorname{Arg} z_x| &\leq \frac{5}{6}\pi\ .
\end{aligned}$$

[**Suggerimento**: Evitare di calcolare esplicitamente $\operatorname{Arg} z_x$. Sfruttare l'interpretazione geometrica dell'argomento.]

2. Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ il numero z_x ha minima distanza da 0?

[**Suggerimento**: Minimizzare un'opportuna funzione di una variabile reale.]

`Esercizio 35:` **1**. Determinare per quali valori di $t \in]-1,1[$ il numero complesso:

$$z_t := \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{2t}{1-t^2}\ \mathbf{i}$$

soddisfa ognuna delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} |z_t| &= 1 \\ |\operatorname{Arg} z_t| &\leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Im}^2(z_t) &= 1 \\ \operatorname{Re}(z_t^2) &= 1 \\ \arg z_t &= 4\pi \\ |2+2\mathbf{i} - z_t|^2 &= 5\ . \end{aligned}$$

[**Suggerimento**: Evitare di calcolare esplicitamente $\operatorname{Arg} z_t$. Sfruttare l'interpretazione geometrica dell'argomento.]

2. Per quali valori di $t \in]-1,1[$ il numero z_t ha minima distanza da 2?

[**Suggerimento**: Minimizzare un'opportuna funzione di una variabile reale.]

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: `guglielmo.dimeglio@unina.it`