CENNI SUL CAMPO COMPLESSO

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione 1
1. Il Campo Complesso 1
2. Modulo, Argomenti e Forma Trigonometrica 7
3. Estrazione di Radice in Campo Complesso * 12
Appendice A. Il Campo Complesso non è Totalmente Ordinabile Compatibilmente con la Struttura Algebrica 15
Riferimenti bibliografici 16

Introduzione

In questi fogli ho raccolto, quasi *verbatim* e con poche aggiunte, l'introduzione ai numeri complessi fatta a lezione.
L'ultima sezione, relativa all'estrazione della radice in campo complesso contiene materiale non illustrato a lezione e non presente nel programma del corso 2017/'18; pertanto, la sua lettura è opzionale.
Infine, in appendice forniamo una semplice dimostrazione del fatto che il campo complesso $\mathbb{C}$ non è ordinabile mediante alcuna relazione d'ordine totale e compatibile con le operazioni.
Esercizi relativi ai numeri complessi sono reperibili in [DM1], da scaricare dalla mia pagina web-docenti.

1. Il Campo Complesso

Vogliamo *costruire* un nuovo insieme numerico su cui sono definite due operazioni, una somma ed un prodotto, aventi le usuali proprietà e che contiene propriamente $\mathbb{R}$.
A tale scopo, consideriamo l'insieme:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y),\ \text{con } x, y \in \mathbb{R}\}$$

e definiamo due operazioni, $+$ e $\cdot$, tra coppie ordinate di $\mathbb{R}^2$ ponendo:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{\text{DEF}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\ , \tag{1}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{\text{DEF}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \tag{2}$$

in cui le operazioni tra le coordinate dei secondi membri sono quelle usuali tra numeri reali.
Sporcandosi le mani con i calcoli, si riescono a dimostrare i seguenti fatti:

Teorema 1
Le operazioni $+$ e $\cdot$ godono delle seguenti proprietà:

Date: 28 dicembre 2017.

(1) per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *risulta* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$ *e* $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1)$*;*

(2) per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *risulta* $\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big)$ *e* $\big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\big) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot \big((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\big)$*;*

(3) per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *risulta* $(x_1, y_1) \cdot \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)$*;*

(4) esistono $(0, 0), (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ *tali che per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *risulti* $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ *e* $(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$*;*

(5) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *esiste un unico elemento* $-(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tale che* $(x, y) + \big(-(x, y)\big) = (0, 0)$*: tale elemento è* $(-x, -y)$*;*

(6) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ *esiste un unico elemento* $(x, y)^{-1} \in \mathbb{R}^2$ *tale che* $(x, y) \cdot (x, y)^{-1} = (1, 0)$*: tale elemento è* $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

In altre parole, $+$ *e* $\cdot$ *godono delle proprietà espresse negli assiomi del* **Gruppo 1** *(*Assiomi dell'Algebra*), i.e. sono entrambe commutative, associative, e dotate di elemento neutro,* $\cdot$ *è distributivo rispetto a* $+$*, ogni elemento di* $\mathbb{R}^2$ *è dotato di opposto, ed ogni elemento di* $\mathbb{R}^2$ *diverso da* $(0, 0)$ *è dotato di reciproco.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo alcune delle proprietà elencate, lasciando la verifica delle rimanenti al lettore.
Abbiamo:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)\\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)\end{aligned}$$

per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, dunque $+$ è commutativa.
Poi:

$$\begin{aligned}&\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) \cdot (x_3, y_3) =\\ &\qquad= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \cdot (x_3, y_3)\\ &\qquad= \big((x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3, (x_1 + x_2)y_3 + x_3(y_1 + y_2)\big)\\ &\qquad= \big((x_1x_3 - y_1y_3) + (x_2x_3 - y_2y_3), (x_1y_3 + x_3y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2)\big)\\ &\qquad= (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) + (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2)\\ &\qquad= (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\end{aligned}$$

per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, dunque $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) &= \left(x\frac{x}{x^2 + y^2} - y\frac{-y}{x^2 + y^2}, x\frac{-y}{x^2 + y^2} + y\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\\ &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, 0\right)\\ &= (1, 0)\end{aligned}$$

per $(x, y) \neq (0, 0)$, ergo (x, y) è dotato di reciproco ed il reciproco è $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.
□

Definizione 1
L'insieme $\mathbb{R}^2$ dotato delle operazioni definite più sopra viene detto *campo complesso* ed è denotato con la lettera $\mathbb{C}$.
Ogni elemento $z = (x, y)$ è detto *numero complesso*.

Osservazione 1 (Rappresentazione Geometrica di $\mathbb{C}$)**:** La stessa definizione di $\mathbb{C}$ ci consente di identificare ogni numero complesso $z = (x, y)$ col punto del piano cartesiano Oxy avente ascissa x ed ordinata y.
Il piano cartesiano su cui si rappresenta il campo $\mathbb{C}$ viene usualmente detto *piano di Argand*[1] – *Gauss*[2].
Diventa in questo modo evidente che la somma e la differenza di numeri complessi si possono calcolare e rappresentare graficamente sfruttando la *regola del parallelogramma* (che usualmente si usa per sommare o sottrarre vettori nel piano applicati nello stesso punto). ♦

Il Teorema 1 assicura che in $\mathbb{C}$ valgono, di fatto, tutte le regole di calcolo usuali che sono state già dimostrate nel caso del campo reale [DM2].
Valgono inoltre i seguenti fatti:

Proposizione 1
Per ogni elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ risulta:

$$(x, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \; .$$

Dimostrazione. Calcolando esplicitamente il secondo membro, troviamo:

$$\begin{aligned}(x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, y) \; ,\end{aligned}$$

come volevamo. □

Proposizione 2
L'elemento $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, detto unità immaginaria *e denotato usualmente col simbolo* $\mathbf{i}$, *gode della proprietà:*

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \; .$$

La semplice verifica è lasciata al lettore.

Proposizione 3
L'applicazione $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo:

$$r(x) := (x, 0)$$

è iniettiva e trasforma somme (di $\mathbb{R}$) in somme (di $\mathbb{R}^2$), prodotti (di $\mathbb{R}$) in prodotti (di $\mathbb{R}^2$), opposti (di $\mathbb{R}$) in opposti (di $\mathbb{R}^2$) e reciproci (di $\mathbb{R}$) in reciproci (di $\mathbb{R}^2$), nel senso che le uguaglianze:

$$\begin{aligned} r(x_1 + x_2) &= r(x_1) + r(x_2) \; , \\ r(x_1 x_2) &= r(x_1) \cdot r(x_2) \; , \\ r(-x) &= -r(x) \; , \\ r\left(\frac{1}{x}\right) &= \big(r(x)\big)^{-1} \; , \end{aligned}$$

[1] Jean-Robert Argand (1768 – 1822), libraio e matematico dilettante franco-svizzero, che per primo propose l'interpretazione geometrica dei numeri complessi.

[2] Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), *princeps mathematicorum*.

valgono per ogni $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (ed $x \neq 0$ nell'ultima).

Dimostrazione. Che r sia iniettiva è evidente, perchè se $x_1 \neq x_2$ allora $(x_1, 0) \neq (x_2, 0)$.
Per il resto, basta sporcarsi un po' le mani coi calcoli.
Abbiamo:

$$\begin{aligned} r(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2, 0) \\ &= (x_1, 0) + (x_2, 0) \\ &= r(x_1) + r(x_2) \;, \\ r(-x) &= (-x, 0) \\ &= -r(x) \;, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r(x_1 x_2) &= (x_1 x_2, 0) \\ &= (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) \\ &= r(x_1) \cdot r(x_2) \;, \\ r\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x}, 0\right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2 + 0^2}, \frac{-0}{x^2 + 0^2}\right) \\ &= (x, 0)^{-1} \\ &= \big(r(x)\big)^{-1} \;, \end{aligned}$$

come volevamo. □

Osservazione 2: L'applicazione r della Proposizione 3 consente di "identificare" algebricamente $\mathbb{R}$ con il sottoinsieme $\mathcal{R} := r(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$: pertanto, ogni numero complesso del tipo $(x, 0)$ viene semplicemente denotato col numero reale x.
Fatta tale identificazione, le Proposizioni 1 e 2 consentono di scrivere:

$$(x, y) = x + y \cdot \mathbf{i} \;;$$

il secondo membro dell'uguaglianza precedente è detta *forma algebrica* del numero complesso $z = (x, y)$, contrapposta al primo membro detto *forma cartesiana* del numero complesso $z = x + y \cdot \mathbf{i}$. ♦

Osservazione 3: L'uguaglianza di cui alla Proposizione 2 può essere riscritta come $\mathbf{i}^2 = -1$.
Essa mostra che esistono numeri complessi che elevati al quadrato forniscono numeri reali *negativi*. Proprio questo è il motivo che, storicamente, ha spinto a sviluppare la teoria della variabile complessa per "sistemare" alcune asimmetrie della teoria dei polinomi a coefficienti reali: infatti, la precedente uguaglianza mostra che $\mathbf{i}$ è soluzione dell'equazione di secondo grado $x^2 + 1 = 0$, la quale non ha alcuna soluzione in campo reale.
Più in generale, si vede facilmente che un'equazione di secondo grado a coefficienti reali $ax^2 + bx + c = 0$ con discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (che non ha soluzioni in campo reale) ha due soluzioni distinte in campo complesso: tali soluzioni sono date dalla formula risolutiva:

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, \mathbf{i}$$

(che si ricava da quella valida in campo reale ponendovi *formalmente* $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$). ♦

Osservazione 4: Osserviamo inoltre, che le potenze dell'unità immaginaria $\mathbf{i}$ si comportano in maniera *ciclica*. Infatti è:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{i}^0 = 1\,, & \mathbf{i}^1 = \mathbf{i}\,, & \mathbf{i}^2 = -1\,, & \mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}\,, \\
\mathbf{i}^4 = 1\,, & \mathbf{i}^5 = \mathbf{i}\,, & \mathbf{i}^6 = -1\,, & \mathbf{i}^7 = -\mathbf{i}\,, \\
\mathbf{i}^8 = 1\,, & \mathbf{i}^9 = \mathbf{i}\,, & \mathbf{i}^{10} = -1\,, & \mathbf{i}^{11} = -\mathbf{i}\,\ldots
\end{array}$$

cosicché le potenze di $\mathbf{i}$ ripetono i propri risultati con periodo 4. ♦

La seguente definizione introduce un po' di terminologia:

Definizione 2
Sia $z = x + y \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}$.
Il numero reale x è detto *parte reale di* z ed è denotato con $\mathrm{Re}(z)$.
Il numero complesso $y \cdot \mathbf{i}$ è detto *parte immaginaria di* z.
Il numero reale y è detto *coefficiente della parte immaginaria di* z ed è denotato con $\mathrm{Im}(z)$.
Il numero complesso $x - y \cdot \mathbf{i}$ (che si ottiene cambiando segno al coefficiente della parte immaginaria di z) si chiama *coniugato di* z e si denota con $\overline{z}$.
Si dice che z è *reale* se e solo se $\mathrm{Im}(z) = 0$.
Si dice che z è *immaginario puro* se $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Osservazione 5 (Uguaglianza tra Numeri in Forma Algebrica)**:** Osserviamo esplicitamente che due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ sono uguali se e solo se essi hanno uguali le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario, cioè se:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) \end{cases} .$$

Quando, per determinare se due numeri complessi sono uguali, si uguagliano le rispettive parti reali ed i coefficienti dell'immaginario si dice che *si separa il reale dall'immaginario.* ♦

La dimostrazione dei seguenti risultati è molto semplice ed è lasciata al lettore:

Proposizione 4
Siano $z = x + y \cdot \mathbf{i}, w = u + v \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}$.
Risulta:

(1) $z + \overline{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$*;*

(2) $z - \overline{z} = 2y \cdot \mathbf{i} = 2\,\mathrm{Re}(z) \cdot \mathbf{i}$*;*

(3) $\overline{\overline{z}} = z$*;*

(4) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ *(cosicché* $z \cdot \overline{z}$ *è reale e non negativo) e* $z \cdot \overline{z} = 0$ *se e solo se* $z = 0$*;*

(5) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *e* $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$*;*

(6) se $z \neq 0$*, allora* $z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \overline{z}} \cdot \overline{z}$*;*

(7) $z = \overline{z}$ *se e solo se* z *è reale.*

È importante osservare che la forma algebrica consente di svolgere abbastanza velocemente alcuni calcoli tra numeri complessi, poiché è possibile applicare le usuali regole del calcolo letterale, alle quali vanno aggiunte le regole per il calcolo delle potenze di $\mathbf{i}$ dell'**Osservazione 4**. Valgano i seguenti esempi:

`Esempio 1:` Calcoliamo la forma algebrica dei numeri $\frac{2}{\mathbf{i}-1}$, $(1-2\mathbf{i})\cdot(3+4\mathbf{i})$ e $(1-2\mathbf{i})^3$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\mathbf{i}-1} &= 2\cdot\frac{1}{(-1)^2+1^2}\cdot(-1-\mathbf{i})\\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1-\mathbf{i})\\
&= -1-\mathbf{i}\ ;\\
(1-2\mathbf{i})\cdot(3+4\mathbf{i}) &= (3-8\mathbf{i}^2)+(4-6)\cdot\mathbf{i}\\
&= 11-2\mathbf{i}\ ;\\
\frac{2-\mathbf{i}}{1+2\mathbf{i}} &= (2-\mathbf{i})\cdot\frac{1}{1^2+2^2}\cdot(1-2\mathbf{i})\\
&= \frac{1}{5}\cdot(2-\mathbf{i})\cdot(1-2\mathbf{i})\\
&= \frac{1}{5}\cdot\big(2+2\mathbf{i}^2-(4+1)\mathbf{i}\big)\\
&= \frac{1}{5}\cdot(-5\mathbf{i})\\
&= -\mathbf{i}\\
(1-2\mathbf{i})^3 &= 1-6\mathbf{i}+12\mathbf{i}^2-8\mathbf{i}^3\\
&= (1-12)+(8-6)\mathbf{i}\\
&= -11+2\mathbf{i}\ .
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

`Esempio 2:` Vogliamo esprimere in forma algebrica il numero:

$$z=\frac{(3-\sqrt{3}\mathbf{i})^2\cdot(2\mathbf{i})-(\sqrt{3}+3\mathbf{i})}{-6+6\mathbf{i}}\ .$$

Applicando le usuali regole di calcolo letterale e quanto acquisito ora, abbiamo:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(9+3\mathbf{i}^2-6\sqrt{3}\mathbf{i})\cdot(2\mathbf{i})-\sqrt{3}-3\mathbf{i}}{-6+6\mathbf{i}}\\
&= \Big[(9-3-6\sqrt{3}\mathbf{i})\cdot(2\mathbf{i})-\sqrt{3}-3\mathbf{i}\Big]\cdot(-6+6\mathbf{i})^{-1}\\
&= \Big[(6-6\sqrt{3}\mathbf{i})\cdot(2\mathbf{i})-\sqrt{3}-3\mathbf{i}\Big]\cdot\frac{1}{(-6)^2+6^2}\cdot(-6-6\mathbf{i})\\
&= \Big[12\mathbf{i}-12\sqrt{3}\mathbf{i}^2-\sqrt{3}-3\mathbf{i}\Big]\cdot\frac{1}{72}\cdot(-6-6\mathbf{i})\\
&= \Big[12\mathbf{i}+12\sqrt{3}-\sqrt{3}-3\mathbf{i}\Big]\cdot\frac{1}{12}\cdot(-1-\mathbf{i})\\
&= (11\sqrt{3}+9\mathbf{i})\cdot\frac{1}{12}\cdot(-1-\mathbf{i})\\
&= \frac{(9-11\sqrt{3}}{12}-\frac{9+11\sqrt{3}}{12}\mathbf{i}\ .
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Osservazione 6: Non è così semplice, invece, calcolare in forma algebrica $(3 - \sqrt{3}\mathbf{i})^{10}$ o potenze con esponente elevato. ♦

2. Modulo, Argomenti e Forma Trigonometrica

La seguente definizione è fondamentale:

Definizione 3 (Modulo di un numero complesso)
Sia $z = x + y \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C}$.
Si chiama *modulo di z* il numero reale:

$$|z| \stackrel{\text{DEF}}{=} \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{3}$$

e da essa conseguono le proprietà del modulo riportate qui di seguito:

Proposizione 5
Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Risulta:

(1) $|z| \geq 0$ *e* $|z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$*;*

(2) $|\overline{z}| = |z|$*;*

(3) $\big|z_1 \cdot z_2\big| = |z_1|\ |z_2|$*;*

(4) $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$*;*

(5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(disuguaglianza triangolare);*

(6) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ *(disuguaglianza triangolare inversa);*

(7) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ *(identità del parallelogramma);*

(8) se $z \neq 0$*, allora* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$*;*

(9) se $z_2 \neq 0$*, allora* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$*;*

(10) per ogni $n \in \mathbb{Z}$*,* $|z^n| = |z|^n$*;*

(11) se z è reale, allora $|z| = |\,\mathrm{Re}(z)|$*;*

(12) se z è immaginario puro, allora $|z| = |\,\mathrm{Im}(z)|$*.*

La dimostrazione è molto semplice ed è lasciata al lettore.

Osservazione 7 (Interpretazione Geometrica)**:** Il modulo di z coincide con la lunghezza del segmento che congiunge i punti z e 0 del piano di Argand – Gauss; in altre parole, $|z|$ rappresenta la distanza di z dall'origine.
Data tale interpretazione geometrica, considerazioni trigonometriche elementari implicano che l'uguaglianza $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$ è una riformulazione del *Teorema del Coseno*.
Analogamente, l'*identità del parallelogramma* corrisponde alla relazione che intercorre tra i quadrati di lati e diagonali in un parallelogramma. ♦

Fissato un numero $z = x + y \cdot \mathbf{i} \in \mathbb{C} - \{0\}$ e posto $\rho = |z|$, per evidenti motivi geometrici esiste un *unico* angolo orientato $\vartheta \in]-\pi, \pi]$ che soddisfa il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

(infatti, tale ϑ è l'angolo orientato formato con il semiasse reale positivo dalla semiretta uscente da 0 e passante per z); ciò rende lecita la seguente:

DEFINIZIONE 4 (Argomenti di un numero complesso)
Sia $z \in \mathbb{C} \neq \{0\}$.
L'unico $\vartheta \in]-\pi, \pi]$ tale che:

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{4}$$

si chiama *argomento principale di* z e si denota con $\operatorname{Arg}(z)$.
Ogni numero del tipo $\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), il quale soddisfa ancora le (4), si chiama *argomento di* z e si denota con $\arg(z)$.

Osservazione 8 (Importante!)**:** L'unico numero complesso del quale non è possibile determinare l'argomento è $z = 0$. ♦

Osservazione 9: Le equazioni (3) & (4) consentono di determinare il modulo ρ e gli argomenti ϑ di ogni numero complesso $z \neq 0$.
Tali relazioni si possono invertire e consentono di ricostruire un numero complesso z a partire dal suo modulo ρ e da un qualsiasi suo argomento ϑ: infatti, invertendo le (4) si trova:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta\ . \end{cases} \tag{5}$$

Quindi, l'unico numero ad avere modulo ρ ed argomento ϑ è il numero:

$$z = \rho\big(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta\big)\ ;$$

il secondo membro della precedente si chiama *forma trigonometrica di* z e le equazioni (3) & (4) si chiamano formule di passaggio da forma algebrica $z = x + y \cdot \mathbf{i}$ a forma trigonometrica; viceversa, le (5) sono le formule di passaggio dalla forma trigonometrica alla forma algebrica. ♦

Osservazione 10 (Uguaglianza di Numeri in Forma Trigonometrica)**:** Non è difficile rendersi conto che due numeri $z, w \in \mathbb{C}$ sono uguali se e solo se essi hanno lo stesso modulo ed argomenti che differiscono per un multiplo intero di 2π (o uguale argomento principale), cioè che risulta $z = w$ se e solo se:

$$\begin{cases} |z| = |w| \\ \arg(z) - \arg(w) = 2k\pi \ \text{(con } k \in \mathbb{Z}\text{) oppure } \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w) \end{cases} .$$

♢

L'argomento principale gode delle seguenti proprietà, la cui dimostrazione è lasciata al lettore:

PROPOSIZIONE 6 (Proprietà dell'Argomento Principale)
Sia $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Risulta:

(1) $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$*;*

(2) $\mathrm{Arg}(z) = 0$ *se e solo se* z *è reale positivo;*

(3) $\mathrm{Arg}(z) = \pi$ *se e solo se* z *è reale negativo;*

(4) $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ *se e solo se* z *è imaginario puro con coefficiente positivo;*

(5) $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$ *se e solo se* z *è imaginario puro con coefficiente negativo;*

(6) $\mathrm{Arg}(z) = \pm\frac{\pi}{4}$ *se e solo se* $\mathrm{Re}(z) = \pm\,\mathrm{Im}(z)$.

Gli argomenti, in generale, godono delle seguenti ottime proprietà algebriche:

Proposizione 7 (Proprietà degli Argomenti)
Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$.
Valgono i seguenti fatti:

(1) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$*;*

(2) $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$*;*

(3) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$*;*

(4) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$*;*

(5) $\arg(z^n) = n\arg(z)$ *(con* $n \in \mathbb{Z}$*).*

Dimostrazione. Proviamo la *(1)*. Se ρ, ϑ sono il modulo ed un argomento di z, per la parità e la disparità di coseno e seno si ha:

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(z) = \rho\cos\vartheta \\ \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\vartheta\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\mathrm{Re}(\overline{z}) = \rho\cos\vartheta = \rho\cos(-\vartheta) \\ \mathrm{Im}(\overline{z}) = -\rho\sin\vartheta = \rho\sin(-\vartheta)\end{cases}$$

dunque $\arg(\overline{z}) = -\vartheta = -\arg(z)$. In maniera del tutto analoga si prova la *(2)*.
Proviamo la *(3)*. Detti ρ_1, ϑ_1 e ρ_2, ϑ_2 i moduli e gli argomenti di z_1 e z_2, per le formule di addizione di seno e coseno troviamo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1 + \mathbf{i}\ \sin\vartheta_1)\cdot(\cos\vartheta_2 + \mathbf{i}\ \sin\vartheta_2) \\ &= \rho_1\rho_2 \cdot \big((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) \\ &\qquad + \mathbf{i}(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)\big) \\ &= \rho_1\rho_2 \cdot \big(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + \mathbf{i}\ \sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\big) \end{aligned}$$

dunque $\arg(z_1 \cdot z_2) = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. In maniera del tutto analoga si prova la *(4)*.
Proviamo la *(5)*. Chiamiamo ρ, ϑ modulo ed argomento di z e cominciamo provando che l'uguaglianza vale per $n \in \mathbb{N}$.
Chiaramente essa è vera per $n = 0, 1$: ciò è una buona *base per l'induzione.*
Supponendo vera la cosa per n, proviamo che vale anche per $n + 1$. Abbiamo

$z^{n+1} = z^n \cdot z$, dunque per *(3)* risulta:

$$\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n) + \arg(z) = n \arg(z) + \arg(z) = (n+1)\arg(z) \ ,$$

come volevamo.
Se $n \in \mathbb{Z}$ è negativo, allora per definizione si ha $z^n = (z^{-1})^{-n}$, cosicché:

$$\arg(z^n) = \arg\left((z^{-1})^{-n}\right) = -n \arg(z^{-1}) = -n\big(-\arg(z)\big) = n \arg(z) \ ,$$

come chiedevamo. □

Dalle precedenti proprietà dei moduli e degli argomenti seguono banalmente le regole di calcolo in forma trigonometrica riportate di seguito.
Detti z_1, z_2 due numeri complessi non nulli e $\rho_1, \vartheta_1,\ \rho_2, \vartheta_2$ i loro moduli ed i loro argomenti, abbiamo che:

- il prodotto $z_1 \cdot z_2$ è il numero complesso che ha modulo $\rho_1\rho_2$ ed argomento $\vartheta_1 + \vartheta_2$;
- il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$ è il numero complesso che ha modulo $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ ed argomento $\vartheta_1 - \vartheta_2$;
- la potenza z_1^n (con $n \in \mathbb{Z}$) è il numero complesso che ha modulo ρ_1^n ed argomento $n\vartheta_1$.

`Esempio 3:` Per calcolare il numero $(3 - \sqrt{3}\mathbf{i})^{10}$ procediamo come segue.
Innanzitutto, determiniamo il modulo e l'argomento principale della base: abbiamo:

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

e l'argomento principale è l'unica soluzione in $]-\pi, \pi]$ del sistema:

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \sin\vartheta = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\vartheta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

cioè $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$. Poi sfruttiamo le regole di calcolo per ottenere il numero che ci interessa in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} (3 - \sqrt{3}\mathbf{i})^{10} &= (2\sqrt{3})^{10} \ \left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\ \sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^{10}3^5\ \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\ \sin\frac{2\pi}{3}\right) \ . \end{aligned}$$

Volendo esprimere il risultato in forma algebrica basta calcolare il coseno ed il seno che figurano in parentesi e svolgere il prodotto. ♢

`Esempio 4:` Calcoliamo:

$$z = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}\mathbf{i})^7 \cdot (\sqrt{3} - \mathbf{i})^5}{(\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2})^{12}} \ .$$

Innanzitutto, calcoliamo modulo ed argomento principale delle basi delle potenze:

$$\begin{aligned} z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}\mathbf{i} \quad &\Rightarrow \quad \rho_1 = 2\sqrt{2}\ , \vartheta_1 = \frac{\pi}{3} \\ z_2 = \sqrt{3} - \mathbf{i} \quad &\Rightarrow \quad \rho_2 = 2\ , \vartheta_2 = -\frac{\pi}{6} \\ z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{6}\mathbf{i} \quad &\Rightarrow \quad \rho_3 = 2\ , \vartheta_3 = \frac{3\pi}{4}\ . \end{aligned}$$

Poi sfruttiamo le regole di calcolo per determinare modulo ed argomento di z, facendo attenzione ad eliminare dal calcolo "inutili" multipli interi di 2π:

$$\begin{aligned}
|z| &= \frac{\rho_1^7 \rho_2^5}{\rho_3^{12}} \\
&= \frac{2^7 \sqrt{2}^7 2^5}{2^{12}} \\
&= 2^3 \sqrt{2} \\
\arg(z) &= 7\vartheta_1 + 5\vartheta_2 - 12\vartheta_3 \\
&= \frac{7\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} - 12\frac{3\pi}{4} \\
&\equiv_{2\pi} \frac{7\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} + \pi \\
&= \frac{15\pi}{6} \\
&\equiv_{2\pi} \frac{\pi}{2} \; .
\end{aligned}$$

Infine, scriviamo z in forma trigonometrica ed in forma algebrica (se possibile):

$$\begin{aligned}
z &= 8\sqrt{2} \, \left(\cos \frac{\pi}{2} + \mathbf{i} \, \sin \frac{\pi}{2} \right) \\
&= 8\sqrt{2} \, \mathbf{i} \; .
\end{aligned}$$

♢

Come già detto nell'Introduzione, altri esercizi sono reperibili in [DM1].

Osservazione 11 (Forma Esponenziale)**:** Formalmente parlando, i prodotti di numeri complessi si trasformano in prodotti di moduli e somme di argomenti, mentre i quozienti di numeri complessi si trasformano in quozienti di moduli e differenze di argomenti.
Questo comportamento è del tutto analogo a quello del calcolo letterale tra monomi: infatti, ad esempio, si ha:

$$\frac{\rho_1 X^{\vartheta_1}}{\rho_2 X^{\vartheta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} X^{\vartheta_1 - \vartheta_2} \; .$$

Tale analogia, suffragata da legami molto più profondi[3], ha portato a sviluppare la seguente notazione:

$$z = \rho \; \mathbf{e}^{\mathbf{i}\vartheta}$$

in cui al secondo membro ρ e ϑ sono, rispettivamente, il modulo ed un argomento di z. Il secondo membro della precedente viene detto *forma esponenziale del numero complesso* z.
Si noti che la forma esponenziale è del tutto analoga alla forma trigonometrica, l'unica differenza coinsistendo nel simbolo $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\vartheta}$ che rimpiazza $\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta$; pertanto, il simbolo $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\vartheta}$ si può *definire* proprio mediante questa proprietà, i.e. si pone:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\vartheta} \overset{\text{DEF}}{=} \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta$$

per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$. ♦

Osservazione 12: In particolare, prendendo $\vartheta = \pi$ otteniamo:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -1 \; ;$$

[3] Che diverranno evidenti studiando la teoria delle funzioni di variabile complessa.

tale uguaglianza, detta *formula di Eulero*[4], lega tre importanti costanti matematiche $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$ e π. ♦

Osservazione 13 (Formula di de Moivre[5])**:** Le regole di calcolo implicano:

$$(\cos\vartheta + \mathbf{i}\ \sin\vartheta)^n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\vartheta} = \cos(n\vartheta) + \mathbf{i}\ \sin(n\vartheta)$$

per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{Z}$.
L'uguaglianza:

$$(\cos\vartheta + \mathbf{i}\ \sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + \mathbf{i}\ \sin(n\vartheta)$$

è nota come *formula di de Moivre*.
Essa è importante poiché consente di ricavare formule trigonometriche sfruttando le regole di calcolo in campo complesso. ♦

3. Estrazione di Radice in Campo Complesso *

Abbiamo visto che in campo reale un teorema assicura che, comunque venga scelto $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, in corrispondenza di ogni numero $x \geq 0$ esiste un unico numero $y \geq 0$ tale che $y^N = x$; tale y è detto *radice N-esima di x* e si denota con $\sqrt[N]{x}$.
Abbiamo altresì osservato che, nel caso d'indice N pari, anche il numero $-\sqrt[N]{x}$ fornisce x se elevato alla potenza d'esponente N; inoltre, che se $x < 0$ il teorema fallisce per N pari, mentre continua a sussistere per N dispari con $y = -\sqrt[N]{-x} < 0$.
In campo complesso la situazione è ben diversa e la sua comprensione getta nuova luce sui fenomeni appena richiamati relativi al campo reale.

Fondamentale è il seguente:

Teorema 2 (Esistenza delle Radici N-esime)
Sia $N \in \mathbb{N} - \{0\}$.
Per ogni $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ esistono esattamente N numeri $\zeta_0, \ldots, \zeta_{N-1} \in \mathbb{C} - \{0\}$ tali che $\zeta_k^N = z$ per ogni $k = 0, \ldots, N-1$.

Dimostrazione. L'asserto diventa banale per $N = 1$, poiché in tal caso basta prendere $\zeta_0 = z$. Quindi ragioniamo con $N \geq 2$.
Dividiamo la dimostrazione in due parti.

Esistenza. Mostriamo che, per fissato $z \neq 0$, esistono dei numeri $\zeta \in \mathbb{C} - \{0\}$ tali che $\zeta^N = z$.
Detti ρ e ϑ il modulo e un argomento di z, indichiamo con r e φ il modulo e un argomento del numero incognito ζ; per quanto mostrato in precedenza ζ^N ha modulo r^N ed argomento $N\varphi$ e dunque si ha $\zeta^N = z$ se e solo se:

$$\begin{cases} r^N = \rho \\ N\varphi - \vartheta = 2k\pi \text{ (con } k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt[N]{\rho} \\ \varphi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{N} \text{ (con } k \in \mathbb{Z}) \end{cases} .$$

Ne consegue che ogni numero ζ_k con $k \in \mathbb{Z}$ avente modulo $\sqrt[N]{\rho}$ ed argomento $\varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{N}$ gode della proprietà $\zeta_k^N = z$.

Esistenza di solo N numeri tali che $\zeta^N = z$. Da quanto detto in precedenza discende che tutti i (potenzialmente infiniti) numeri del tipo ζ_k con $k \in \mathbb{Z}$ soddisfano la tesi del teorema. Ora mostriamo che tali numeri in realtà non sono infiniti, ma si

[4]Leonhard Euler (1707 – 1783), matematico, fisico, astronomo, logico ed ingegnere svizzero.

[5]Abraham de Moivre (1667 – 1754), matematico francese emigrato in Gran Bretagna durante la persecuzione degli ugonotti. Studioso di Probabilità e Calcolo Infinitesimale, scoprì l'approssimazione del fattoriale detta *formula di Stirling*.

ripetono in maniera ciclica di N in N.
Consideriamo due generici numeri ζ_h e ζ_k con $h,k \in \mathbb{Z}$, entrambi con lo stesso modulo $\sqrt[N]{\rho}$ ed aventi, rispettivamente, argomenti $\varphi_h = \frac{\vartheta+2h\pi}{N}$ e $\varphi_k = \frac{\vartheta+2k\pi}{N}$. Tali numeri sono uguali tra loro se e solo se i rispettivi argomenti φ_h e φ_k differiscono per un multiplo intero di 2π: dato che:

$$\varphi_h - \varphi_k = \varphi_k = \frac{2(h-k)\pi}{N} = 2\frac{h-k}{N}\pi \; ,$$

risulta $\zeta_h = \zeta_k$ se e solo se $h-k$ è divisibile per N, cioè se esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$h = qN + k \; .$$

Vista l'arbitrarietà nella scelta di k, possiamo scegliere di far variare tale indice tra tutti i possibili resti della divisione per N, cioè possiamo prendere $k = 0, 1, \ldots, N-1$: in tal modo, per la validità dell'algoritmo della divisione, otteniamo che per ogni $h \in \mathbb{Z}$ esiste un unico $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ tale che $\zeta_h = \zeta_k$.
Ciò mostra che i numeri del tipo ζ_k sono in numero finito e coincidono ciclicamente con i numeri $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{N-1}$ (i quali sono tutti distinti tra loro). □

Osservazione 14: Se $z = 0$ il TEOREMA 2 cessa di esser valido.
Invero, la parte legata alla esistenza rimane valida (poiché basta prendere $\zeta = 0$ per ottenere $\zeta^N = 0$); ciò che viene irrimediabilmente perduto è l'esistenza di N numeri distinti che soddisfino $\zeta^N = 0$, poiché $\zeta = 0$ è l'unico numero che gode di tale proprietà (per la *Legge di Annullamento del Prodotto*). ♦

Tale teorema motiva la seguente:

DEFINIZIONE 5 (Radici N-esime Complesse)
Fissati $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, gli N numeri $\zeta_0, \ldots, \zeta_{N-1} \in \mathbb{C}$ la cui esistenza ed unicità sono garantite dal TEOREMA 2 si chiamano *radici N-esime complesse di z*.

Osservazione 15: Le due radici quadrate di $z \neq 0$ hanno argomenti che differiscono per π, dunque esse sono opposte.
Più in generale, se N è pari, le radici N-esime di z sono opposte a due a due e coniugate a due a due. ♦

Osservazione 16 (Rappresentazione Geometrica delle Radici)**:** Le N radici N-esime di z hanno tutte lo stesso modulo (cioè $\sqrt[N]{|z|}$), cosicché esse appartengono tutte alla circonferenza con centro in 0 e raggio $r = \sqrt[N]{|z|}$.
Inoltre, i loro argomenti $\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1}$ sono *equispaziati*, nel senso che risulta:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = \cdots = \varphi_{N-1} - \varphi_{N-2} = \frac{2\pi}{N} \; .$$

Conseguentemente, se $N \geq 3$, le radici formano i vertici di un poligono regolare di N lati inscritto nella circonferenza di raggio r, il primo vertice del quale è ζ_0; mentre se $N = 2$, le radici sono gli estremi di un diametro di tale circonferenza. ♦

Osservazione 17: Se z è reale positivo, allora almeno una sua radice complessa lo è.
Infatti, in tal caso z ha argomento principale $\vartheta = 0$ e dunque le sue radici N-esime hanno argomenti:

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{N} \text{ con } k = 0, \ldots, N-1 \; ;$$

conseguentemente ζ_0 ha argomento $\varphi_0 = 0$ (perciò è reale positiva) e coincide con la radice reale $\sqrt[N]{z}$.
Quindi le radici N-esime complesse sono una generalizzazione al campo complesso della radice N-esima reale. ♦

Osservazione 18: Se z è reale positivo ed N è pari, la radice $\zeta_{N/2}$ ha argomento $\varphi_{N/2} = \pi$ (perciò è reale negativa) ed è uguale a $-\sqrt[N]{z}$.
D'altra parte, se z è reale negativo, esso ha argomento principale $\vartheta = \pi$ e quindi le sue radici hanno argomenti:

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{N} \ ;$$

ora, se N è pari, nessun argomento φ_k è uguale a 0 o π, dunque nessuna radice ζ_k è reale, mentre se N è dispari, la radice $\zeta_{(N-1)/2}$ ha argomento $\varphi_{(N-1)/2} = \pi$ (dunque è reale negativa) e coincide con $\sqrt[N]{|z|}(\cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi) = -\sqrt[N]{-z}$ che è l'unico numero reale negativo che elevato alla N fornisce z. ♦

Osservazione 19: La rappresentazione geometrica delle radici N-esime ci aiuta a comprendere meglio quel che accade nel campo reale.
Se $N = 2$ e z è reale positivo, i punti ζ_0 e ζ_1 sono gli estremi del diametro della circonferenza di raggio $r = \sqrt{z}$ che giace sull'asse reale; mentre se z è negativo i punti ζ_0 e ζ_1 sono gli estremi del diametro della circonferenza di raggio $r = \sqrt{z}$ che giace sull'asse immaginario.
Se $N > 2$ è pari e z è reale positivo, i vertici ζ_0 e $\zeta_{N/2}$ dello N-gono regolare individuato dalle radici di z sono gli unici a cadere sull'asse reale; mentre se z è negativo, nessuno dei vertici dello N-gono regolare individuato dalle radici di z cade sull'asse reale.
Infine, se $N > 2$ è dispari, per ogni z reale non nullo, c'è un unico vertice dello N-gono regolare individuato dalle radici complesse di z che cade sull'asse reale.
Pertanto, l'esistenza di una, nessuna o più "radici" N-esime nel caso reale è conseguenza della *geometria delle radici N-esime complesse.* ♦

Dalla dimostrazione del TEOREMA 2 segue una semplice regola di calcolo per determinare le radici N-esime complesse in forma trigonometrica.
Scelto un numero complesso $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ e detti ρ il suo modulo e ϑ un suo argomento, abbiamo:

- le radici N-esime complesse di z sono i numeri ζ_k che hanno modulo $\sqrt[N]{\rho}$ ed argomenti $\varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{N}$ con $k = 0, \ldots, N-1$.

Valgano in proposito i seguenti esempi:

`Esempio 5:` Calcoliamo le radici terze complesse di 1.
Dato che 1 ha modulo $\rho = 1$ ed argomento principale $\vartheta = 0$, le radici terze hanno modulo $r = \sqrt[3]{1} = 1$ ed argomenti $\varphi_k = \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$; pertanto, esse sono:

$$\begin{aligned}
&\zeta_0 = 1 \ , \\
&\zeta_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\ \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \ , \\
&\zeta_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathbf{i}\ \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \ .
\end{aligned}$$

♢

`Esempio 6:` Calcoliamo le radici quarte di $\mathbf{i}$. Dato che $\mathbf{i}$ ha modulo $\rho = 1$ ed argomento principale $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, le radici quarte hanno modulo $r = \sqrt[4]{1} = 1$ ed argomenti $\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} = \frac{(4k+1)\pi}{8}$ con $k = 0, 1, 2, 3$; pertanto, esse sono:

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \cos\frac{\pi}{8} + \mathbf{i}\ \sin\frac{\pi}{8}\ ,\\
\zeta_1 &= \cos\frac{5\pi}{8} + \mathbf{i}\ \sin\frac{5\pi}{8}\ ,\\
\zeta_2 &= \cos\frac{9\pi}{8} + \mathbf{i}\ \sin\frac{9\pi}{8}\ ,\\
\zeta_3 &= \cos\frac{13\pi}{8} + \mathbf{i}\ \sin\frac{13\pi}{8}\ .
\end{aligned}$$

♢

`Esempio 7:` Calcoliamo le radici seste di -8.
Dato che -8 ha modulo $\rho = 8$ ed argomento principale $\vartheta = \pi$, le radici seste hanno modulo $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ ed argomenti $\varphi_k = \frac{\pi+2k\pi}{6} = \frac{(2k+1)\pi}{6}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; pertanto, esse sono:

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\ \sin\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i}\ ,\\
\zeta_1 &= \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\ \sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sqrt{2}\ \mathbf{i}\ ,\\
\zeta_2 &= \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathbf{i}\ \sin\frac{5\pi}{6}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i}\ ,\\
\zeta_3 &= \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathbf{i}\ \sin\frac{7\pi}{6}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i}\ ,\\
\zeta_4 &= \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathbf{i}\ \sin\frac{3\pi}{2}\right)\\
&= -\sqrt{2}\ \mathbf{i}\ ,\\
\zeta_5 &= \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathbf{i}\ \sin\frac{11\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i}\ .
\end{aligned}$$

♢

Appendice A. Il Campo Complesso non è Totalmente Ordinabile Compatibilmente con la Struttura Algebrica

Una differenza fondamentale tra il campo reale $\mathbb{R}$ ed il campo complesso $\mathbb{C}$ è quella espressa nella seguente:

Proposizione 8
Non esiste alcuna relazione d'ordine in $\mathbb{C}$ che goda delle proprietà del **Gruppo 2**.

Osservazione 20: Ricordiamo che le proprietà del **Gruppo 2** (Assiomi dell'Ordine) sono le seguenti:

(O.1) per ogni $x, y \in \mathbb{C}$ o si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$

(O.2) per ogni $x, y, z \in \mathbb{C}$, $\quad x \leq y \;\Rightarrow\; x + z \leq y + z$

(O.3) per ogni $x, y, z \in \mathbb{C}$, $\quad x \leq y$ e $0 \leq z \;\Rightarrow\; x \cdot z \leq y \cdot z$.

La prima esprime la *totalità* della relazione d'ordine $\leq$ (i.e., tutti gli elementi di $\mathbb{C}$ sono a due a due confrontabili); le seconde esprimono la *compatibilità con le operazioni.*
Definita al solito modo la relazione d'ordine stretto $<$, dalla totalità di $\leq$ segue il *Principio di Tricotomia.* ♦

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista una relazione d'ordine $\leq$ definita in $\mathbb{C}$ che goda delle proprietà (O.1) – (O.3).
In tale ipotesi, varrebbero in $\mathbb{C}$ tutte le usuali regole di calcolo con le disuguaglianze, ivi comprese quelle dimostrate in [DM2, § 2]: in particolare, i quadrati dei numeri complessi diversi da 0 sarebbero positivi.
Conseguentemente, avremmo $0 < 1$, poiché $1 = 1^2$; d'altra parte, sarebbe $0 < -1$, in quanto $-1 = \mathbf{i}^2$ per la Proposizione 2, da cui $1 < 0$.
Ma ciò è assurdo, in quanto contrasta palesemente col Principio di Tricotomia. □

Osservazione 21: È bene notare che la Proposizione 8 non dice che è *impossibile* ordinare $\mathbb{C}$, ma solo che ciò non può esser fatto conservando tutte le proprietà formali che valgono in $\mathbb{R}$. In particolare, ordinando $\mathbb{C}$ non si possono tenere insieme la totalità della relazione d'ordine (O.1) (cioé il Principio di Tricotomia) e la compatibilità con entrambe le operazioni.
Per lumeggiare tale circostanza, notiamo che la relazione $\preceq$ definita ponendo:

$$x_1 + y_1 \cdot \mathbf{i} \preceq x_2 + y_2 \cdot \mathbf{i} \quad \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \quad x_1 < x_2 \text{ oppure } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq y_2$$

(in cui il simbolo $\leq$ denota l'usuale relazione d'ordine in $\mathbb{R}$) è una relazione d'ordine in $\mathbb{C}$, detta *ordinamento lessicografico*[6], la quale è totale, è compatibile con la somma ma non è compatibile col prodotto, poiché $0 \preceq \mathbf{i}$ e però $\mathbf{i}^2 = -1 \preceq 0$. ♦

Riferimenti bibliografici

[DM1] Di Meglio, G. (2017) *Qualche Esercizio sui Numeri Complessi* [reperibile su www.docenti.unina.it].

[DM2] Di Meglio, G. (2017) *Sulle Regole di Calcolo in* $\mathbb{R}$ [reperibile su www.docenti.unina.it].

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: guglielmo.dimeglio@unina.it

[6]Tale nome si spiega tenendo presente che tale relazione è del tutto equivalente a quella usata per ordinare i vocaboli nei dizionari (in cui una parola precede un'altra se la prima lettera della prima parola precede in ordine alfabetico la prima lettera della seconda, oppure se, a parità delle n lettere iniziali, la $n+1$-esima lettera della prima parola precede in ordine alfabetico la $n+1$-esima lettera della seconda parola).