COMPLEMENTI SULLE SERIE NUMERICHE

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione

Le presenti note sono proposte come integrazione ed approfondimento degli argomenti trattati a lezione.
Il primo paragrafo ripropone, con qualche aggiunta, gli esempi di serie notevoli menzionati a lezione.
Il secondo contiene alcune dimostrazioni della divergenza della serie armonica[1].
Il terzo contiene le dimostrazioni dei criteri di convergenza per le serie a termini non negativi proposti a lezione.
Nel quarto vengono proposti il classico *Criterio di Leibniz* per le serie a segni alterni ed il *Criterio di Dirichlet*.

Avvertenza: Alcuni paragrafi sono contrassegnati con l'asterisco e, come si è soliti scrivere in queste occasioni, possono essere omessi in prima lettura senza pregiudicare la comprensione del testo.

1. Definizioni ed Esempi Notevoli

Ricordiamo innanzitutto le definizioni fondamentali:

Date: 28 dicembre 2017.
[1]Tutte proposte a lezione, ad anni alterni.

Definizione 1
Sia (a_n) una successione numerica.
La successione (s_n) di termine generale:

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

viene detta *serie numerica* e i numeri a_n si chiamano *addendi della serie*.
La serie (s_n) con addendi a_n viene denotata indifferentemente con uno dei simboli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{oppure} \qquad \sum a_n \ .$$

Definizione 2 (Carattere di una Serie)
Sia $\sum a_n$ una serie numerica.
Si dice che:

(i) $\sum a_n$ è *convergente* se e solo se (s_n) è una successione convergente;

(ii) $\sum a_n$ è *positivamente divergente* se e solo se (s_n) è una successione positivamente divergente;

(iii) $\sum a_n$ è *negativamente divergente* se e solo se (s_n) è una successione negativamente divergente;

(iv) $\sum a_n$ è *indeterminata* se e solo se (s_n) è una successione non regolare.

Nei casi (i) – (iii) il valore $\lim_{n\to\infty} s_n \in \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si chiama *somma della serie* $\sum a_n$ e si denota sempre col simbolo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Illustriamo ora alcuni esempi fondamentali per la teoria.

1.1. **Serie con Addendi Costanti.** Consideriamo una serie numerica i cui addendi formino una successione costante.
Detto $a \in \mathbb{R}$ il comune valore di tutti gli addendi a_n, ci proponiamo di studiare la convergenza della serie con addendi costanti $\sum a$.
Scegliendo di denotare come al solito con s_n le somme parziali della serie, abbiamo:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + +a_2 + \cdots + a_n \\ &= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ volte}} \\ &= n\ a \end{aligned}$$

cosicché:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} na = \begin{cases} +\infty & \text{, se } a > 0 \\ 0 & \text{, se } a = 0 \\ -\infty & \text{, se } a < 0 \ . \end{cases}$$

Possiamo perciò concludere che una serie con addendi costanti è:

positivamente divergente: se e solo se gli addendi sono positivi;

convergente ed ha somma 0: se e solo se gli addendi sono tutti nulli[2];

negativamente divergente: se e solo se gli addendi sono negativi.

Osservazione 1: Notiamo che gli addendi di una serie del tipo $\sum a$ formano una *progressione aritmetica*[3]. Pertanto, più in generale, ci possiamo porre il problema di studiare il carattere di una serie che ha gli addendi in progressione aritmetica, cioè addendi del tipo $a_n = a + (n-1)d$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \big(a + (k-1)d\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a-d) + kd \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a-d) + d \cdot \sum_{k=1}^{n} k \\ &= (a-d) \cdot n + d\frac{n(n+1)}{2} \\ &= an + d\frac{n(n-1)}{2} \quad , \end{aligned}$$

pertanto la serie $\sum a + (n-1)d$:

converge ed ha somma 0: se e solo se $a = d = 0$;

diverge positivamente: se e solo se $d > 0$ oppure $a > 0$ e $d = 0$;

diverge negativamente: se e solo se $d < 0$ oppure $a < 0$ e $d = 0$.

♦

1.2. **Serie Telescopica.** Fissata una successione (x_n), consideriamo la serie con addendi $a_n = x_{n+1} - x_n$, cioé la serie $\sum x_{n+1} - x_n$, la quale è usualmente detta *serie telescopica di* (x_n).
Notato che:

$$\begin{aligned} s_n &= (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n) \\ &= -x_1 + \underbrace{(x_2 - x_2)}_{=0} + \underbrace{(x_3 - x_3)}_{=0} + \underbrace{(x_4 - x_4)}_{=0} + \cdots + \underbrace{(x_{n-1} - x_{n-1})}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{(x_n - x_n)}_{=0} + x_{n+1} \\ &= x_{n+1} - x_1 \end{aligned}$$

è molto semplice stabilire che la successione delle somme parziali s_n è regolare se e solo se tale è la successione degli x_n. Pertanto la serie telescopica $\sum x_{n+1} - x_n$ è:

[2]In tal caso, si parla di *serie nulla*.

[3]Ricordiamo che una successione (a_n) è detta *progressione aritmetica di ragione* $d \in \mathbb{R}$ *e primo termine* $a \in \mathbb{R}$ se e solo se $a_1 = a$ e $a_{n+1} = a_n + d$ per ogni indice n. Si dimostra facilmente per induzione che vale la formula $a_n = a + (n-1)d$.

convergente: se e solo se (x_n) è convergente, ed in tal caso la somma della serie è $s = \lim_{n\to+\infty} x_n - x_1$;

positivamente divergente: se e solo se (x_n) è positivamente divergente;

negativamente divergente: se e solo se (x_n) è negativamente divergente;

indeterminata: se e solo se (x_n) non è regolare.

Osservazione 2: Le stesse conclusioni valgono per serie telescopiche tipo $\sum x_n - x_{n+1}$.
Infatti, in tal caso le somme parziali sono date da:

$$s_n = x_1 - x_{n+1}$$

cosicché il carattere della serie $\sum x_n - x_{n+1}$ dipende dal carattere della successione (x_n). In particolare, nel caso di regolarità, la somma è $s = x_1 - \lim_{n\to+\infty} x_n$. ♦

1.3. **Serie Geometrica.** Fissato un numero reale q, la serie con addendi $a_n = q^{n-1}$ si chiama *serie geometrica di ragione q*.
Evidentemente, se $q = 1$, la serie geometrica si riduce ad una serie con addendi costanti positivi, e perciò diverge.
Se, invece, $q = 0$, facendo la convenzione[4] $a_1 = 1$, la somma parziale n-esima della serie è:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ volte}} = 1\ ,$$

perciò la serie converge ed ha somma $s = 1$.
Se $q \neq 0, 1$, possiamo ricavare l'espressione della somma parziale n-esima della serie ragionando come segue: abbiamo:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= \quad\ q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n \end{aligned}$$

e sottraendo le due uguaglianze membro a membro troviamo $(1 - q) \cdot s_n = 1 - q^n$, da cui:

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}\ .$$

Poiché il comportamento della successione esponenziale q^n è noto, dall'espressione appena ottenuta per le somme parziali possiamo trarre le seguenti conclusioni: la serie geometrica di ragione q è:

convergente: se e solo se $-1 < q < 1$, ed in tal caso la somma è $s = \frac{1}{1-q}$;

positivamente divergente: se e solo se $q \geq 1$;

non regolare: se e solo se $q \leq -1$.

Più precisamente, se $q = -1$ le somme parziali della serie geometrica $\sum (-1)^{n-1}$ sono date da:

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{, se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

[4]Ricordiamo che, nella costruzione delle funzioni elementari, abbiamo convenuto di non attribuire alcun significato al simbolo 0^0. Tuttavia, nella teoria delle serie è conveniente porre $0^0 = 1$, in modo da snellire alcune notazioni.

ed esse costituiscono una successione limitata non regolare; mentre, se $q < -1$ le somme parziali della serie sono date da:

$$s_n = \frac{1 - \big(- |q|\big)^n}{2} = \begin{cases} \frac{1+|q|^n}{1-q} & \text{, se } n = 2k-1 \text{ è dispari} \\ \frac{1-|q|^n}{1-q} & \text{, se } n = 2k \text{ è pari} \end{cases}$$

cosicché:

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} s_{2k} = -\infty$$

e la successione (s_n) non è limitata né inferiormente né superiormente.

Osservazione 3: Notiamo che la serie $\sum q^{n-1}$ ha gli addendi in *progressione geometrica*[5]. Pertanto, più in generale, ci si può porre il problema di analizzare il comportamento di una serie i cui termini siano in progressione geometrica, ossia di una serie del tipo $\sum \alpha q^{n-1}$.
Invero abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = \alpha \sum_{k=1}^{n} q^{n-1} = \alpha \frac{1-q^n}{1-q} \ ,$$

da cui segue che la serie $\sum \alpha q^{n-1}$ ha lo stesso comportamento della serie geometrica di ragione q.
In particolare, se $\alpha = q^{n_0}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$ con $-1 < q < 1$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n_0+n-1} = \frac{q^{n_0}}{1-q} \ .$$

♦

1.4. **Serie Armonica e Serie Armonica Generalizzata.** La serie i cui addendi sono $a_n = \frac{1}{n}$, cioé $\sum \frac{1}{n}$, si chiama *serie armonica*.
La serie armonica è regolare, perché essendo a termini positivi ha le somme parziali strettamente crescenti, e diverge positivamente. Di quest'ultimo fatto si contano innumerevoli dimostrazioni (le dimostrazioni "elementari" sono circa una quarantina) e nel prossimo paragrafo ne proporremo alcune.

Analogamente, fissato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie con addendi dati da $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ si chiama *serie armonica generalizzata con esponente* α.
Chiaramente, la serie ha termini positivi, e perciò essa o converge o diverge.
Per $\alpha \leq 0$ la serie non soddisfa la *Condizione Necessaria alla Convergenza*, poiché:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{, se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{, se } \alpha < 0 \end{cases}$$

ed il limite è diverso da 0, cosicché tale serie diverge positivamente.
D'altra parte, la serie armonica generalizzata con esponente $\alpha = 1$ si riduce alla serie armonica e perciò diverge.
Il comportamento negli altri casi si studia con tecniche più "sofisticate" e sarà analizzato negli esempi dei paragrafi seguenti.
Anticipando ciò che troveremo, possiamo dire che: la serie armonica generalizzata con esponente α è:

[5] Ricordiamo che una successione (a_n) viene detta *progressione geometrica di ragione q e primo termine α* se e solo se $a_1 = \alpha$ e $a_{n+1} = q \cdot a_n$ per ogni n. Si dimostra facilmente per induzione che la formula che fornisce lo n-esimo termine della progressione è $a_n = \alpha q^{n-1}$.

convergente: se e solo se $\alpha > 1$;

positivamente divergente: se e solo se $\alpha \leq 1$.

2. Sulla Divergenza della Serie Armonica

Proponiamo qui di seguito quattro dimostrazioni alternative del seguente ed importantissimo fatto:

"La serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ è positivamente divergente".

Osservazione 4: Osserviamo preliminarmente che la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ ha addendi positivi, cosicché le somme parziali s_n della serie sono *strettamente crescenti* e tutte maggiori di $s_1 = 1$.
Da ciò e dal *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne* segue immediatamente che la serie armonica è regolare e che la sua somma $s = \sup\{s_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ è un elemento di $]1, +\infty[\cup \{+\infty\}$. ♦

Dimostrazione 1[6]*.* La dimostrazione si basa sul raggruppamento di termini in appropriate somme paraziali.
A norma del *Teorema Fondamentale sulle Successioni Estratte*, per mostrare che la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge basta far vedere che la (s_n) ha almeno una successione estratta (s_{n_k}) divergente.
Consideriamo la successione di indici $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 8$, ..., il cui termine generale è dato da $n_k = 2^k$, e analizziamo il comportamento delle somme parziali s_2, s_4, s_8, ...
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= s_2 + \underbrace{\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= \underbrace{s_4}_{>1+\frac{2}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} + \frac{1}{8} \\
&> 1 + \frac{2}{2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

e perciò ci facciamo dell'idea che in generale valga la disuguaglianza:

$$s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Proviamo tale disuguaglianza ragionando per induzione. Chiaramente, la disuguaglianza vale per $k = 1, 2, 3$, e ciò costituisce una buona *base per l'induzione.*

[6]Usualmente attribuita a Nicola di Oresme (1323 circa - 1382).

Per provare il *passo induttivo*, supponiamo che la disuguaglianza $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ sia vera per k e mostriamo che essa vale pure per $k+1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}} &= \underbrace{s_{2^k}}_{\geq 1+\frac{k}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}-2} + \frac{1}{2^{k+1}-1}}_{> \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &> 1 + \frac{k}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}}_{= \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

che è quanto volevamo.
A norma del *Teorema del Confronto*, dalla disuguaglianza ora acquisita ricaviamo:

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2^k} = \lim_{k\to+\infty} 1 + \frac{k}{2} = +\infty$$

cosicché (s_{2^k}) diverge positivamente e perciò anche (s_n) diverge positivamente, come volevamo.

□

Dimostrazione 2. In questa dimostrazione si usano la *Formula Fondamentale del Calcolo Integrale* e le proprietà degli integrali definiti.
Notiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{1}{k} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{k} \cdot \big((k+1) - k\big) \\ &= \frac{1}{k} \int_k^{k+1} \mathrm{d}\, x \\ &= \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, \mathrm{d}\, x \\ &\geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x\ , \end{aligned}$$

con l'ultima disuguaglianza valida perché la funzione $x \mapsto 1/x$ è decrescente in ogni intervallo del tipo $[k, k+1]$, quindi $1/k \geq 1/x$ per $k \leq x \leq k+1$.
Da ciò, per la proprietà additiva dell'integrale definito, segue che:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x + \int_2^3 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x\ ; \end{aligned}$$

poiché $\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x = \log x + C$, dalla precedente consegue:

$$\begin{aligned} s_n &\geq [\log x]_1^{n+1} \\ &= \log(n+1) - \log 1 \\ &= \log(n+1)\ . \end{aligned}$$

Pertanto, invocando il *Teorema del Confronto*, possiamo affermare che:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty\ ,$$

cioè che (s_n) è divergente. □

Osservazione 5: Abbiamo proposto queste dimostrazioni perché, ragionando in analogia con esse, è possibile dimostrare due semplici criteri di convergenza per particolari serie a termini positivi: di ciò ci occuperemo nel § 4. ⧫

Dimostrazione 3. Qui usiamo un ragionamento per assurdo.
Per assurdo, supponiamo che la somma della serie armonica sia $s \in]1, +\infty[$.
Consideriamo le successioni di termine generale:

$$\sigma_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} ,$$
$$\tau_n := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} ,$$

cioè le serie $\sum \frac{1}{2n}$ e $\sum \frac{1}{2n-1}$ (aventi per addendi, rispettivamente, i reciproci dei numeri naturali pari e quelli dei numeri dispari). Detta al solito s_n la somma parziale n-esima della serie armonica, evidentemente risulta:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}\ s_n$$

e da ciò segue che:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\ s .$$

D'altra parte, si ha:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \tau_n + \sigma_n , \end{aligned}$$

da cui segue $\tau_n = s_{2n} - \sigma_n$ e dunque:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \sigma_n = s - \frac{1}{2}\ s = \frac{1}{2}\ s$$

(si ricordi che (s_{2n}) è estratta da (s_n) e perciò ha il suo stesso limite).
Allora la successione di termine generale $S_n := \tau_n - \sigma_n$ è regolare ed ha:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \tau_n - \sigma_n = \frac{1}{2}\ s - \frac{1}{2}\ s = 0 .$$

Ma ciò è assurdo: infatti risulta:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} , \end{aligned}$$

onde per cui (S_n) è la serie $\sum \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$ che ha termini positivi; da ciò segue immediatamente che (S_n) è strettamente crescente e dunque abbiamo:

$$0 = \lim_{n\to\infty} S_n \geq S_1 = \frac{1}{2} > 0 ,$$

contro il *Principio di Tricotomia*.
Ne viene che la somma s della serie armonica non può essere in $]1, +\infty[$, perciò $s = +\infty$. □

Dimostrazione 4. Questa dimostrazione fa uso dei metodi del *Calcolo Differenziale* e della serie telescopica.
La funzione $f :] - 1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) := x - \log(1 + x)$$

è continua e derivabile in $] - 1, +\infty[$; la sua derivata è:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} ,$$

ed essa è positiva per $x > 0$, negativa per $-1 < x < 0$ e nulla in 0; conseguentemente, f è strettamente decrescente nell'intervallo $] - 1, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty[$, perciò essa ha

un minimo *assoluto* in 0.
Per definizione di minimo assoluto, quanto appena trovato implica $f(x) \geq f(0)$, cioè:

$$f(x) \geq 0 \text{ ovunque in }]-1,+\infty[$$

ed $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ (per la stretta monotònia).
Ciò detto, per fissato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo la quantità:

$$\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \ ;$$

dato che $1/n \neq 0$ abbiamo certamente $f(1/n) > 0$, perciò anche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &> \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \log\frac{n+1}{n} \\ &= \log(n+1) - \log n \ . \end{aligned}$$

Conseguentemente ogni addendo della serie armonica è minorato (strettamente) dal corrispondente addendo della serie $\sum \log(n+1) - \log n$; poiché l'ultima serie è telescopica, possiamo ben dire che:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \log(n+1) - \log n &= \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) - \log 1 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) \\ &= +\infty \ , \end{aligned}$$

cosicché, invocando il *Criterio del Confronto*, concludiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \ ,$$

come volevamo. □

3. Criteri di Convergenza per Serie a Termini non Negativi

Questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione dei criteri di convergenza per le serie a termini non negativi.
Ricordiamo che tali serie sono o convergenti oppure positivamente divergenti, in quanto ognuna di esse ha la successione delle somme parziali crescente.

3.1. **Criteri di Confronto.** Cominciamo dimostrando il seguente e fondamentale:

Teorema 1 (Criterio del Confronto)
Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ serie a termini non negativi.
Se risulta:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \ ,$$

valgono i seguenti fatti:

(1) *se $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge e:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \ ;$$

(2) *se $\sum a_n$ diverge positivamente, allora $\sum b_n$ diverge positivamente.*

Dimostrazione. Dato che $a_n \leq b_n$ pe ogni indice $n \in \mathbb{N}$, dette $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $\sum_{n=0}^{n} b_k$ le somme parziali delle due serie, si ha pure:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n \leq \sigma_n \ .$$

Il *Teorema di Regolarità delle Successioni Monotòne* assicura che (s_n) e (σ_n) sono entrambe regolari, poiché crescenti; dunque la tesi segue applicando il *Criterio del*

Confronto per le Successioni.
Inoltre, si ha:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

cosicché è pure $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. □

Osservazione 6: Osserviamo esplicitamente che il TEOREMA 1 continua a valere se le sue ipotesi sono soddisfatte *definitivamente*, cioè da un certo indice in poi. Per mostrare ciò, supponiamo che esistano tre numeri $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tali che:

$$\begin{gathered} \forall n > n_1,\ a_n \geq 0 \\ \forall n > n_2,\ b_n \geq 0 \\ \forall n > n_3,\ a_n \leq b_n\ ; \end{gathered}$$

posto $n_0 := \max\{n_1, n_2, n_3\}$, è evidente che le tre disuguaglianze precedenti valgono contemporaneamente per $n > n_0$: da ciò segue che le successioni (s_n) delle somme parziali di $\sum a_n$ e (σ_n) delle somme parziali di $\sum b_n$ sono crescenti per $n > n_0$ e dunque regolari per il *Teorema di Regolarità delle Successioni Monotòne*; d'altro canto, per $n > n_0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} \underbrace{a_k}_{\leq b_k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} b_k + \sum_{k=0}^{n_0} b_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} b_k}_{=:C} + \sum_{k=0}^{n} b_k \\ &= C + \sigma_n \end{aligned}$$

(in cui $C = \sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} b_k$ è costante rispetto ad n), quindi la tesi si ottiene di nuovo invocando il *Critrio del Confronto per Successioni.* ♦

Osservazione 7: L'**Osservazione** precedente mostra un principio del tutto generale: i teoremi sulle serie valgono anche se le ipotesi sono soddisfatte solo *definitivamente*, ma quando ciò accade le dimostrazioni sono leggermente più complicate a livello notazionale.
Pertanto, per semplicità, qui e di seguito assumeremo sempre che le ipotesi dei teoremi siano soddisfatte per ogni indice $n \in \mathbb{N}$. ♦

Dato che provare disuguaglianze è, in generale, più difficile che calcolare limiti, molte volte torna più utile nelle applicazioni il seguente:

TEOREMA 2 (Criterio del Confronto Asintotico)
Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ serie a termini non negativi.

Se:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0,+\infty[\ ,$$

allora $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere*, nel senso che sono entrambe convergenti od entrambe divergenti positivamente.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon = l/2 > 0$ nella definizione di limite, riusciamo a determinare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{2}\, b_n < a_n < \frac{3l}{2}\, b_n\ .$$

L'asserto segue dalle disuguaglianze precedenti invocando il *Criterio del Confronto*. Infatti, se $\sum a_n$ converge, allora converge per confronto pure $\sum \frac{l}{2} b_n$ e dunque anche $\sum b_n$; analogamente, se $\sum b_n$ converge, allora converge pure $\sum \frac{3l}{2} b_n$ e per confronto anche $\sum a_n$. Analogo discorso nel caso di serie divergenti. □

Osservazione 8: Nelle ipotesi del *Criterio del Confronto Asintotico* stiamo implicitamente assumendo che $b_n \neq 0$ per n "sufficientemente grande", poiché solo in tale ipotesi è possibile dare un significato al passaggio al limite della successione di rapporti a_n/b_n.
Per evitare ciò, si può sostituire l'ipotesi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0,+\infty[$$

con l'esistenza di $l \in]0,+\infty[$ tale che:

$$a_n = l b_n + \mathrm{o}(b_n)\ ,$$

in cui $\mathrm{o}(\cdot)$ è il simbolo "o piccolo" di Landau. ♦

3.2. **Criteri dell'Ordine di Infinitesimo.** Dal TEOREMA 2 e dalla convergenza della serie armonica generalizzata segue immediatamente il:

TEOREMA 3 (Criterio dell'Ordine di Infinitesimo)
Sia $\sum a_n$ *una serie a termini non negativi.*
Se (a_n) *è infinitesima d'ordine* $p > 1$*, allora la serie* $\sum a_n$ *converge.*
Se (a_n) *è infinitesima d'ordine* $p \leq 1$*, allora la serie* $\sum a_n$ *converge.*

Dimostrazione. Supponiamo che (a_n) è infinitesima d'ordine $p > 1$: ciò significa che esiste $l \in]0,+\infty[$ tale che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = l\ ;$$

invocando il *Criterio del Confronto Asintotico* otteniamo che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$, la quale converge perché $p > 1$. In maniera del tutto analoga si ragiona per la divergenza. □

Osservazione 9: Il *Criterio dell'Ordine di Infinitesimo* non può essere applicato, ad esempio, allo sudio del carattere di serie del tipo:

$$\sum \frac{1}{n^2 \log n}\ , \quad \sum \frac{\log n}{n^2} \quad \text{o} \quad \sum \frac{1}{n \log n}$$

poiché nessuna delle successioni di addendi delle serie precedente è un unfinitesimo dotato di ordine rispetto al campione $1/n$. Infatti, abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^2 \log n} = \begin{cases} 0 & , \text{se } \alpha \leq 2 \\ +\infty & , \text{se } \alpha > 2 \end{cases} ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha \log n}{n^2} = \begin{cases} 0 & , \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & , \text{se } \alpha \geq 2 \end{cases} ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n \log n} = \begin{cases} 0 & , \text{se } \alpha \leq 1 \\ +\infty & , \text{se } \alpha > 1 \end{cases} ,$$

e per nessun α il limite esiste finito e non nullo. ♦

Il Criterio dell'Ordine di Infinitesimo può essere raffinato e reso un po' più generale: vale infatti il seguente:

Teorema 4 (Criterio dell'Ordine di Infinitesimo Migliorato)
Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi.
Se (a_n) è infinitesima d'ordine superiore ad un $p > 1$, allora la serie $\sum a_n$ converge.
Se (a_n) è infinitesima d'ordine non superiore ad 1*, allora la serie $\sum a_n$ converge.*

Osservazione 10: Ricordiamo che una successione (a_n) è infinitesima *d'ordine non superiore ad* 1 se e solo se una minorazione del tipo:

$$n\ a_n \geq m$$

con $m > 0$ sussiste per $n > \nu$. ♦

Dimostrazione. Supponiamo che (a_n) sia infinitesima d'ordine superiore ad un $p > 1$: ciò significa che:

$$\lim_{n\to+\infty} n^p\ a_n = 0 ,$$

quindi, per definizione di limite, in corrispondenza di $\varepsilon = 1$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta:

$$|n^p a_n| < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n < \frac{1}{n^p} ;$$

da ciò segue la tesi, invocando il *Criterio del Confronto* e sfruttando la convergenza della serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$ con $p > 1$.
In maniera del tutto analoga, supponiamo che (a_n) è infinitesima d'ordine non superiore ad 1: ciò si verifica se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ si ha:

$$n\ a_n \geq m \quad \Rightarrow \quad a_n \geq \frac{m}{n} ;$$

da ciò la tesi, per la divergenza della serie armonica e per il *Criterio del Confronto*. □

Osservazione 11: Il *Criterio dell'Ordine di Infinitesimo Migliorato* si applica allo studio del carattere delle serie:

$$\sum \frac{1}{n^2 \log n} \qquad \text{e} \qquad \sum \frac{\log n}{n^2} .$$

Infatti, gli addendi della prima serie sono infinitesimi d'ordine superiore a $p = 2 > 1$, mentre quelli della seconda sono infinitesimi d'ordine superiore a $p = 3/2 > 1$; quindi entrambe le serie convergono.

D'altra parte, il criterio non si applica alla serie:

$$\sum \frac{1}{n \log n} \; ,$$

poiché i suoi addendi sono infinitesimi d'ordine superiore ad 1, ma d'ordine inferiore ad ogni $p > 1$. ♦

3.3. **Criteri della Radice e del Rapporto.**

Teorema 5 (Criterio della Radice)
Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi.
Se esiste un $0 \leq K < 1$ tale che:

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \; \sqrt[n]{a_n} \leq K \; ,$$

allora $\sum a_n$ converge.
Se, invece, esiste $K > 1$ tale che:

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \; \sqrt[n]{a_n} \geq K \; ,$$

allora $\sum a_n$ diverge.

Dimostrazione. Supponiamo esista $0 \leq K < 1$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq K$ per $n \geq 1$. Esplicitando rispetto ad a_n troviamo:

$$a_n \leq K^n \; ,$$

cosicché gli addendi di $\sum a_n$ sono maggiorati dai corrispondenti addendi della serie geometrica $\sum K^n$, la quale è convergente poiché la ragione K è minore di 1; pertanto $\sum a_n$ converge per *Criterio del Confronto.*
Analogamente, se esiste $K \geq 1$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \geq K$ per $n \geq 1$, abbiamo $a_n \geq K^n \geq 1$, cosicché (a_n) non può tendere a 0; dunque $\sum a_n$ diverge, perché è regolare e non soddisfa la *Condizione Necessaria alla Convergenza.* □

Il criterio ora dimostrato ha anche una versione asintotica, la quale torna molto utile nelle applicazioni:

Teorema 6 (Criterio della Radice - versione asintotica)
Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi.
Supposto che:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

abbiamo:

(1) se $0 \leq l < 1$, allora $\sum a_n$ converge;

(2) se $l > 1$, allora $\sum a_n$ diverge;

(3) se $l = 1$, nulla si può dire circa il carattere della serie $\sum a_n$.

Dimostrazione. Proviamo la *(1)*. Per definizione di limite, in corrispondenza di $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$ esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ si ha:

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{1-l}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} \; ;$$

dato che $K = \frac{l+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ la convergenza di $\sum a_n$ segue dal *Criterio della Radice.*

Proviamo la *(2)*. Supponiamo $l \neq +\infty$. In tal caso, in corrispondenza di $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta:

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{l-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} > l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2}\ ;$$

dato che $K = \frac{l+1}{2} \geq \frac{1+1}{2} = 1$ la divergenza di $\sum a_n$ segue dal *Criterio della Radice*. Se, invece, $l = +\infty$, basta sfruttare la definizione di limite con $\varepsilon = 1$ per concludere.

□

Teorema 7 (Criterio del Rapporto)
Sia $\sum a_n$ *una serie a termini positivi.*
Se esiste un $0 \leq K < 1$ *tale che:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K\ ,$$

allora $\sum a_n$ *converge.*
Se, invece, esiste $K > 1$ *tale che:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq K\ ,$$

allora $\sum a_n$ *diverge.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista $0 \leq K < 1$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$, ossia $a_{n+1} \leq K a_n$, per ogni indice n.
Da ciò segue:

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq K &\ \underbrace{a_n}_{\leq K a_{n-1}} \\ \leq K^2 &\ \underbrace{a_{n-1}}_{\leq K a_{n-2}} \\ \leq K^3 &\ \underbrace{a_{n-2}}_{\leq K a_{n-3}} \\ \leq \cdots & \\ \leq K^n &\ \underbrace{a_1}_{\leq K a_0} \\ \leq K^{n+1} &\ a_0\ ; \end{aligned}$$

da ciò segue che gli addendi della serie $\sum a_n$ sono maggiorati da quelli della serie $\sum a_0 K^n$, la quale converge perché multipla della serie geometrica convergente $\sum K^n$; pertanto l'asserto segue invocando il *Criterio del Confronto*.
Viceversa, supponiamo che esista $K \geq 1$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq K$, ossia $a_{n+1} \geq K a_n$, per ogni indice n. Ragionando come sopra si riconosce che $a_{n+1} \geq K^{n+1} a_0 \geq a_0 > 0$ per ogni n, pertanto la (a_n) non può essere infinitesima; la divergenza segue dalla regolarità di $\sum a_n$ e dalla *Condizione Necessaria alla Convergenza.* □

Anche il Criterio del Rapporto ha una versione asintotica che torna molto utile nella pratica:

Teorema 8 (Criterio del Rapporto - versione asintotica)
Sia $\sum a_n$ *una serie a termini postivi.*
Supposto che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

abbiamo:

(1) se $0 \leq l < 1$*, allora* $\sum a_n$ *converge;*

(2) se $l > 1$*, allora* $\sum a_n$ *diverge;*

(3) se $l = 1$*, nulla si può dire circa il carattere della serie* $\sum a_n$*.*

La dimostrazione è del tutto simile a quella della versione asintotica del Criterio della Radice ed è lasciata come esercizio al lettore.
Inoltre, il criterio può essere migliorato: si veda [DM, Esercizio 14].

Osservazione 12 (Esistenza di Casi Dubbi)**:** Notiamo esplicitamente che né il Criterio della Radice né il Criterio del Rapporto nelle loro versioni asintotiche consentono di concludere alcunché sul carattere della serie analizzata quando il limite l coincide con 1 (caso *(3)*). Ciò, in un certo senso, è nella natura delle cose: infatti, esistono casi in cui $l = 1$ con serie divergente e casi in cui $l = 1$ con serie convergente.
Ad esempio, la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ ha:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \\ &= 1 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= 1\end{aligned}$$

ed essa diverge positivamente; mentre la serie telescopica $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ha:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n+1}} \\ &= 1 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} \\ &= 1\end{aligned}$$

ed essa converge verso $s = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 1$.

Pertanto, il caso $l = 1$ è sempre un *caso dubbio*, per entrambi i criteri in versione asintotica: ciò vuol dire che, qualora esso si presenti, è necessaria un'analisi più approfondita per ottenere informazioni sul carattere della serie. ♦

Osservazione 13 (Maggiore Generalità del Criterio della Radice)**:** In generale si prova che ogni volta che il Criterio del Rapporto in versione asintotica è conclusivo allora anche il Criterio della Radice in versione asintotica è conclusivo, cioè che vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1\ .$$

Tuttavia il viceversa non è vero, cioè si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1 \qquad \not\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1\ ,$$

ed anzi, in generale, dall'esistenza del limite di $\sqrt[n]{a_n}$ non si può nemmeno far discendere l'esistenza del limite dei rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Per illustrare questa circostanza, consideriamo la serie a termini positivi $\sum a_n$ con addendi definiti ponendo:

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{, se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2^{n-2}} & \text{, se } n \text{ è pari} \end{cases} ,$$

cioè la serie $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots$.
Formando le radici n-esime degli addendi si riconosce che:

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2^{1-\frac{2}{n}}} & \text{, se } n \text{ è pari} \end{cases} ,$$

dunque passando al limite si trova:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

e la serie converge per il Criterio della Radice in versione asintotica; d'altra parte, formando i rapporti tra termini successivi si trova:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & \text{, se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{8} & \text{, se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

cosicché la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non è regolare ed il Criterio del Rapporto in versione asintotica è inapplicabile.
Quindi il Criterio della Radice in versione asintotica è, in generale, *più potente* del Criterio del Rapporto in versione asintotica. ♦

Osservazione 14: L'esempio illustrato nell'**Osservazione** precedente si può usare per provare che anche il Criterio della Radice si può applicare in casi in cui il Criterio del Rapporto è inapplicabile.
Pertanto il Criterio della Radice è, in generale, *più potente* del Criterio del Rapporto. ♦

3.4. **Criterio di Condensazione *.** Dimostriamo il

TEOREMA 9 (Criterio di Condensazione di Cauchy)
Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negaitivi e decrescenti.
La serie $\sum a_n$ e la serie "condensata" $\sum 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere*, cioè sono o entrambe convergenti od entrambe divergenti.*

Osservazione 15: Il criterio ora enunciato consente di ridurre il problema della convergenza della serie $\sum a_n$ a quello della serie $\sum 2^n a_{2^n}$, la quale ha addendi che si ricavano considerando solamente i termini di (a_n) che hanno come indici le potenze di 2.
Ciò spiega il nome del criterio: infatti, tutta l'informazione sulla convergenza della serie $\sum a_n$ è "condensata" negli addendi del tipo a_{2^n}. ♦

La dimostrazione del Criterio di Condensazione si basa sul seguente:

LEMMA TECNICO (Stime con la Serie "Condensata")
Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi e decrescenti.
Dette s_n le somme parziali di $\sum a_n$ e σ_n le somme parziali della serie "condensata":

$$\sum 2^n a_{2^n} ,$$

si ha:

$$\frac{1}{2}\,\sigma_n \le s_{2^n} \le s_{2^{n+1}-1} \le \sigma_n \ , \tag{1}$$

Dimostrazione del Lemma Tecnico. Come detto nell'enunciato, poniamo:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &:= \sum_{k=1}^{2^n} a_k \\ \sigma_n &:= \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \ . \end{aligned}$$

Chiaramente, dato che:

$$2^n \le 2^n + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$$

e dato che la successione delle somme parziali di $\sum a_n$ è crescente, la disuguaglianza mediana $s_{2^n} \le s_{2^{n+1}-1}$ è banale; pertanto basta dimostrare le due disuguaglianze più esterne della (1).
Tenendo presente la monotònia degli addendi, ossia che:

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \cdots \ ,$$

e raggruppando convenientemente gli addendi troviamo:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_0 \\ s_3 &= \underbrace{s_1}_{=\sigma_0} + \underbrace{a_2 + a_3}_{\le a_2+a_2} \\ &\le \sigma_0 + 2a_2 \\ &= \sigma_1 \\ s_7 &= \underbrace{s_3}_{\le\sigma_1} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\le a_4+a_4+a_4+a_4} \\ &\le \sigma_1 + 4a_4 \\ &= \sigma_2 \end{aligned}$$

e ciò costituisce un'ottima *base per l'induzione* per dimostrare la disuguaglianza superiore:

$$s_{2^{n+1}-1} \le \sigma_n \ .$$

Per acquisire il *passo induttivo* supponiamo che tale disuguaglianza valga per n e dimostriamo che essa vale anche per $n+1$: abbiamo:

$$\begin{aligned} s_{2^{n+2}-1} &= \underbrace{s_{2^{n+1}-1}}_{\le\sigma_n} + \underbrace{a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+1} + \cdots + a_{2^{n+2}-1}}_{2^{n+2} \text{ addendi tutti } \le a_{2^{n+1}}} \\ &\le \sigma_n + \underbrace{a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}} + \cdots + a_{2^{n+1}}}_{2^{n+1} \text{ volte}} \\ &= \sigma_n + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} \\ &= \sigma_{n+1} \ , \end{aligned}$$

come volevamo.
Analogamente, abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_0 &= \frac{1}{2}a_1 \\ &\leq s_1 \\ \frac{1}{2}\sigma_1 &= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_0}_{\leq s_1} + a_2 \\ &\leq s_1 + a_2 \\ &= s_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_2 &= \frac{1}{2}\sigma_1 + \underbrace{2a_4}_{=a_4+a_4} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_1}_{\leq s_2} + \underbrace{a_4 + a_4}_{\leq a_3+a_4} \\ &\leq s_2 + a_3 + a_4 \\ &= s_4 \\ \frac{1}{2}\sigma_3 &= \frac{1}{2}\sigma_2 + \underbrace{4a_8}_{=a_8+a_8+a_8+a_8} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_2}_{\leq s_4} + \underbrace{a_8 + a_8 + a_8 + a_8}_{\leq a_5+a_6+a_7+a_8} \\ &\leq s_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= s_8\end{aligned}$$

e ciò costituisce un'ottima *base per l'induzione* per dimostrare la disuguaglianza inferiore:

$$\frac{1}{2}\sigma_n \leq s_{2^n} \ .$$

Per ottenere il *passo induttivo*, supponiamo che tale disuguaglianza valga per n e mostriamo che essa è vera pure per $n+1$: abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_{n+1} &= \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}2^{n+1}a_{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\sigma_n + \underbrace{2^n a_{2^{n+1}}}_{=a_{2^{n+1}}+a_{2^{n+1}}+\cdots a_{2^{n+1}}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_n}_{\leq s_{2^n}} + \underbrace{a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}} + cdots + a_{2^{n+1}}}_{\leq a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\cdots+a_{2^{n+1}}} \\ &\leq s_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \cdots + a_{2^{n+1}} \\ &= s_{2^{n+1}} \ ,\end{aligned}$$

come volevamo. □

Dimostrazione del Criterio di Condensazione. Notiamo anzitutto che ambo le serie considerate sono regolari, in quanto, essendo entrambe a termini non negativi, hanno somme parziali crescenti.

Posto:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$$

con $s, \sigma \in [0, +\infty]$, provare l'enunciato equivale a dimostrare che s è finito se e solo se σ è finito (in quanto da ciò, per contrapposizione, si ricava che $s = +\infty$ se e solo se $\sigma = +\infty$).

Se σ è finito, allora s è finito. Per il *Teorema Fondamentale sulle Successioni Estratte*, la successione $(s_{2^{n+1}-1})$, estratta da (s_n), è regolare ha lo stesso limite di (s_n), ossia s; per le (1) abbiamo:

$$s_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n$$

e perciò il *Teorema del Confronto* si applica e garantisce che $s \leq \sigma$, cosicché s è finito.

Se s è finito, allora σ è finito. Per il *Teorema Fondamentale sulle Successioni Estratte*, la successione (s_{2^n}), estratta da (s_n), è regolare ha lo stesso limite di (s_n), cioé s; per le (1) abbiamo:

$$\frac{1}{2}\sigma_n \leq s_{2^n}$$

e perciò il *Teorema del Confronto* si applica e garantisce che $\frac{1}{2}\sigma \leq s$, cosicché σ è finito. □

Osservazione 16: Vale la pena menzionare esplicitamente che le somme s e σ della serie $\sum a_n$ e della serie "condensata" $\sum 2^n a_n$ soddisfano le disuguaglianze $\frac{1}{2}\sigma \leq s \leq \sigma$, ossia:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \ ,$$

utili per avere una stima di una delle due in funzione del valore dell'altra. ♦

Osservazione 17: Notiamo esplicitamente che, come tutti gli enunciati relativi alle serie numeriche, è possibile applicare il Criterio di Condensazione anche se le sue ipotesi sono soddisfatte solo *definitivamente* dalla successione (a_n), ossia solamente "a partire da un certo indice in poi". ♦

Il Criterio di Condensazione è molto utile per stabilire il comportamento di alcune serie non analizzabili né col Criterio della Radice né col Criterio del Rapporto, come mostrano gli esempi che seguono.

`Esempio 1 (Serie Armonica Generalizzata):` Come detto più sopra, fissato un numero reale α, la serie:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

si chiama *serie armonica generalizzata con esponente α.*
Tale serie, essendo a termini positivi, è certamente regolare; ci poniamo perciò il problema di stabilire sotto quali condizioni essa converge e sotto quali essa diverge.
Abbiamo già notato (cfr. paragrafo 1.4) che la serie armonica generalizzata diverge ceratmente quando $\alpha \leq 0$; pertanto, d'ora in avanti consideriamo il caso $\alpha > 0$.
La Condizione Necessaria è certamente soddisfatta, quindi possiamo approfondire

l'analisi; dato che:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \\
&= 1^\alpha \\
&= 1 \\
\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \\
&= 1^\alpha \\
&= 1\ ,
\end{aligned}$$

né il Criterio della Radice né il Criterio del Rapporto si applicano.
Tuttavia, dato che la successione $\frac{1}{n^\alpha}$ è decrescente, possiamo applicare il Criterio di Condensazione e risolvere il problema della convergenza della serie armonica generalizzata studiando la convergenza della serie "condensata":

$$\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}\ ;$$

dato che:

$$2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{n(1-\alpha)} = (2^{1-\alpha})\ (2^{1-\alpha})^{n-1}\ ,$$

la serie condensata ha gli addendi in progressione geometrica con primo termine $2^{1-\alpha}$ e ragione $q = 2^{1-\alpha} > 0$ e perciò converge se e solo se $q < 1$, ossia se:

$$2^{1-\alpha} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\alpha < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1\ ,$$

e diverge per $q \geq 1$ cioé per $\alpha \leq 1$.
Pertanto, come anticipato nel paragrafo 1, la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$ e diverge se e solo se $\alpha \leq 1$. $\diamondsuit$

`Esempio 2:` Fissato β reale, consideriamo la serie:

$$\sum \frac{1}{n \log^\beta n}$$

che ha addendi definiti per $n \geq 2$.
Dato che la Condizione Necessaria è certamente soddisfatta per ogni β, possiamo porci il problema della convergenza della serie. Dato che:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \log^\beta n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\ (\log n)^{\beta/n}} \\
&= 1 \\
\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\log^\beta(n+1)}}{\frac{1}{n\log^\beta n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n \log^\beta n}{(n+1)\log^\beta(n+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \ \left(\frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^\beta \\
&= 1\ ,
\end{aligned}$$

né il Criterio della Radice né il Criterio del Rapporto sono utilizzabili.
Inoltre, dato che:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\log^\beta n}}{\frac{1}{n^\alpha}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n\log^\beta n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{\log^\beta n} \\ &= \begin{cases} +\infty & , \text{ se } \alpha > 1 \\ 0 & , \text{ se } \alpha \leq 1 \ , \end{cases} \end{aligned}$$

nemmeno il Criterio dell'Ordine di Infinitesimo è applicabile.
Tuttavia, dato che la successione $\frac{1}{n\log^\beta n}$ soddisfa definitivamente le ipotesi del Criterio di Condensazione, possiamo ridurre il problema della convergenza della serie $\sum \frac{1}{n\log^\beta n}$ a quello della convergenza della serie "condensata":

$$\sum 2^n \frac{1}{2^n \log^\beta(2^n)} \ .$$

Poiché:

$$2^n \frac{1}{2^n \log^\beta(2^n)} = \frac{1}{(\log 2^n)^\beta} = \frac{1}{\log^\beta 2}\ \frac{1}{n^\beta} \ ,$$

gli addendi della serie "condensata" sono proporzionali a quelli della serie armonica generalizzata con esponente β e da ciò segue immediatamente che la serie "condensata" converge se e solo se $\beta > 1$ e diverge se e solo se $\beta \leq 1$.
Conseguentemente, la serie $\sum \frac{1}{n\log^\beta n}$ converge se e solo se $\beta > 1$ e diverge se e solo se $\beta \leq 1$. ♢

3.5. **Criterio dell'Integrale *.**

Teorema 10 (Criterio dell'Integrale)
Sia $f :]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ una funzione continua e decrescente.
Considerate la serie $\sum f(n)$, che ha per addendi i valori assunti da f sui numeri naturali, e la funzione integrale F definita in $[0,+\infty[$ ponendo:

$$F(x) := \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}\,t \ ,$$

valgono i seguenti fatti:

(1) la serie $\sum f(n)$ converge se e solo se la funzione integrale F converge per $x \to +\infty$;

(2) la serie $\sum f(n)$ diverge se e solo se la funzione integrale F diverge per $x \to +\infty$.

La dimostrazione di questo criterio si basa anch'essa su un:

Lemma Tecnico (Stime con l'Integrale)
Siano $f :]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ una funzione continua e decrescente ed F la sua funzione integrale con punto iniziale 1.
Detta s_n la somma parziale n-esima della serie $\sum f(n)$, abbiamo:

$$F(n+1) \leq s_n \leq f(1) + F(n) \tag{2}$$

per ogni indice n.

Dimostrazione del Lemma Tecnico. Ricordiamo che, per la *Formula Fondamentale del Calcolo Integrale*, abbiamo:

$$\int_x^y \mathrm{d}\, t = y - x$$
$$\int_x^y f(t)\, \mathrm{d}\, t = F(y) - F(x)\ .$$

Fissato n, abbiamo:

$$\begin{aligned}
s_n &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) \\
&= f(1) + f(2)\cdot 1 + \cdots + f(n-1)\cdot 1 + f(n)\cdot 1 \\
&= f(1) + f(2)\cdot \int_1^2 \mathrm{d}\, x + \cdots + f(n-1)\cdot \int_{n-2}^{n-1} \mathrm{d}\, x + f(n)\cdot \int_{n-1}^{n} \mathrm{d}\, x \\
&= f(1) + \int_1^2 f(2)\, \mathrm{d}\, x + \cdots + \int_{n-2}^{n-1} f(n-1)\, \mathrm{d}\, x + \int_{n-1}^{n} f(n)\, \mathrm{d}\, x \\
&\le f(1) + \int_1^2 f(x)\, \mathrm{d}\, x + \cdots + \int_{n-2}^{n-1} f(x)\, \mathrm{d}\, x + \int_{n-1}^{n} f(x)\, \mathrm{d}\, x \\
&= f(1) + \int_1^n f(x)\, \mathrm{d}\, x \\
&= f(1) + F(n)\ ,
\end{aligned}$$

che è la disuguaglianza superiore; analogamente:

$$\begin{aligned}
s_n &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) \\
&= f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \cdots + f(n-1)\cdot 1 + f(n)\cdot 1 \\
&= f(1)\cdot \int_1^2 \mathrm{d}\, x + f(2)\cdot \int_2^3 \mathrm{d}\, x + \cdots + f(n-1)\cdot \int_{n-1}^{n} \mathrm{d}\, x + f(n)\cdot \int_{n}^{n+1} \mathrm{d}\, x \\
&= \int_1^2 f(1)\, \mathrm{d}\, x + \int_2^3 f(2)\, \mathrm{d}\, x + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(n-1)\, \mathrm{d}\, x + \int_{n}^{n+1} f(n)\, \mathrm{d}\, x \\
&\ge \int_1^2 f(x)\, \mathrm{d}\, x + \int_2^3 f(x)\, \mathrm{d}\, x + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\, \mathrm{d}\, x + \int_{n}^{n+1} f(x)\, \mathrm{d}\, x \\
&= \int_1^{n+1} f(x)\, \mathrm{d}\, x \\
&= F(n+1)\ ,
\end{aligned}$$

che è quella inferiore. □

Dimostrazione del Criterio dell'Integrale. La serie $\sum f(n)$ è evidentemente regolare, in quanto ha termini positivi; d'altra parte, la funzione integrale F è derivabile in $]0, +\infty[$ ed ha derivata $F'(x) = f(x) \ge 0$ in $]0, +\infty[$, cosicché essa è crescente nell'intervallo di definizione ed è regolare in $+\infty$.
Posto:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = S\ ,$$

per acquisire il teorema basta provare la sola *(1)*, cioé che s è finito se e solo se S è finito, dato che la *(2)* si ricava per contrapposizione.

Se s è finito, allora S è finito. Per le (2), abbiamo:

$$F(n+1) \le s_n\ ;$$

dato che F converge in $+\infty$ e dato che la successione di termine generale $x_n := n+1$ tende a $+\infty$, il *Teorema Fondamentale sulla Regolarità in un Punto* (o *Teorema "Ponte"*) assicura che la successione $F(n+1)$ è regolare ed ha come limite il medesimo limite di F, cioé S; dalla disuguaglianza precedente, per confronto, traiamo allora $S \leq s$, cosicché S è certamente finito.

Se S è finito, allora s è finito. Per le (2) risulta:

$$s_n \leq f(1) + F(n) \; ;$$

poiché, come sopra, la successione di termine generale $F(n)$ è regolare ed ha come limite S, dalla precedente si trae $s \leq f(1) + S$, e perciò s è finito. □

Osservazione 18: Dato che le funzioni integrali di f differiscono per costanti additive, la convergenza/divergenza della funzione integrale F con punto iniziale in 1 per $x \to +\infty$ è equivalente alla convergenza/divergenza di ogni altra funzione integrale di f per $x \to +\infty$.
Pertanto nell'enunciato del Criterio dell'Integrale la funzione F può essere sostituita con qualsiasi altra funzione integrale di f. ♦

Osservazione 19: Vale la pena di notare esplicitamente che, posto:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}\,t \; ,$$

dalla dimostrazione del Criterio dell'Integrale si trae la coppia di disuguaglianze:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x \; ,$$

che fornisce una stima della somma di $\sum f(n)$ in termini dell'*integrale improprio* $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.
Con una semplice manipolazione algebrica, dalle precedenti si trae:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - f(1) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \; ,$$

che fornisce, viceversa, una stima dell'integrale improprio in termini della somma della serie $\sum f(n)$. ♦

`Esempio 3:` La serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ con esponente $\alpha > 0$ è del tipo che ricade nell'ambito d'applicabilità del *Criterio dell'Integrale*: infatti, posto $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ per $x > 0$, f è continua e decrescente in $[0, +\infty[$ e si ha:

$$\frac{1}{n^\alpha} = f(n) \; .$$

Pertanto per studiare il carattere della serie basta calcolare il limite per $x \to +\infty$ di $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} \cdot t^{1-\alpha}\right]_1^x & \text{, se } \alpha \neq 1 \\ [\log t]_1^x & \text{, se } \alpha = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) & \text{, se } \alpha \neq 1 \\ \log x & \text{, se } \alpha = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

dunque:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t &= \lim_{x\to+\infty} F(x) \\
&= \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) & \text{, se } \alpha \neq 1 \\ \lim_{x\to+\infty} \log x & \text{, se } \alpha = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{, se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{, se } \alpha \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

cosicché ritroviamo i risultati del paragrafo precedente. ♢

`Esempio 4:` Consideriamo la serie:

$$\sum \frac{1}{n \log n \log^\gamma(\log n)} \ ,$$

con $\gamma \geq 0$ ed $n \geq 3$.
È bene notare che la Condizione Necessaria è soddisfatta per ogni valore di γ, cosicché possiamo porci il problema di studiare la convergenza della serie.
A tal uopo, non sono d'aiuto né il Criterio della Radice né il Criterio del Rapporto, in quanto inconclusivi.
Inoltre, poiché risulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\log n \log^\gamma(\log n)}}{\frac{1}{n^\alpha}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{\log n \log^\gamma(\log n)} \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{, se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{, se } \alpha \leq 1 \ , \end{cases}
\end{aligned}$$

nemmeno il Criterio dell'Ordine d'Infinitesimo è applicabile.
Tuttavia, la successione degli addendi della serie si ricava calcolando il valore della funzione:

$$f(x) := \frac{1}{x \log x \log^\gamma(\log x)} \ ,$$

definita in $]\mathbf{e}, +\infty[$, sui numeri naturali $n \geq 3$. Poiché la funzione f è positiva, continua e strettamente decrescente nell'intervallo di definizione[7], il caso in esame ricade nell'ambito di applicabilità del Criterio dell'Integrale: pertanto per stabilire la convergenza della serie occorre e basta controllare la convergenza di una qualsiasi funzione integrale di f.

[7]Infatti, dato che i tre fattori x, $\log x$ e $\log^\gamma(\log x)$ sono funzioni positive e strettamente crescenti in $]\mathbf{e}, +\infty[$, il prodotto $x \log x \log^\gamma(\log x)$ è positivo e strettamente crescente; ciò importa che $f(x)$ è strettamente decrescente, poiché reciproco di una funzione crescente positiva.

Scegliamo di calcolare, per sostituzione "diretta", la funzione integrale di punto iniziale $\mathbf{e}^{\mathbf{e}}$: abbiamo:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \int_{\mathbf{e}^{\mathbf{e}}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{\mathbf{e}^{\mathbf{e}}}^{x} \frac{1}{t\log t \log^{\gamma}(\log t)}\,\mathrm{d}\,t \\ &\overset{\tau=\log t}{=} \int_{\log \mathbf{e}^{\mathbf{e}}}^{\log x} \frac{1}{\tau \log^{\gamma}\tau}\,\mathrm{d}\,\tau \\ &= \int_{\mathbf{e}}^{\log x} \frac{1}{\tau \log^{\gamma}\tau}\,\mathrm{d}\,\tau \\ &\overset{\vartheta=\log\tau}{=} \int_{\log \mathbf{e}}^{\log(\log x)} \frac{1}{\vartheta^{\gamma}}\,\mathrm{d}\,\vartheta \\ &= \int_{1}^{\log(\log x)} \frac{1}{\vartheta^{\gamma}}\,\mathrm{d}\,\vartheta\ ,\end{aligned}$$

cosicché possiamo distinguere tre casi:

se $\gamma = 0$: in tal caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \big[1\big]_{1}^{\log(\log x)} \\ &= \log(\log x) - 1\end{aligned}$$

se $\gamma = 1$: in questo caso troviamo:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \big[\log\vartheta\big]_{1}^{\log(\log x)} \\ &= \log\big(\log(\log x)\big)\end{aligned}$$

se $\gamma \neq 0, 1$: in tal caso otteniamo:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \left[\frac{1}{1-\gamma}\vartheta^{1-\gamma}\right]_{1}^{\log(\log x)} \\ &= \frac{1}{1-\gamma}\log^{1-\gamma}(\log x) - \frac{1}{1-\gamma}\ .\end{aligned}$$

Quindi è semplice constatare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \begin{cases} +\infty & , \text{ se } 0 \le \gamma \le 1 \\ \frac{1}{\gamma-1} & , \text{ se } \gamma > 1 \end{cases}$$

e ciò implica che la serie $\sum \frac{1}{n\log n \log^{\gamma}(\log n)}$ converge se e solo se $\gamma > 1$ e diverge solo se $0 \le \gamma \le 1$. ♢

4. Criteri di Convergenza per Serie a Termini Qualsiasi

4.1. **Criterio di Convergenza Assoluta.** Un criterio molto usato nella pratica per stabilire se una serie converge è il seguente:

Teorema 11 (Criterio della Convergenza Assoluta)
Sia $\sum a_n$ una serie reale.
Se la serie $\sum |a_n|$ converge, allora converge anche $\sum a_n$ e risulta:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\ . \tag{3}$$

Dimostrazione. Scelti $n, p \in \mathbb{N}$, abbiamo:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \ ,$$

per la classica *disuguaglianza triangolare.* Ora, se $\sum |a_n|$ converge, essa soddisfa il *Criterio di Convergenza di Cauchy per Serie* e la disuguaglianza precedente implica che anche $\sum a_n$ soddisfa tale criterio; dunque $\sum a_n$ converge.
Dimostriamo la (3). Dato che la successione delle somme parziali di $\sum |a_n|$ è crescente, abbiamo:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$; la (3) segue immediatamente, passando al limite la precedente e tenendo presenti la continuità del valore assoluto ed i risultati di *permanenza del segno.* □

Osservazione 20: Osserviamo esplicitamente che la (3) vale (banalmente) anche quando $\sum |a_n|$ diverge, a patto che $\sum a_n$ sia regolare. ⧫

Posto:

Definizione 3 (Convergenza Assoluta)
Sia $\sum a_n$ una serie reale.
Si dice che $\sum a_n$ è *assolutamente convergente* se e solo se converge la serie $\sum |a_n|$.

l'enunciato del Teorema 11 può riscriversi dicendo che:

"ogni serie assolutamente convergente è convergente",

ossia dicendo che la convergenza assoluta è *sufficiente* alla convergenza. Tuttavia, come mostreremo più avanti, la convergenza assoluta si guarda bene dall'essere una condizione anche necessaria alla convergenza semplice.

Tutti i criteri di convergenza per le serie a termini positivi si trasformano in criteri di *convergenza assoluta*: basta sostituire alla serie a termini non negativi che appare negli enunciati la serie $\sum |a_n|$ dei valori assoluti della generica serie $\sum a_n$. Pertanto, lo studio della convergenza *semplice* di una serie può esser fatto usando il *Criterio di Convergenza Assoluta* ed uno dei criteri dimostrati nel paragrafo precedente.

4.2. **Serie a Segni Alterni e Criterio di Leibniz.** Essendo la convergenza assoluta una condizione "più forte" della convergenza (poiché la prima è sufficiente alla seconda), possiamo aspettarci di trovare serie per le quali i criteri di convergenza assoluta falliscano ma che tuttavia risultino convergenti.
Si pone quindi il problema di studiare la convergenza semplice di una serie anche qualora non si sappia nulla (o nulla di certo) sulla sua convergenza assoluta, e di fornire criteri di convergenza che possano essere applicati nella pratica.
In generale, tale problema è molto difficile; tuttavia, esistono casi i cui esso è di semplice (ma non banale) soluzione.

Il caso più immediato è quello delle cosiddette *serie a segni alterni*, ossia delle serie i cui addendi sono nella forma $(-1)^{n-1} a_n$, essendo (a_n) una successione di

numeri tutti ≥ 0.
Infatti, in tal caso vale il classico:

Criterio di Leibniz
Sia $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *una serie a segni alterni.*
Se:

(1) la successione (a_n) *è infinitesima, ossia* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*,*

(2) la successione (a_n) *è decrescente,*

allora la serie $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *è convergente.*

Dimostrazione. Sia s_n la somma parziale n-esima della serie $\sum(-1)^{n-1}a_n$. Per provare che la serie converge occorre e basta, a norma del *Teorema Fondamentale sulle Successioni Estratte*, dimostrare che le due sottosuccessioni (s_{2k}) ed (s_{2k-1}) delle somme parziali di posto pari e di posto dispari convergono allo stesso limite s.
Per fare ciò osserviamo che l'ipotesi (2) di monotònia di (a_n) implica le disuguaglianze:

$$\begin{aligned} s_3 &= \underbrace{a_1}_{=s_1} - a_2 + a_3 \\ &= s_1 + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{\leq 0} \\ &\leq s_1 \\ s_5 &= \underbrace{a_1 - a_2 + a_3}_{=s_3} - a_4 + a_5 \\ &= s_3 + \underbrace{(a_5 - a_4)}_{\leq 0} \\ &\leq s_3 \end{aligned}$$

e, in generale, abbiamo:

$$\begin{aligned} s_{2(k+1)-1} &= s_{2k+1} \\ &= s_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} \\ &= s_{2k-1} + \underbrace{(a_{2k+1} - a_{2k})}_{\leq 0} \\ &\leq s_{2k-1} \end{aligned}$$

cosicché la successione di termine generale s_{2k-1} è decrescente.
Analogamente, dalla monotònia di (a_n) segue:

$$\begin{aligned} s_4 &= \underbrace{a_1 - a_2}_{=s_2} + a_3 - a_4 \\ &= s_2 + \underbrace{a_3 - a_4}_{\geq 0} \\ &\geq s_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_6 &= \underbrace{a_1 - a_2 + a_3 - a_4}_{=s_4} + a_5 - a_6 \\ &= s_4 + \underbrace{(a_5 - a_6)}_{\geq 0} \\ &\geq s_4 \end{aligned}$$

ed in generale:

$$\begin{aligned} s_{2(k+1)} &= s_{2k+2} \\ &= s_{2k} + \underbrace{a_{2k+1} - a_{2k+2}}_{\geq 0} \\ &\geq s_{2k} \end{aligned}$$

di modo che la successione (s_{2k}) è crescente.
Infine, abbiamo anche:

$$\begin{aligned} s_{2k} &= s_{2k-1} \underbrace{-a_{2k}}_{\leq 0} \\ &\leq s_{2k-1} \\ s_{2k+1} &= s_{2k} \underbrace{+a_{2k+1}}_{\geq 0} \\ &\geq s_{2k} \end{aligned}$$

e da ciò, sfruttando la monotònia di entrambe le successioni (s_{2k}) ed (s_{2k-1}), traiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$s_2 \leq s_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1$$

cosicché la successione decrescente (s_{2k-1}) è limitata inferiormente da s_2 e la successione crescente (s_{2k}) è limitata superiormente da s_1.
Dal *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne* segue che le due successioni (s_{2k-1}) ed (s_{2k}) sono convergenti; detti allora s^+ ed s_-, rispettivamente, i loro limiti, per l'ipotesi *(1)* abbiamo:

$$\begin{aligned} s^+ - s_- &= \lim_{k \to +\infty} s_{2k-1} - s_{2k} \\ &= \lim_{k \to +\infty} s_{2k-1} - (s_{2k-1} - a_{2k}) \\ &= \lim_{k \to +\infty} a_{2k} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

cosicché $s^+ = s_-$ ed il teorema è dimostrato. □

Osservazione 21 (Approssimazioni della Somma)**:** Notiamo esplicitamente che le somme parziali d'indice dispari forniscono sempre un'*approssimazione per eccesso* della somma di una serie a segni alterni; viceversa, le somme parziali d'indice pari forniscono sempre un'*approssimazione per difetto* della somma di una serie a segni alterni.
Si potrebbe dimostrare, ma ce ne asteniamo, che vale il seguente fatto:

> "Se la serie a segni alterni non ha addendi nulli, l'errore assoluto che si commette approssimando la somma di una serie a segni alterni con la somma parziale n-esima è più piccolo del valore assoluto del primo termine trascurato"

il quale in formule viene espresso dalla disuguaglianza:

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} ,$$

valida per ogni indice n se $a_n > 0$.
Pertanto, se desideriamo approssimare a meno di un errore $\varepsilon > 0$ la somma s di una serie a segni alterni che soddisfa il Criterio di Leibniz, ci basta scegliere uno qualsiasi degli indici n tali che $a_n \leq \varepsilon$ (i quali sono infiniti, a norma della definizione di limite): l'approssimazione desiderata è allora data da s_{n-1}.
Questa circostanza importa, tra le altre cose, la seguente considerazione: se la (a_n) tende a 0 "lentamente", allora è necessario sommare "tantissimi" addendi della serie a segni alterni $\sum(-1)^{n-1}a_n$ per ottenere buone approssimazioni della sua somma.
♦

`Esempio 5 (Serie Armonica Alternata):` Consideriamo la serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, la quale è usualmente detta *serie armonica alternata.*
Dato che $\frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, la serie è a segni alterni secondo la definizione data in precedenza e per studiarne la convergenza possiamo applicare il Criterio di Leibniz.
Poiché $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, la successione (a_n) è decrescente; d'altra parte, è evidente che $a_n > 0$ e che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, cosicché sono soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibiniz e possiamo concludere che la serie armonica alternata converge.

Si dimostra che la serie armonica alternata ha per somma il numero $s = \log 2$, cioé che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 .$$

Per avere un'approssimazione di $\log 2$ con un errore minore di $\varepsilon = 10^{-1}$, basta approssimare $\log 2$ con la somma parziale s_9: infatti, per quanto detto nell'Osservazione precedente, s_9 è un'approssimazione per eccesso tale che:

$$|\log 2 - s_9| < \frac{1}{10} .$$

Usando un calcolatore possiamo verificare che:

$$s_9 = \frac{1879}{2520} \approx 0.745634921$$
$$\log 2 \approx 0.693147181 \cdots$$

cosicché $s_9 - \log 2 \approx 0.05$.
Qualora volessimo un'approssimazione di $\log 2$ a meno di $\varepsilon = 10^{-2}$, dovremmo scegliere l'approssimazione per eccesso s_{99}, per calcolare la quale dovremmo sommare cento addendi. ♢

Osservazione 22 (Importante!)**:** Notiamo esplicitamente che la serie armonica alternata $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge semplicemente pur non essendo assolutamente convergente: infatti, la serie dei moduli:

$$\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$

coincide con la serie armonica, la quale diverge positivamente.
Pertanto la serie armonica alternata costituisce un utile CONTROESEMPIO per mostrare che non vale il viceversa del *Criterio della Convergenza Assoluta*, cioè che la convergenza semplice non implica la convergenza assoluta. ♦

`Esempio 6:` La serie:

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\log n}$$

converge per il Criterio di Leibniz.
Detta s la sua somma, per ottenerne un valore approssimato a meno di $\varepsilon > 0$ ci basta risolvere rispetto ad n la disequazione:

$$\frac{1}{\log n} \leq \varepsilon \ ,$$

determinare la soluzione "più piccola" n_ε e considerare la somma parziale $s_{n_\varepsilon - 1}$.
Ad esempio, se $\varepsilon = 10^{-1}$ abbiamo:

$$\frac{1}{\log n} \leq \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \mathbf{e}^{10} \approx 22026.5$$

da cui si trae $n_\varepsilon = 22027$ e l'approssimazione cercata è:

$$s_{22026} = \sum_{n=2}^{22026} \frac{(-1)^{n-1}}{\log n} \approx -0.9743 \ .$$

Ma, se ε fosse 10^{-2}, troveremmo $n_\varepsilon \approx \mathbf{e}^{100}$, perciò dovremmo sommare un numero di addendi dell'ordine di 10^{43}... Un po' troppi![8] ♢

4.3. **Criterio di Dirichlet *.** Vogliamo osservare esplicitamente che il Criterio di Leibniz è un caso particolare del seguente e più generale:

Criterio di Dirichlet
Siano (a_n) *e* (b_n) *successioni numeriche con* $a_n \geq 0$.
Se:

(1) (a_n) *è infinitesima, cioè* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

(2) (a_n) *è decrescente,*

(3) $\sum b_n$ *ha le somme parziali limitate,*

allora la serie $\sum a_n b_n$ *è convergente.*

La dimostrazione di questo teorema si fa ricorrendo al seguente lemma tecnico che fornisce una tecnica di sommazione analoga all'integrazione per parti:

Lemma Tecnico (Formula di Sommazione per Parti)
Siano (a_n) *e* (b_n) *successioni numeriche e* $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ *risulta:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \ ,$$

con la convenzione che la somma al secondo membro sia nulla per $n = 1$.

Dimostrazione del Lemma Tecnico. Per $n = 1$ si ha $B_1 = b_1$, dunque la formula è banalmente valida.

[8] Per capire l'enormità del numero di addendi richiesti, basta pensare che il numero di stelle osservabili nell'Universo è dell'ordine di 10^{22}.

Se $n > 1$, si ha $b_1 = B_1$ mentre per $k = 2, \dots, n$ risulta $b_k = B_k - B_{k-1}$; pertanto abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_1 B_1 + (a_2 B_2 - a_2 B_1) + (a_3 B_3 - a_3 B_2) + \cdots + (a_n B_n - a_n B_{n-1}) \\ &= -(a_2 - a_1) B_1 - (a_3 - a_2) B_2 - (a_4 - a_3) B_3 - \cdots - (a_n - a_{n-1}) B_{n-1} \\ &\quad + a_n B_n \\ &= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \ ,\end{aligned}$$

come volevamo. □

Dimostrazione del Criterio di Dirichlet. Usando la formula di sommazione per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\ &= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \\ s_{n+p} &= a_{n+p} B_{n+p} - \sum_{k=1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \\ &= a_{n+p} B_{n+p} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k}_{= a_n B_n - s_n} - \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \\ &= a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_n + s_n \end{aligned}$$

ossia:

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_n$$

per ogni $n, p \in \mathbb{N}$. Detto $M \geq 0$ un maggiorante delle somme parziali B_n della serie $\sum b_n$, da quanto appena trovato e dalle ipotesi (2) e (3) del teorema segue immediatamente che:

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= |a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_n| \\ &\leq \underbrace{a_{n+p}}_{\leq a_n} \underbrace{|B_{n+p}|}_{\leq M} + a_n \underbrace{|B_n|}_{\leq M} \\ &\leq 2M a_n \ ; \end{aligned}$$

dato che $a_n \to 0$ per la (1), in corrispondenza di un qualsiasi $\varepsilon > 0$ è possibile determinare $\nu \in \mathbb{R}$ in guisa che:

$$n > \nu \quad \Rightarrow \quad a_n < \frac{\varepsilon}{2M + 1}$$

e ciò implica che:

$$n > \nu, \ p \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |s_{n+p} - s_n| \leq 2M \ a_n < \frac{2M}{2M + 1} \ \varepsilon < \varepsilon$$

cosicché (s_n) soddisfa il Criterio di Convergenza di Cauchy e la serie $\sum a_n b_n$ è necessariamente convergente. □

Osservazione 23: Il Criterio di Dirichlet si usa, ad esempio, per dimostrare che le serie $\sum \frac{\sin n}{n}$ e $\sum \frac{\cos n}{n}$ sono convergenti.
Ciò si fa ambientando il problema in campo complesso, con una costruzione su cui non vogliamo insistere. Il lettore interessato può ritrovare in [DM, Esercizio 12] il ragionamento che conduce alla dimostrazione. ♦

Riferimenti bibliografici

[DM] Di Meglio, G. (2017) *Qualche Esercizio sulle Serie Numeriche*, reperibile su www.docenti.unina.it.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli “Federico II”
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY