COMPLEMENTI SULL'INTEGRAZIONE INDEFINITA

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione

Le presenti note sono proposte come integrazione ed approfondimento degli argomenti trattati a lezione.
In particolare, le prime tre sezioni completano la trattazione, rispettivamente, dei metodi di integrazione delle funzioni razionali, dell'integrazione indefinita per parti e dell'integrazione per sostituzione; mentre la quarta sezione fornisce alcuni spunti di riflessione per approfondire due argomenti marginali, citati *en passant* durante le lezioni.
Alcuni paragrafi sono contrassegnati con l'asterisco e, come si suole scrivere in queste situazioni, possono essere omessi in prima lettura senza pregiudicare la comprensione del testo.

Gli esercizi corrispondenti agli argomenti trattati in questi fogli si trovano in [DM].

Nella stesura di codeste note ho consultato ed, a tratti, seguito pedissequamente il testo [FG, cap. 9]. La lettura di tale capitolo è caldamente consigliata agli studenti

Date: 28 dicembre 2017.

che intendano prendere dimestichezza con le più importanti tecniche di integrazione indefinita.

1. Integrazione delle Funzioni Razionali

In questo paragrafo vogliamo mostrare che le funzioni razionali reali, cioè le funzioni che si esprimono come rapporto tra polinomi a coefficienti reali, sono sempre elementarmente integrabili e illustrare un metodo generale per il calcolo esplicito delle loro primitive.
Tale metodo combina la *scomposizione in fratti semplici* con la *formula di Hermite*[1] e, seppure sia molto laborioso da mettere in pratica, conduce sempre alla determinazione delle primitive corrette.

1.1. **Polinomi e loro Proprietà Fondamentali.**

Richiamiamo, in maniera molto sintetica ed omettendo del tutto le dimostrazioni, alcune proprietà fondamentali dei polinomi che saranno usate frequntemente in seguito.

Definizione 1 (Polinomi a Coefficienti Reali)
Fissati $N+1$ numeri $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ con $a_N \neq 0$, la funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

si chiama *polinomio a coefficieni reali*; i numeri $a_0, \dots, a_N$ si chiamano *coefficienti di* $p(x)$ ed il numero $N \in \mathbb{N}$ si chiama *grado di* $p(x)$ e si denota pure con $\operatorname{grad} p$.
Si chiama *polinomio nullo* la funzione identicamente nulla in $\mathbb{R}$ e si denota semplicemente col simbolo 0; al polinomio nullo non si attribuisce grado.[2]
Fissati due polinomi $p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ e $q(x) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^k$, il *polinomio somma di* $p(x)$ *e* $q(x)$ è l'applicazione che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ la quantità $p(x) + q(x)$; invece, il *polinomio prodotto di* $p(x)$ *e* $q(x)$ è l'applicazione che associa ad $x \in \mathbb{R}$ il numero $p(x) \cdot q(x)$.

Osservazione 1: Le espressioni esplicite di $p(x) + q(x)$ e $p(x) \cdot q(x)$ si ottengono applicando le usuali regole del calcolo letterale. ♦

L'insieme dei polinomi a coefficienti reali è, per molti versi, simile all'insieme dei numeri interi: infatti, valgono le proprietà riassunte nelle proposizioni seguenti:

Proposizione 1 (Proprietà dei Polinomi)
La somma di polinomi è associativa, commutativa, il polinomio nullo è neutro rispetto alla somma e l'opposto del polinomio $p(x)$ è il polinomio $-p(x) = \sum_{k=0}^{N} (-a_k) x^k$ che ha i coefficienti opposti a quelli di $p(x)$.
Il prodotto di polinomi è associativo, commutativo, il polinomio unitario 1 è neutro rispetto al prodotto e sono dotati di reciproco tutti e soli i polinomi di grado 0, i.e. $p(x) = a_0$ con $a_0 \neq 0$ (il reciproco di $p(x)$ essendo il polinomio $p^{-1}(x) = \frac{1}{a_0}$); inoltre, il prodotto di polinomi è distributivo rispetto alla somma.
Se $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi di gradi N ed M, il grado di $p(x) + q(x)$ è $\leq \max\{N, M\}$ mentre per il prodotto vale l'uguaglianza:

$$\operatorname{grad}(p \cdot q) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q \ ,$$

detta Regola di Addizione dei Gradi.

[1]Charles Hermite (1822 – 1901), matematico francese che dimostrò la trascendenza di **e**.
[2]Talvolta, convenzionalmente, gli si attribuisce grado $-\infty$.

TEOREMA 1 (Divisione Euclidea)
Siano $p_1(x)$ *e* $p_2(x)$ *polinomi con* $p_2(x)$ *non nullo e* $\operatorname{grad} p_1 \geq \operatorname{grad} p_2$*.*
Esistono e sono univocamente determinati due polinomi $q(x)$ *(*quoziente*) ed* $r(x)$ *(*resto*) tali che:*

(1) $\operatorname{grad} q = \operatorname{grad} p_1 - \operatorname{grad} p_2$*;*

(2) $r(x) = 0$ *oppure* $r(x) \neq 0$ *e* $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p_2$*;*

(3) $p_1(x) = q(x) \cdot p_2(x) + r(x)$ *.*

Osservazione 2: Il TEOREMA precedente vale, e molto banalmente, anche se $\operatorname{grad} p_1 < \operatorname{grad} p_2$: basta prendere $q(x) = 0$ ed $r(x) = p_1(x)$. ♦

DEFINIZIONE 2
Si dice che un polinomio $p_1(x)$ è divisibile per $p_2(x)$ se e solo se il resto $r(x)$ della divisione euclidea $p_1(x) \div p_2(x)$ è il polinomio nullo.

DEFINIZIONE 3 (Radici di un Polinomio)
Siano $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali ed $x_0 \in \mathbb{R}$ (od $x_0 \in \mathbb{C}$).
Si dice che x_0 è una *radice reale* (o *complessa*) *di* $p(x)$ se risulta $p(x_0) = 0$.

PROPOSIZIONE 2 (Teorema di Ruffini)
Siano $p(x)$ *un polinomio a coefficienti reali ed* $x_0 \in \mathbb{R}$*.*
Si ha che x_0 *è radice reale di* $p(x)$ *se e solo se* $p(x)$ *è divisibile per* $x - x_0$*.*

PROPOSIZIONE 3
Siano $p(x)$ *un polinomio a coefficienti reali ed* $x_0 = a_0 + \mathbf{i}b_0 \in \mathbb{C}$*.*
Si ha che x_0 *è radice complessa di* $p(x)$ *se e solo se anche* $\overline{x}_0 = a_0 - \mathbf{i}b_0$ *lo è e ciò accade se e solo se* $p(x)$ *è divisibile per* $(x - a_0)^2 + b_0^2 = x^2 - 2a_0x + (a_0^2 + b_0^2)$*.*

Osservazione 3: La PROPOSIZIONE 3 assicura che ogni polinomio $p(x)$ a coefficienti reali ha radici complesse *a coppie coniugate*; da ciò segue, ad esempio, che i polinomi di grado dispari hanno tutti almeno una radice reale.[3] ♦

Le due PROPOSIZIONI precedenti consentono le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 4 (Molteplicità di una radice)
Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali.
Si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è una *radice di* $p(x)$ *con molteplicità* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ se e solo se:

(i) $p(x)$ è divisibile per $(x - x_0)^n$,

(ii) $p(x)$ non è divisibile per $(x - x_0)^{n+1}$.

Analogamente, si dice che $x_0 = a_0 + \mathbf{i}b_0 \in \mathbb{C}$ è una *radice di* $p(x)$ *con molteplicità* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ se e solo se:

(i) $p(x)$ è divisibile per $\left(x^2 - 2a_0x + (a_0^2 + b_0^2)\right)^n$,

(ii) $p(x)$ non è divisibile per $\left(x^2 - 2a_0x + (a_0^2 + b_0^2)\right)^{n+1}$.

[3] Ciò segue anche dall'applicazione del *Teorema degli Zeri*.

Definizione 5 (Radici semplici e radici multiple)
Si dice che x_0 (reale o complesso) è una *radice semplice di* $p(x)$ se e solo se x_0 è una radice di $p(x)$ con molteplicità 1.
Invece, si dice che x_0 (reale o complesso) è una *radice multipla di* $p(x)$ se e solo se x_0 è una radice di $p(x)$ con molteplicità $n > 1$.

Abbiamo già osservato che i polinomi a coefficienti reali di grado dispari hanno almeno una radice reale; d'altra parte ciò non è vero per i polinomi di grado pari, poiché ad esempio il polinomio $p(x) = x^2 + 1$ non ha radici reali. Tuttavia, se (come d'uso) pensiamo al campo reale $\mathbb{R}$ come ad un sottoinsieme del campo complesso $\mathbb{C}$, vale il:

Teorema 2 (Teorema Fondamentale dell'Algebra)
Ogni polinomio $p(x)$ *a coefficienti reali con* $\operatorname{grad} p \geq 1$ *ha almeno una radice in* $\mathbb{C}$.

Osservazione 4: A ben vedere, il *Teorema Fondamentale dell'Algebra* ci assicura che ogni polinomio $p(x)$ a coefficienti reali ha *tutte* le radici in $\mathbb{C}$.
Infatti, se x_0 è una radice reale (o complessa) di $p(x)$, a norma delle Proposizioni 2 e 3, $p(x)$ si può scrivere come prodotto di un polinomio di primo grado (o di secondo grado con $\Delta < 0$) per un altro polinomio reale $q(x)$ di grado $\operatorname{grad} p - 1$ (o $\operatorname{grad} p - 2$); per il *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, il polinomio a coefficienti reali $q(x)$ ha in $\mathbb{C}$ almeno una radice, la quale risulta anche radice di $p(x)$, perciò esso si può scrivere come prodotto di un polinomio di primo grado (o di secondo grado con $\Delta < 0$) per un altro polinomio reale con grado uguale a $\operatorname{grad} q - 1$ (o $\operatorname{grad} q - 2$); etc... Ragionando ricorsivamente, si vede che $p(x)$ si può scomporre in prodotto di un numero finito di polinomi che hanno radici in $\mathbb{C}$. ♦

Il ragionamento svolto nell'**Osservazione** precedente ci aiuta ad intuire la validità del seguente risultato:

Proposizione 4 (Fattorizzazione reale di polinomi a coefficienti reali)
Sia $p(x)$ *un polinomio a coefficienti reali con*
gradp ≥ 1.
Esistono:

- *un numero finito* $h \in \mathbb{N}$ *di polinomi di primo grado* $a_1x + b_1$, $a_2x + b_2$,...,$a_hx + b_h$ *(con* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *ed* $a_i \neq 0$ *per ogni* $i = 1, \ldots, h$*) tutti distinti,*
- *un numero finito* $k \in \mathbb{N}$ *di polinomi di secondo grado con discriminante negativo* $\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$,...,$\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k$ *(con* $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j \neq 0$ *e* $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\alpha_j\gamma_j < 0$ *per ogni* $j = 1, \ldots, k$*) tutti distinti,*
- *un numero finito* $h + k$ *di esponenti* $n_1, \ldots, n_h$, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} - \{0\}$

tali che:

$$p(x) = (a_1x+b_1)^{n_1} \cdots (a_hx+b_h)^{n_h} \cdot (\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1} \cdots (\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k)^{m_k} \tag{1}$$

e $\operatorname{grad} p = n_1 + \cdots + n_h + 2(m_1 + \cdots + m_k)$.
Inoltre, gli $h + k$ *polinomi presenti nella fattorizzazione* (1) *sono univocamente determinati* a meno di costanti moltiplicative *non nulle.*

Osservazione 5: La fattorizzazione (1) ricorda la scomposizione di un numero intero in fattori primi. ♦

Osservazione 6 (Fattorizzazione di polinomi con sole radici semplici)**:** Un polinomio a coefficienti reali $p(x)$ ha sole radici semplici se e solo se nella sua fattorizzazione (1) gli esponenti n_i ed m_j sono tutti uguali ad 1. ♦

Osservazione 7 (Fattorizzazione di polinomi con qualche radice multipla)**:** Un polinomio a coefficienti reali $p(x)$ ha qualche radice multipla se e solo se nella sua fattorizzazione (1) esiste almeno uno tra gli esponenti n_i ed m_j che è ≥ 2. ♦

1.2. **Integrazione di Fratti Semplici.** Diamo la seguente definizione:

Definizione 6 (Fratti Semplici Reali)
Si chiama *fratto semplice reale* ogni funzione razionale del tipo:

$$\frac{A}{ax+b} \qquad \text{o} \qquad \frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \tag{2}$$

con $a, b, \alpha, \beta, \gamma, A, B, C \in \mathbb{R}$, $a, \alpha \neq 0$ e $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

`Esempio 1:` Sono fratti semplici le funzioni:

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{2}{x^2-2x+1} \qquad \frac{1}{x^2+1}$$
$$\frac{\pi}{x+4} \qquad \frac{2x-5}{4x^2-4x+3} \qquad \frac{\mathbf{e}-3x}{x^2+2x+5}\,,$$

mentre non sono fratti semplici le funzioni:

$$\frac{x-1}{x-2} \qquad \frac{x^3+2x}{(x-1)^2} \qquad \frac{1}{x^2+3x+2}\,.$$

Di immediata verifica sono i risultati compendiati nella seguente:

Proposizione 5 (Integrali di Fratti Semplici)
Se $a, \alpha \neq 0$ e $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, allora:

$$\int \frac{A}{ax+b}\,\mathrm{d}\,x = \frac{A}{a}\,\log|ax+b| + C \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\,\arctan(\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{|\Delta|}}) + C \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{B}{2\alpha}\,\log\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) \\ &\quad + \frac{2\alpha C-\beta B}{\alpha\sqrt{|\Delta|}}\,\arctan\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + C\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Osservazione 8: Le formule (3) – (5) sono difficili a ricordarsi. Pertanto consigliamo vivamente allo studioso lettore di comprendere a fondo la tecnica usata per scomporre l'integrando nei vari passaggi delle dimostrazione. ♦

Dimostrazione. La (3) è banalissima, quindi proviamo la (4) e la (5).

Per noti fatti sui polinomi di secondo grado, abbiamo:

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma &= \alpha \left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]\\ &= \alpha \left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]\\ &= \frac{|\Delta|}{4\alpha} \left[\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2+1\right] ,\end{aligned}$$

dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\, \mathrm{d}\, x &= \int \frac{4\alpha}{|\Delta|}\, \frac{1}{\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2+1}\, \mathrm{d}\, x\\ &= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \int \frac{\frac{2\alpha}{\sqrt{|\Delta|}}}{\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2+1}\, \mathrm{d}\, x ,\end{aligned}$$

con l'ultimo integrale immediato, poiché del tipo dell'arcotangente. Conseguentemente:

$$\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\, \mathrm{d}\, x = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\, \arctan\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{|\Delta|}}\right)+C ,$$

come volevamo.
Analogamente, abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} &= B\, \frac{x+\frac{C}{B}}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\\ &= \frac{B}{2\alpha}\, \frac{2\alpha x+\frac{2\alpha C}{B}}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\\ &= \frac{B}{2\alpha}\, \frac{2\alpha x+\beta}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B}{2\alpha}\, \frac{\frac{2\alpha C}{B}-\beta}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\\ &= \frac{B}{2\alpha}\, \frac{2\alpha x+\beta}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{2\alpha C-\beta B}{2\alpha}\, \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} ,\end{aligned}$$

cosicché l'integrale (5) è somma di un integrale immediato del tipo del logaritmo e di un integrale del tipo (4); dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\, \mathrm{d}\, x = &\frac{B}{2\alpha}\, \log\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\\ &+\frac{2\alpha C-\beta B}{\alpha\sqrt{|\Delta|}}\, \arctan\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{|\Delta|}}\right)+C ,\end{aligned}$$

come volevamo. □

Osservazione 9: La Proposizione precedente mostra che i fratti semplici sono tutti elementarmente integrabili, nel senso che essi hanno primitive che sono funzioni elementari. Più avanti (cfr. §4) si vedrà che esistono funzioni elementari che non godono di tale proprietà. ♦

1.3. **Decomposizione di Funzioni Razionali con Denominatore Avente solo Radici Semplici: i Fratti Semplici.** Cominciamo ad illustrare il metodo di integrazione che si applica alle funzioni razionali che hanno il denominatore dotato di sole radici (sia reali sia complesse) semplici.
Ricordiamo che un polinomio che abbia solo radici semplici si può scomporre nel prodotto di fattori di primo grado tutti distinti e di fattori di secondo grado con discriminante negativo tutti distinti, i.e. si può scrivere:

$$p(x) = (a_1 x + b_1) \cdots (a_h x + b_h) \cdot (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \cdots (\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k)$$

con $h, k \in \mathbb{N}$, $h + 2k = \operatorname{grad} p$ ed $a_i, b_i, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ ed $a_i, \alpha_j \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, h$ e $j = 1, \ldots, k$ (cfr. Proposizione 4 ed **Osservazione 6**).

Vogliamo mostrare che le funzioni razionali $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ ($p_1(x)$ e $p_2(x)$ polinomi) col denominatore $p_2(x)$ avente solo radici semplici sono elementarmente integrabili e fornire un metodo di calcolo del loro integrale indefinito.
Il metodo si basa sulla validità della seguente proposizione (che non dimostriamo):

Proposizione 6 (Scomposizione in Fratti Semplici)
Sia $f(x) := \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ *una funzione razionale con* $\operatorname{grad} p_1 < \operatorname{grad} p_2$ *e col denominatore* p_2 *avente solo radici semplici fattorizzato nella forma:*

$$p_2(x) = (a_1 x + b_1) \cdots (a_h x + b_h) \cdot (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \cdots (\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k) .$$

Esistono e sono univocamente determinate *esattamente* $\operatorname{grad} p_2 = h + 2k$ *costanti* $A_1, \ldots A_h, B_1, C_1, \ldots, B_k, C_k \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$\begin{aligned} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} &= \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \cdots + \frac{A_h}{a_h x + b_h} \\ &\quad + \frac{B_1 x + C_1}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \cdots + \frac{B_k x + C_k}{\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k} \end{aligned} \tag{6}$$

per ogni $x \in \operatorname{Dom} f$.
La (6) *si chiama* scomposizione in fratti semplici di $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$.

La dimostrazione di tale risultato è elementare, ma piuttosto laboriosa; pertanto è omessa e favore di alcuni esempi.
A tali esempi, però, premettiamo qualche osservazione di carattere metodologico.

Osservazione 10: La formula (6) consente di decomporre l'integrale di una funzione razionale in somma di integrali di fratti semplici, i quali si possono calcolare "a mano" per la Proposizione 5. ♦

Osservazione 11: Per applicare con profitto la Proposizione 6 al calcolo di un integrale è necessario conoscere *esplicitamente* la fattorizzazione del denominatore della funzione razionale da integrare. ♦

Osservazione 12 (A mo' di controllo. . .)**:** Le costanti $A_1, \ldots, A_h, B_1, C_1, \ldots, B_k, C_k$ sono esattamente tante quante $\operatorname{grad} p_2$. ♦

`Esempio 2:` Calcoliamo:

$$\int \frac{1}{x^4 + x} \, \mathrm{d}x .$$

La funzione integranda ha numeratore $p_1(x) = 1$ di grado minore del denominatore $p_2(x) = x^4 + x$; inoltre, per noti fatti, abbiamo:

$$p_2(x) = x(x^3 + 1) = x(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

e da ciò segue che $p_2(x)$ ha solo zeri semplici. La PROPOSIZIONE 6 assicura che esistono e sono uniche 4 costanti $A_1, A_2, B_1, C_1 \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$:

$$\frac{1}{x^4 + x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 - x + 1} ;$$

per determinare le costanti incognite A_1, A_2, B_1, C_1 svolgiamo anzitutto la somma al secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4 + x} &= \frac{A_1(x^3+1) + A_2 x(x^2 - x + 1) + (B_1 x + C_1)(x^2 + x)}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(A_1 + A_2 + B_1)x^3 + (-A_2 + B_1 + C_1)x^2 + (A_2 + C_1)x + A_1}{x^2 - x + 1} ;\end{aligned}$$

ciò fatto, liberiamo dai denominatori e constatiamo che l'uguaglianza sussiste se e solo se i polinomi $p_1(x) = 1$ e $(A_1+A_2+B_1)x^3+(-A_2+B_1+C_1)x^2+(A_2+C_1)x+A_1$ hanno i coefficienti ordinatamente uguali (per il *Principio di Identità dei Polinomi*), ossia se le incognite A_1, A_2, B_1, C_1 soddisfano il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + B_1 = 0 \\ -A_2 + B_1 + C_1 = 0 \\ A_2 + C_1 = 0 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

che si risolve con uno dei metodi noti dalle scuole (e.g., per sostituzione o per eliminazione) e fornisce:

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{2}{3} \\ A_2 = -\frac{1}{3} \\ C_1 = \frac{1}{3} \\ A_1 = 1 \end{cases} ;$$

pertanto:

$$\frac{1}{x^4 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x - 1}{3(x^2 - x + 1)} .$$

Conseguentemente, l'integrale di partenza si calcola decomponendo in somma come segue:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4 + x}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &\quad - \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \log|x| - \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\log(x^2 - x + 1) + C ,\end{aligned}$$

avendo tenuto presente che tutti gli integrali al secondo membro erano immediati (poiché del tipo del logaritmo). ♢

`Esempio 3:` Calcoliamo:

$$\int \frac{3}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,\mathrm{d}\,x .$$

La funzione integranda ha numeratore $p_1(x) = 3$ di grado minore del denominatore $p_2(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$; d'altro canto, il denominatore ha tre radici reali semplici perché risulta:

$$p_2(x) = x(x-1)(x+3) ;$$

conseguentemente, esistono e sono uniche 3 costanti $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{3}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+3} ;$$

per determinare le costanti svolgiamo la somma al secondo membro ottenendo:

$$\frac{3}{x^3+2x^2-3x} = \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(2A_1+3A_2-A_3)x-3A_1}{x^3+2x^3+3x} \; ,$$

da cui, liberando dai denominatori ed invocando il *Principio d'Identità dei Polinomi*, ricaviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=0 \\ 2A_1+3A_2-A_3=0 \\ -3A_1=1 \end{cases}$$

che fornisce:

$$\begin{cases} A_1=-1 \\ A_2=\frac{3}{4} \\ A_3=\frac{1}{4} \end{cases} \; ,$$

cosicché:

$$\frac{3}{x^3+2x^2-3x} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+3)} \; .$$

Ne consegue che l'integrale assegnato si decompone in somma di integrali del tipo del logaritmo:

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^3+2x^2-3x} \, \mathrm{d}\,x &= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1} \, \mathrm{d}\,x \\ &\quad + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3} \, \mathrm{d}\,x \\ &= -\log|x| + \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{3}{4}\log|x-3| + C \; . \end{aligned}$$

◊

`Esempio 4:` Calcoliamo:

$$\int \frac{3\sqrt{2}x^2}{x^4+81} \, \mathrm{d}\,x \; .$$

La funzione integranda ha numeratore $p_1(x) = 3\sqrt{2}x^2$ di grado minore del denominatore $p_2(x) = x^4+81$; d'altra parte, il denominatore non ha radici reali e, per determinarne la fattorizzazione, ragioniamo come segue: completando il quadrato e sfruttando la scomposizione della differenza di quadrati, troviamo:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^4+18x^2+81-18x^2 \\ &= (x^2+9)^2-18x^2 \\ &= (x^2-3\sqrt{2}x+9)\cdot(x^2+3\sqrt{2}x+9) \; , \end{aligned}$$

cosicché $p_2(x)$ si fattorizza come prodotto di due fattori di secondo grado con discriminante negativo. La Proposizione 6 importa che esistono e sono uniche 4 costanti $B_1, C_1, B_2, C_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{3\sqrt{2}x^2}{x^4+81} = \frac{B_1x+C_1}{x^2-3\sqrt{2}x+9} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+3\sqrt{2}x+9} \; ;$$

per determinare le costanti, svolgiamo la somma al secondo membro ottenendo:

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{2}x^2}{x^4+81} &= \frac{(B_1x+C_1)(x^2+3\sqrt{2}x+9)+(B_2x+C_2)(x^2-3\sqrt{2}x+9)}{x^4+81} \\ &= \frac{(B_1+B_2)x^3+(3\sqrt{2}B_1+C_1-3\sqrt{2}B_2+C_2)x^2}{x^4+81} \\ &\quad + \frac{(9B_1+3\sqrt{2}C_1+9B_2-3\sqrt{2}C_2)x+(9C_1+9C_2)}{x^4+81}\ ,\end{aligned}$$

liberiamo dai denominatori ed, invocando il *Principio di Identità dei Polinomi*, impostiamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} B_1+B_2=0 \\ 3\sqrt{2}B_1+C_1-3\sqrt{2}B_2+C_2=3\sqrt{2} \\ 9B_1+3\sqrt{2}C_1+9B_2-3\sqrt{2}C_2=0 \\ 9C_1+9C_2=0 \end{cases} ,$$

da cui traiamo:

$$\begin{cases} B_1=\frac{1}{2} \\ B_2=-\frac{1}{2} \\ C_1=0 \\ C_2=0 \end{cases} ;$$

pertanto la scomposizione in fratti semplici dell'integrando è:

$$\frac{3\sqrt{2}x^2}{x^4+81} = \frac{x}{2(x^2-3\sqrt{2}x+9)} - \frac{x}{2(x^2+3\sqrt{2}x+9)}\ .$$

L'integrale assegnato si decompone in somma come:

$$\begin{aligned}\int \frac{3\sqrt{2}x^2}{x^4+81}\ \mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2-3\sqrt{2}x+9}\ \mathrm{d}\,x \\ &\quad -\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+3\sqrt{2}x+9}\ \mathrm{d}\,x\ ,\end{aligned}$$

con gli integrali al secondo membro che si calcolano decomponendo ulteriormente in somma di due integrali immediati (uno del tipo del logaritmo, l'altro dell'arcotangente), cosicché:

$$\begin{aligned}\int \frac{3\sqrt{2}x^2}{x^4+81}\ \mathrm{d}\,x &= \frac{1}{4}\log(x^2-3\sqrt{2}x+9) - \frac{1}{4}\log(x^2+3\sqrt{2}x+9) \\ &\quad + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x-1\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x+1\right) + C\ .\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Illustriamo ora come trattare il caso generale di funzioni razionali col denominatore avente solo radici semplici, i.e. il caso in cui il grado del numeratore $p_1(x)$ può essere uguale o maggiore del grado del denominatore $p_2(x)$.
Se $\operatorname{grad} p_1 \geq \operatorname{grad} p_2$, il *Teorema della Divisione Euclidea* tra polinomi assicura che esistono e sono univocamente determinati due polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ che godono delle proprietà (1) – (3); da ciò segue immediatamente che la funzione razionale $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ si può scrivere come somma del polinomio $q(x)$ e della funzione razionale $\frac{r(x)}{p_2(x)}$, i.e. che:

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)}$$

per ogni $x \in \operatorname{Dom} f$; conseguentemente, l'integrale di f si decompone nella somma:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}\,x = \int q(x)\ \mathrm{d}\,x + \int \frac{r(x)}{p_2(x)}\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

in cui il primo addendo si calcola in maniera banale (poiché somma di integrali di potenze) ed il secondo addendo si calcola decomponendo in fratti semplici con l'ausilio della PROPOSIZIONE 6.
Forniamo il seguente:

`Esempio 5:` Calcoliamo:

$$\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+2x^2-3x+3}{x^3+2x^2-3x}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Dato che il grado del numeratore $p_1(x)$ è maggiore di quello del denominatore $p_2(x)$, svolgiamo la divisione $p_1(x) \div p_2(x)$ ottenendo quoziente $q(x) = x^2+1$ e resto $r(x) = 3$; conseguentemente l'integrale assegnato si decompone nella somma:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+2x^2-3x+3}{x^3+2x^2-3x}\ \mathrm{d}\,x &= \int x^2\ \mathrm{d}\,x + \int 1\ \mathrm{d}\,x \\ &\quad + \int \frac{3}{x^3+2x^2-3x}\ \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \log|x| \\ &\quad + \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{3}{4}\log|x+3| + C\ ,\end{aligned}$$

in cui abbiamo sfruttato il risultato di un `Esempio` precedente. ♢

1.4. **Decomposizione di Funzioni Razionali aventi Denominatore con qualche Radice Multipla: la Formula di Hermite.** In generale, il denominatore di una funzione razionale può non avere unicamente radici (reali o complesse) semplici; in tal caso, il polinomio al denominatore $p_2(x)$ si può fattorizzare come prodotto di un certo numero di fattori di primo grado, ognuno elevato ad una certa potenza, e di fattori di secondo grado col discriminante negativo, ognuno elevato ad una certa potenza.
Non potendo applicare la PROPOSIZIONE 6, possiamo ricorrere al seguente risultato:

PROPOSIZIONE 7 (Formula di Hermite)
Sia $f(x) := \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ *una funzione razionale con* $\operatorname{grad} p_1 < \operatorname{grad} p_2$ *e col denominatore* $p_2(x)$ *fattorizzato nella forma:*

$$p_2(x) = (a_1x+b_1)^{n_1}\cdots(a_hx+b_h)^{n_h}\cdot(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1}\cdots(\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k)^{m_k}$$

con $\operatorname{grad} p_2 = n_1+\cdots+n_h+2(m_1+\cdots+m_k)$ *ed almeno uno tra gli esponenti* n_i *ed* m_j *maggiore di* 1 *(cfr.* PROPOSIZIONE 4 *ed* **Osservazione 7***).*
Posto:

$$\begin{aligned}p_2^*(x) &:= (a_1x+b_1)^{n_1-1}\cdots(a_hx+b_h)^{n_h-1} \\ &\quad\ \cdot(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1-1}\cdots(\alpha_kx^2+\beta_kx+\gamma_k)^{m_k-1} \\ N &:= \operatorname{grad} p_2^*\ ,\end{aligned}$$

esistono e sono univocamente determinate *esattamente* $h+2k$ *costanti* $A_1, \dots A_h$, $B_1, C_1, \dots, B_k, C_k \in \mathbb{R}$ *ed* N *coefficienti* $a_0, a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$
\begin{aligned}
\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = & \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \cdots + \frac{A_h}{a_h x + b_h} \\
& + \frac{B_1 x + C_1}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \cdots + \frac{B_k x + C_k}{\alpha_k x^2 + \beta_k x + \gamma_k} \\
& + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} \left[\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{N-1} x^{N-1}}{p_2^*(x)} \right]
\end{aligned} \tag{7}
$$

per ogni $x \in \mathrm{Dom}\, f$.
La (7) *si chiama* scomposizione di $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ mediante la formula di Hermite.

Anche in questo caso la dimostrazione di tale risultato è elementare, ma piuttosto laboriosa; pertanto è omessa e favore di alcuni esempi.
A tali esempi, però, premettiamo il solito paio di osservazioni di carattere metodologico.

Osservazione 13: La formula (7) consente di decomporre l'integrale di una funzione razionale in somma di integrali di fratti semplici, i quali si possono calcolare "a mano" per la Proposizione 5, e dell'integrale di una derivata, il quale restituisce sempre la funzione razionale $\frac{a_0 + a_1 x + \cdots a_{N-1} x^{N-1}}{p_2^*(x)}$. ♦

Osservazione 14: Per applicare con profitto la Proposizione 7 al calcolo di un integrale è necessario conoscere *esplicitamente* la fattorizzazione del denominatore della funzione razionale da integrare. ♦

Osservazione 15 (A mo' di controllo. . .)**:** Le costanti ed i coefficienti $A_1, \dots, A_h$, $B_1, C_1, \dots, B_k, C_k$ ed $a_0, \dots, a_{N-1}$ sono esattamente $\mathrm{grad}\, p_2$. ♦

`Esempio 6:` Calcoliamo[4]:

$$
\int \frac{1}{(x^2+1)^3} \, \mathrm{d}\, x \, .
$$

Il polinomio p_2 a denominatore ha grado maggiore di p_1 al numeratore ed in più è già fattorizzato: accorgendoci del fatto che nella fattorizzazione compare un polinomio di secondo grado con discriminante negativo, cioè x^2+1, elevato a potenza d'esponente $m_1 = 3$, usiamo direttamente la formula di Hermite. Poiché:

$$
\begin{aligned}
p_2^*(x) &= (x^2+1)^2 \\
N &= 4 \, ,
\end{aligned}
$$

esistono 6 costanti $B_1, C_1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$
\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} \left[\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{(x^2+1)^2} \right] \; ;
$$

[4] L'integrale proposto si può calcolare anche sfruttando l'integrazione per parti e le formule di ricorrenza. Si veda più avanti.

per determinare le costanti, calcoliamo esplicitamente il secondo membro svolgendo la derivata e la somma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)^3} &= \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{(a_1+2a_2x+3a_3x^2)(x^2+1)-4x(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{(B_1x+C_1)(x^2+1)^2+(a_1+2a_2x+3a_3x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^3} \\ &\quad - \frac{4x(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{B_1x^5+(C_1-a_3)x^4+(2B_1-2a_2)x^3+(2C_1-3a_1+3a_3)x^2}{(x^2+1)^3} \\ &\quad + \frac{(B_1-4a_0+2a_2)x+(C_1+a_1)}{(x^2+1)^3} \ ,\end{aligned}$$

poi liberiamo dai denominatori ed invochiamo il *Principio d'Identità dei Polinomi* per impostare il sistema:

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ C_1 - a_3 = 0 \\ 2B_1 - 2a_2 = 0 \\ 2C_1 - 3a_1 + 3a_3 = 0 \\ B_1 - 4a_0 + 2a_2 = 0 \\ C_1 + a_1 = 1 \end{cases} ,$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} B_1 = a_0 = a_2 = 0 \\ C_1 = a_3 = \frac{3}{8} \\ a_1 = \frac{5}{8} \end{cases} ;$$

pertanto:

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{8(x^2+1)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[\frac{5x+3x^3}{8(x^2+1)^2}\right] ,$$

da cui segue:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\ \mathrm{d}\,x = \frac{3}{8}\arctan x + \frac{5x+3x^3}{8(x^2+1)^2} + C \ .$$

$\diamondsuit$

`Esempio 7:` Calcoliamo:

$$\int \frac{x^5-3}{(x^4+x^2)^2}\ \mathrm{d}\,x \ .$$

Il grado del numeratore $p_1(x) = x^5 - 3$ è minore di quello del denominatore $p_2(x) = (x^4+x^2)^2$; d'altro canto, avendosi:

$$p_2(x) = x^4(x^2+1)^2 \ ,$$

dobbiamo applicare la formula di Hermite. Conseguentemente, visto che $p_2^*(x) = x^3(x^2+1)$ ed $N = 5$, dobbiamo determinare le 8 costanti A_1, B_1, C_1 ed a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tali che:

$$\frac{x^5-3}{(x^4+x^2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4}{x^5+x^3}\right] ;$$

sviluppando la derivata e facendo un po' di calcolo, troviamo:

$$\begin{aligned}\frac{x^5-3}{(x^4+x^2)^2} &= \frac{A_1}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}\\ &\quad -\frac{a_4x^6+2a_3x^5+(3a_2-a_4)x^4+4a_1x^3+(5a_0+a_2)x^2+2a_1x+3a_0}{(x^4+x^2)^2}\\ &= \frac{(A_1+B_1)x^7+(C_1-a_4)x^6+(2A_1+B_1-2a_3)x^5+(C_1-3a_2+a_4)x^4}{(x^4+x^2)^2}\\ &\quad +\frac{(A_1-4a_1)x^3+(-5a_0-a_2)x^2-2a_1x-3a_0}{(x^4+x^2)^2}\end{aligned}$$

da cui, liberando dal denominatore ed invocando il *Principio di Identità* ricaviamo il sistema:

$$\begin{cases} A_1+B_1=0\\ C_1-a_4=0\\ 2A_1+B_1-2a_3=1\\ C_1-3a_2+a_4=0\\ A_1-4a_1=0\\ -5a_0-a_2=0\\ -2a_1=0\\ -3a_0=-3\end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} A_1=B_1=a_1=0\\ C_1=-\frac{15}{2}\\ a_0=1\\ a_2=-5\\ a_3=-\frac{1}{2}\\ a_4=-\frac{15}{2}\end{cases}.$$

Conseguentemente la scomposizione dell'integrando con la formula di Hermite è:

$$\frac{x^5-3}{(x^4+x^2)^2}=-\frac{15}{2(x^2+1)}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[\frac{2-10x^2-x^3-15x^4}{2(x^5+x^3)}\right]$$

e risulta:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5-3}{(x^4+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x &= -\frac{15}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x+\frac{2-10x^2-x^3-15x^4}{2(x^5+x^3)}\\ &= -\frac{15}{2}\arctan x+\frac{2-10x^2-x^3-15x^4}{2(x^5+x^3)}+C\,.\end{aligned}$$

♢

Il caso generale, ossia quello in cui $\operatorname{grad} p_1 \geq \operatorname{grad} p_2$, si gestisce allo stesso modo di quando si hanno solo radici semplici, cioè determinando il quoziente $q(x)$ ed il resto $r(x)$ della divisione euclidea $p_1(x)\div p_2(x)$ e decomponendo in somma:

$$\int\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}\,x=\int q(x)\,\mathrm{d}\,x+\int\frac{r(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}\,x\,,$$

con il primo integrale a secondo membro immediato ed il secondo da calcolare con la formula di Hermite.

2. Integrazione per Parti

2.1. **Formula d'Integrazione per Parti e Prime Applicazioni.** Proviamo la:

Proposizione 8 (Integrazione per Parti)
Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni definite in un intervallo I non ridotto ad un punto. Se g è derivabile in I e se $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f in I, allora vale la formula:

$$\int f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x = F(x)\ g(x) - \int F(x)\ g'(x)\ \mathrm{d}\,x\ , \tag{8}$$

da intendersi nel senso che per ogni primitiva φ di $f \cdot g$ esiste una primitiva ψ di $F \cdot g'$ tale che:

$$\varphi(x) = F(x)\ g(x) - \psi(x)\ .$$

Dimostrazione. Sia φ una primitiva di $f \cdot g$. Posto $\psi := F \cdot g - \varphi$, la ψ è derivabile in I e si ha:

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \Big(F(x) \cdot g(x)\Big)' - \varphi'(x) \\ &= F'(x)\ g(x) + F(x)\ g'(x) - f(x)\ g(x) \\ &= f(x)\ g(x) + F(x)\ g'(x) - f(x)\ g(x) \\ &= F(x)\ g'(x)\end{aligned}$$

cosicché ψ è una primitiva di $F \cdot g'$; perciò abbiamo:

$$\varphi(x) = F(x)\ g(x) + \varphi(x) - F(x)\ g(x) = F(x)\ g(x) - \psi(x)$$

come volevamo. □

La (8) è detta *formula di integrazione (indefinita) per parti.*
Essa viene scritta anche nella maniera seguente:

$$\int f'(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x = f(x)\ g(x) - \int f(x)\ g'(x)\ \mathrm{d}\,x\ , \tag{1'}$$

che si ottiene dalla (8) sostituendovi $f = F'$ al primo membro e rinominando f la F, oppure:

$$\int f(x)\ g'(x)\ \mathrm{d}\,x = f(x)\ g(x) - \int f'(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x\ , \tag{1''}$$

che si ottiene dalla (1') con una manipolazione algebrica elementare.
Usualmente, i fattori f e g del primo membro della (8) vengono detti rispettivamente *fattore differenziale* e *fattore finito.*

Osservazione 16: La formula (8) si usa per calcolare l'integrale indefinito di integrandi che si presentino come prodotto di una funzione derivabile (il fattore finito g) ed una funzione elementarmente integrabile "senza troppi calcoli" (il fattore differenziale f), cioé di una funzione di cui si sappia individuare "a occhio" una primitiva. ♦

`Esempio 8:` Calcoliamo:

$$\int (x+1)\ \mathbf{e}^x\ \mathrm{d}\,x\ .$$

L'integrando si presenta come prodotto della funzione $g(x) := x + 1$ derivabile e della funzione $f(x) := \mathbf{e}^x$ immediatamente integrabile; poiché:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 1 \\ F(x) &= \mathbf{e}^x\ ,\end{aligned}$$

la (8) ci consente di scrivere:

$$\begin{aligned}\int (x+1)\ \mathbf{e}^x\ \ \mathrm{d}\,x &= (x+1)\ \mathbf{e}^x - \int \mathbf{e}^x\ \ \mathrm{d}\,x \\ &= (x+1)\ \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^x + C \\ &= x\ \mathbf{e}^x + C\ . \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Osservazione 17: L'effettiva utilità della formula di integrazione per parti a fini pratici dipende in maniera *sostanziale* da una buona scelta del fattore differenziale e del fattore finito. In particolare, i fattori differenziale e finito vanno scelti in modo che l'integrale $\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$ risulti "più semplice" da calcolare dell'integrale di partenza $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$.
Per lumeggiare questa affermazione, consideriamo di nuovo il problema di calcolare l'integrale proposto nell'esempio precedente.
Evidentemente, avremmo potuto provare a scegliere come fattore finito $g(x) := \mathbf{e}^x$ e come fattore differenziale $f(x) := x+1$, trovando:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathbf{e}^x \\ F(x) &= \frac{1}{2}\ x^2 + x \end{aligned}$$

e perciò:

$$\int (x+1)\ \mathbf{e}^x\ \ \mathrm{d}\,x = \left(\frac{1}{2}\ x^2 + x\right)\ \mathbf{e}^x - \int \left(\frac{1}{2}\ x^2 + x\right)\ \mathbf{e}^x\ \ \mathrm{d}\,x \ldots$$

...Ma l'integrale al secondo membro NON È "più semplice" da calcolare rispetto a quello di partenza, giacché in esso compare un polinomio di grado 2 (mentre nell'integrale di partenza figura un polinomio di grado 1!).
Pertanto, la scelta ora proposta è da scartarsi a favore di quella fatta nell'esempio. ♦

`Esempio 9:` Calcoliamo:

$$\int (x^2 - x)\ \mathbf{e}^{2x}\ \ \mathrm{d}\,x\ .$$

Stanti le considerazioni ora fatte, converrà prendere come fattore finito $g(x) := x^2 - x$ e come fattore differenziale $f(x) := \mathbf{e}^{2x}$; chiaramente:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - 1 \\ F(x) &= \frac{1}{2}\ \mathbf{e}^{2x} \end{aligned}$$

perciò:

$$\int (x^2 - x)\ \mathbf{e}^{2x}\ \ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\ (x^2 - x)\ \mathbf{e}^{2x} - \frac{1}{2}\ \int (2x-1)\ \mathbf{e}^{2x}\ \ \mathrm{d}\,x\ .$$

L'integrale al secondo membro è "più semplice" da calcolare rispetto a quello iniziale (perché vi compare un polinomio di grado minore), e però esso si calcola integrando nuovamente per parti, con fattore finito $g(x) := 2x-1$ e fattore differenziale $f(x) := e^{2x}$; poiché:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \\ F(x) &= \frac{1}{2}\ \mathbf{e}^{2x} \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\int (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x}\ \,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\ (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x} - \frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{2}\ (2x-1)\ \mathbf{e}^{2x} - \frac{1}{2}\ \int 2\ \mathbf{e}^{2x}\,\mathrm{d}\,x\right)\\ &= \frac{1}{2}\ (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x} - \frac{1}{4}\ (2x-1)\ \mathbf{e}^{2x} + \frac{1}{2}\ \int \mathbf{e}^{2x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \frac{1}{2}\ (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x} - \frac{1}{4}\ (2x-1)\ \mathbf{e}^{2x} + \frac{1}{4}\ \mathbf{e}^{2x} + C\\ &= \frac{1}{2}\ \left(x^2-2x+1\right)\ \mathbf{e}^{2x} + C\\ &= \frac{1}{2}\ (x-1)^2\ \mathbf{e}^{2x} + C\ . \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Osservazione 18: Notiamo esplicitamente che l'integrazione per parti può essere *iterata*, ossia ripetuta più volte di seguito.
In tal caso, però, è bene "perseverare" nella scelta dei fattori differenziale e finito, poiché altrimenti si incorre nel pericolo di "tornare al passaggio precedente".
Per illustrare tale circostanza, riconsideriamo l'integrale $\int (x^2-x)\mathbf{e}^{2x}\,\mathrm{d}\,x$: procedendo come sopra, dopo la prima integrazione per parti con fattori finito $g(x) := x^2-x$ e differenziale $f(x) := \mathbf{e}^{2x}$ abbiamo:

$$\int (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x}\ \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\ (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x} - \frac{1}{2}\ \int (2x-1)\ \mathbf{e}^{2x}\ \,\mathrm{d}\,x\ ,$$

e possiamo provare a calcolare l'integrale al secondo membro integrando nuovamente per parti; prendendo stavolta come fattore differenziale $f(x) := 2x-1$ e come fattore finito $g(x) := \mathbf{e}^{2x}$, di modo che:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\ \mathbf{e}^{2x}\\ F(x) &= x^2-x\ ,\end{aligned}$$

troviamo:

$$\begin{aligned}\int (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x}\ \,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\ (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x} - \frac{1}{2}\ \left(2(x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x} - 2\ \int (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x}\ \,\mathrm{d}\,x\right)\\ &= \int (x^2-x)\ \mathbf{e}^{2x}\ \,\mathrm{d}\,x\ ,\end{aligned}$$

tornando dove eravamo al passaggio precedente, cioè all'inizio. ♦

`Esempio 10:` Calcoliamo:

$$\int \log x\ \,\mathrm{d}\,x\ .$$

L'integrando non si presenta immediatamente nella forma adatta per un'integrazione per parti; tuttavia, notando che l'integrando può essere riscritto come $1\cdot\log x$, esso è evidentemente il prodotto della funzione derivabile $g(x) := \log x$ e della funzione immediatamente integrabile $f(x) := 1$; poiché:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x}\\ F(x) &= x\ ,\end{aligned}$$

la (8) ci consente di scrivere:

$$\begin{aligned}\int \log x\ \,\mathrm{d}\,x &= x\ \log x - \int x\ \frac{1}{x}\ \,\mathrm{d}\,x\\ &= x\ \log x - \int 1\ \,\mathrm{d}\,x\\ &= x\ \log x - x + C\ .\end{aligned}$$

Con la stessa tecnica si calcola:

$$\int \arctan x \ \mathrm{d}\, x = x \ \arctan x - \frac{1}{2} \ \log(1+x^2) + C \ . \qquad \diamondsuit$$

Osservazione 19: Dunque l'integrazione per parti può essere effettuata anche lì dove sembra non si applichi, con un'astuta scelta del fattore differenziale. ♦

`Esempio 11:` Calcoliamo:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \ \mathrm{d}\, x \ .$$

Sommando e sottraendo al numeratore dell'integrando la quantità x^2 e decomponendo in somma, troviamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \ \mathrm{d}\, x &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} \ \mathrm{d}\, x \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}\, x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \ \mathrm{d}\, x \\ &= \arctan x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \ \mathrm{d}\, x \ ,\end{aligned}$$

sicché per terminare basta calcolare l'integrale che figura all'ultimo membro. Dato che $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}$ e che il secondo fattore del prodotto al secondo membro è immediatamente integrabile, possiamo integrare per parti con fattore finito $g(x) := x$ e fattore differenziale $f(x) := \frac{x}{(1+x^2)^2}$: troviamo così:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \\ F(x) &= -\frac{1}{2} \ \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

e perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \ \mathrm{d}\, x &= \arctan x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \ \mathrm{d}\, x \\ &= \arctan x - \left(-\frac{1}{2} \ \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ \int \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}\, x \right) \\ &= \arctan x - \left(-\frac{1}{2} \ \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ \arctan x \right) \\ &= \frac{1}{2} \ \arctan x + \frac{1}{2} \ \frac{1}{1+x^2} \ . \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Osservazione 20: L'integrazione per parti ha consentito di ricondurre il calcolo dell'integrale di $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ al calcolo dell'integrale (immediato) di $\frac{1}{1+x^2}$, in cui il denominatore figura elevato ad una potenza di grado minore.
Questo è un tipico esempio di *formula di ricorrenza* per il calcolo degli integrali indefiniti ottenuta usando l'integrazione per parti. Nel paragrafi successivi vedremo altri esempi di tale tecnica. ♦

`Esempio 12:` Calcoliamo:

$$\int \sin(2x) \ \mathbf{e}^{-\pi x} \ \mathrm{d}\, x \ .$$

Prendiamo come fattore differenziale $f(x) := \mathbf{e}^{-\pi x}$ e come fattore finito $g(x) := \sin(2x)$, in modo che:

$$g'(x) = 2\ \cos(2x)$$
$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ ,$$

ed integrando per parti troviamo:

$$\int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x = -\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} + \frac{2}{\pi}\ \int \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

cosicché il problema iniziale è ricondotto a quello dell'integrazione di $\cos(2x)\mathbf{e}^{-\pi x}$.
Per calcolare il nuovo integrale, integriamo per parti "perseverando" nelle scelte fatte in precedenza, cioè con fattore finito $g(x) := \cos(2x)$ e fattore differenziale $f(x) := \mathbf{e}^{-\pi x}$: poiché:

$$g'(x) = -2\ \sin(2x)$$
$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\ \mathbf{e}^{-\pi x}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x &= -\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} + \frac{2}{\pi}\ \Big(-\frac{1}{\pi}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} \\ &\quad - \frac{2}{\pi}\ \int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x \Big) \\ &= -\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} \\ &\quad - \frac{4}{\pi^2}\ \int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x \ldots\ ,\end{aligned}$$

...E sembra d'essere "tornati al passaggio precedente"!
Ma, leggendo con attenzione, scopriamo che l'uguaglianza tra primo ed ultimo membro può essere interpretata come segue: in corrispondenza di una qualsiasi primitiva Ψ di $\sin(2x)\mathbf{e}^{-\pi x}$ esiste una primitiva Φ di $\sin(2x)\mathbf{e}^{-\pi x}$, tale che:

$$\Psi(x) = -\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{4}{\pi}\ \Phi(x)\ .$$

A tal punto, ricordando che $\Psi(x) = \Phi(x) + C$ con C costante, la precedente si riscrive:

$$\Phi(x) + C = -\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{4}{\pi^2}\ \Phi(x)$$

e diventa, per ogni x, un'equazione nell'incognita $\Phi(x)$ che può essere risolta con semplici passaggi algebrici: abbiamo:

$$\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\ \Phi(x) = -\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - C$$

ossia:

$$\Phi(x) = \frac{\pi^2}{\pi^2+4}\ \left(-\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\right) - \frac{\pi^2}{\pi^2+4}\ C\ .$$

Da tale uguaglianza traiamo che la funzione:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= \frac{\pi^2}{\pi^2+4}\ \left(-\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\right) \\ &= \frac{1}{\pi^2+4}\ (-\pi\ \sin(2x) - 2\ \cos(2x))\ \mathbf{e}^{-\pi x}\end{aligned}$$

è una primitiva di $\sin(2x)\mathbf{e}^{-\pi x}$ (poiché differisce dalla primitiva Φ per la constante additiva $-\frac{\pi^2}{\pi^2+4}\ C$), dunque possiamo scrivere certamente:

$$\int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi^2+4}\ \left(-\pi\ \sin(2x) - 2\ \cos(2x)\right)\ \mathbf{e}^{-\pi x} + C\ .$$

Allo stesso modo si calcola:

$$\int \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x\ . \qquad \diamondsuit$$

Osservazione 21: L'integrale appena proposto si può risolvere in maniera meno formale, ma più rapida, con un semplice *escamotage*.
Introducendo l'incognita ausiliaria:

$$I := \int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x$$

nell'uguaglianza:

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x = &-\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} \\ &- \frac{4}{\pi^2}\ \int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

otteniamo:

$$I = -\frac{1}{\pi}\ \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{2}{\pi^2}\ \cos(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x} - \frac{4}{\pi^2}\ I$$

e (con evidentissimo abuso di notazione) possiamo riguardare tale relazione come equazione nell'incognita I. Risolvendo tale equazione otteniamo:

$$I = \frac{\pi^2}{\pi^2+4}\ \left(-\pi\ \sin(2x) - 2\ \cos(2x)\right)\ \mathbf{e}^{-\pi x}$$

da cui:

$$\int \sin(2x)\ \mathbf{e}^{-\pi x}\ \mathrm{d}\,x = \frac{\pi^2}{\pi^2+4}\ \left(-\pi\ \sin(2x) - 2\ \cos(2x)\right)\ \mathbf{e}^{-\pi x} + C\ ,$$

come già trovato per altra via. ♦

Osservazione 22: Notiamo altresì che l'integrale proposto nell'esempio precedente è "ciclico", nel senso che dopo due integrazioni per parti eseguite correttamente (cioè senza "tornare al passaggio precedente") esso ricompare nell'ultimo membro moltiplicato per un coefficiente $\neq 1$.
Se conveniamo di chiamare *ciclici* gli integrali che godono della proprietà appena detta, cioè quegli integrali per i quali, dopo due integrazioni per parti eseguite correttamente, si trova:

$$\int f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x = \varphi(x) + \alpha\ \int f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x$$

con $\alpha \neq 1$, è evidente che il trucco presentato nell'osservazione precedente si applica e restituisce:

$$\int f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{1-\alpha}\ \varphi(x) + C\ .$$

♦

`Esempio 13:` Calcoliamo gli integrali ciclici:

$$\int \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x$$

$$\int \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

con $\omega, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per evitare casi banali.
Integrando per parti, entrambi gli integrali con fattore differenziale $f(x) := \mathbf{e}^{px}$, troviamo:

$$\begin{aligned}\int \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x &= \frac{1}{p}\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} - \frac{\omega}{p}\ \int \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x\\ \int \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x &= \frac{1}{p}\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} + \frac{\omega}{p}\ \int \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x\ ;\end{aligned}$$

introducendo le incognite ausiliarie:

$$\begin{aligned}I &= \int \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x\\ J &= \int \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

la precedente coppia di uguaglianze si muta in un sistema lineare nelle incognite I e J, cioé:

$$\begin{cases} I + \frac{\omega}{p}\ J = \frac{1}{p}\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\\ -\frac{\omega}{p}\ I + J = \frac{1}{p}\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\end{cases}$$

il quale è di Cramer. Visto che il determinante dei coefficienti è $1 + \frac{\omega^2}{p^2} \neq 0$, il sistema ha unica soluzione, la quale si calcola usando la regola di Cramer:

$$\begin{cases} I = \frac{p^2}{p^2+\omega^2}\ \det \begin{pmatrix} \frac{1}{p}\sin(\omega x)\mathbf{e}^{px} & \frac{\omega}{p}\\ \frac{1}{p}\cos(\omega x)\mathbf{e}^{px} & 1\end{pmatrix}\\ J = \frac{p^2}{p^2+\omega^2}\ \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p}\sin(\omega x)\mathbf{e}^{px}\\ -\frac{\omega}{p} & \frac{1}{p}\cos(\omega x)\mathbf{e}^{px}\end{pmatrix}\end{cases}.$$

Dunque:

$$\begin{cases} I = \frac{1}{p^2+\omega^2}\ (p\ \sin(\omega x)\mathbf{e}^{px} - \omega\ \cos(\omega x)\mathbf{e}^{px})\\ J = \frac{1}{p^2+\omega^2}\ (p\ \cos(\omega x)\mathbf{e}^{px} + \omega\ \sin(\omega x)\mathbf{e}^{px})\end{cases},$$

e perciò:

$$\begin{aligned}\int \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x &= \frac{1}{p^2+\omega^2}\ (p\ \sin(\omega x) - \omega\ \cos(\omega x))\ \mathbf{e}^{px} + C\\ \int \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x &= \frac{1}{p^2+\omega^2}\ (p\ \cos(\omega x) + \omega\ \sin(\omega x))\ \mathbf{e}^{px} + C\ . \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

2.2. **Qualche Osservazione sulle Formule di Ricorrenza *.** Abbiamo già notato che l'integrale di $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ si può ricondurre, mediante integrazione per parti, all'integrale (immediato) di $\frac{1}{1+x^2}$. Mostriamo ora che questo procedimento vale in un caso più generale.
Scelto un numero naturale $n \geq 2$, vogliamo calcolare:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Sommando e sottraendo la quantità x^2 al numeratore e decomponendo in somma, otteniamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{d}\,x &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{d}\,x\\ &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}\,x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{d}\,x\ ;\end{aligned}$$

dato che $\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}$, possiamo integrare per parti il secondo addendo dell'ultimo membro con fattore differenziale $f(x) := \frac{x}{(1+x^2)^n}$ e fattore finito $g(x) := x$; poiché $n \geq 2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \\ F(x) &= -\frac{1}{2(n-1)}\ \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ , \end{aligned}$$

cosicché risulta:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}\,x - \Big(-\frac{1}{2(n-1)}\ \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}\,x \Big) \\ &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}\,x + \frac{1}{2(n-1)}\ \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2(n-1)}\ \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}\,x\ . \end{aligned}$$

Ne viene che il problema del calcolo dell'integrale:

$$I(n) := \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\ \mathrm{d}\,x$$

è ricondotto a quello del calcolo di:

$$I(n-1) := \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\ \mathrm{d}\,x$$

mediante la formula:

$$I(n) = \frac{1}{2(n-1)}\ \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\ I(n-1)\ ,$$

la quale è detta *formula di ricorrenza* per l'integrale $I(n)$.
Tale formula può essere usata per calcolare esplicitamente l'integrale $I(n)$, con n comunque elevato, sfruttando la relazione elementare $I(1) = \arctan x + C$.
Ad esempio, posto $n = 6$, vogliamo calcolare esplicitamente:

$$I(6) = \int \frac{1}{(1+x^2)^6}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Usando la formula di ricorrenza troviamo:

$$I(6) = \frac{1}{10}\ \frac{x}{(1+x^2)^5} + \frac{9}{10}\ I(5)$$

e, poiché $5 \geq 2$, possiamo esprimere anche $I(5)$ usando la formula di ricorrenza:

$$I(5) = \frac{1}{8}\ \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{7}{8}\ I(4)\ ,$$

dunque:

$$I(6) = \frac{1}{10}\ \frac{x}{(1+x^2)^5} + \frac{9}{10 \cdot 8}\ \frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{9 \cdot 7}{10 \cdot 8}\ I(4)\ .$$

Dato che $4 \geq 2$, possiamo usare la formula di ricorrenza per $I(4)$:

$$I(4) = \frac{1}{6}\ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\ I(3)$$

sicché:

$$\begin{aligned} I(6) = \frac{1}{10}\ \frac{x}{(1+x^2)^5} + \frac{9}{10\cdot 8}\ \frac{x}{(1+x^2)^4} \\ + \frac{9\cdot 7}{10\cdot 8\cdot 6}\ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{9\cdot 7\cdot 5}{10\cdot 8\cdot 6}\ I(3)\ . \end{aligned}$$

Ancora, poiché:

$$I(3) = \frac{1}{4}\ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\ I(2)$$

ed:

$$\begin{aligned} I(2) &= \frac{1}{2}\ \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ I(1) \\ &= \frac{1}{2}\ \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ \arctan x + C\ , \end{aligned}$$

abbiamo infine:

$$\begin{aligned} I(6) = \frac{1}{10}\ \frac{x}{(1+x^2)^5} + \frac{9}{10\cdot 8}\ \frac{x}{(1+x^2)^4} \\ + \frac{9\cdot 7}{10\cdot 8\cdot 6}\ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{9\cdot 7\cdot 5}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}\ \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ + \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\ \frac{x}{1+x^2} + \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\ \arctan x + C\ . \end{aligned}$$

Osservazione 23: Una formula chiusa che consenta di esprimere $I(n)$ si può ricavare dalla formula di ricorrenza (usando il Principio d'Induzione Matematica).
Su ciò non insistiamo e lasciamo al lettore volenteroso il compito di ricavarla. ♦

In generale, quando un integrale si presenta nella forma:

$$I(n) := \int f^n(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x$$

con $n \geq 2$, l'integrazione per parti e la decomposizione in somma possono essere usate per tentare di esprimere $I(n)$ come funzione lineare di $I(n-1)$ oppure $I(n-2)$ (a seconda dei casi), cioè per ottenere delle relazioni del tipo:

$$(9) \qquad I(n) = \varphi_n(x) + \alpha_n\ I(n-1) \quad \text{oppure} \quad I(n) = \varphi_n(x) + \alpha_n\ I(n-2)$$

(in cui φ_n è un'opportuna funzione derivabile ed $\alpha_n \in \mathbb{R}$), le quali vengono dette *formule di ricorrenza per l'integrale* $I(n)$.
Se $I(n)$ è un integrale per il quale sussiste una formula di ricorrenza, iterando un numero finito di volte l'uso delle (9), si riconosce che il calcolo di $I(n)$ si riconduce (a seconda dei casi) a quello di uno tra gli integrali:

$$I(1) = \int f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}\,x \quad \text{oppure} \quad I(0) = \int g(x)\ \mathrm{d}\,x\ ;$$

ne consegue, in particolare, che $I(n)$ è calcolabile elementarmente se e solo se lo è uno degli integrali $I(1)$ od $I(0)$.

Per lumeggiare tali circostanze, riportiamo alcuni esempi.

`Esempio 14:` Siano n un naturale ed $\omega > 0$; ci proponiamo di calcolare le formule di ricorrenza per gli integrali:

$$\begin{aligned} I(n) &= \int \sin^n(\omega x)\ \mathrm{d}\,x \\ J(n) &= \int \cos^n(\omega x)\ \mathrm{d}\,x\ . \end{aligned}$$

Chiaramente, se $n = 0, 1$, gli integrali sono immediati e valgono:

$$
\begin{aligned}
I(0) = J(0) = C& \\
I(1) &= -\frac{1}{\omega}\ \cos(\omega x) + C \\
J(1) &= \frac{1}{\omega}\ \sin(\omega x) + C\ .
\end{aligned}
$$

Supponiamo dunque $n \geq 2$. Dato che $\sin^n(\omega x) = \sin^{n-1}(\omega x)\sin(\omega x)$ e $\cos^n(\omega x) = \cos^{n-1}(\omega x)\cos(\omega x)$, possiamo integrare per parti $I(n)$ e $J(n)$ con fattori differenziali, rispettivamente, $\sin(\omega x)$ e $\cos(\omega x)$ ottenendo:

$$
\begin{aligned}
I(n) &= -\frac{1}{\omega}\ \sin^{n-1}(\omega x)\ \cos(\omega x) + (n-1)\ \int \sin^{n-2}(\omega x)\ \cos^2(\omega x)\ \mathrm{d}\, x \\
&= -\frac{1}{\omega}\ \sin^{n-1}(\omega x)\ \cos(\omega x) + (n-1)\ \int \sin^{n-2}(\omega x)\ \left(1 - \sin^2(\omega x)\right)\ \mathrm{d}\, x \\
&= -\frac{1}{\omega}\ \sin^{n-1}(\omega x)\ \cos(\omega x) + (n-1)\ \int \sin^{n-2}(\omega x)\, \mathrm{d}\, x \\
&\quad - (n-1)\ \int \sin^n(\omega x)\ \mathrm{d}\, x \\
&= -\frac{1}{\omega}\ \sin^{n-1}(\omega x)\ \cos(\omega x) + (n-1)\ I(n-2) - (n-1)\ I(n)
\end{aligned}
$$

e con calcoli analoghi:

$$
J(n) = \frac{1}{\omega}\ \sin(\omega x)\ \cos^{n-1}(\omega x) + (n-1)\ J(n-2) - (n-1)\ J(n)\ ;
$$

da ciò si ricavano le ricorrenze:

$$
\begin{aligned}
I(n) &= -\frac{1}{n\omega}\ \sin^{n-1}(\omega x)\ \cos(\omega x) + \frac{n-1}{n}\ I(n-2) \\
J(n) &= \frac{1}{n\omega}\ \sin(\omega x)\ \cos^{n-1}(\omega x) + \frac{n-1}{n}\ J(n-2)\ ,
\end{aligned}
$$

le quali consentono di calcolare $I(n)$ [risp. $J(n)$] riportandosi ai casi base $I(0)$ o $I(1)$ [risp. $J(0)$ o $J(1)$] a seconda che n sia pari o dispari. $\diamondsuit$

Osservazione 24: È bene notare che se $n \geq 2$ è dispari, gli integrali $I(n)$ e $J(n)$ sono calcolabili elementarmente con meno sforzo.
Invero, se $n = 2h + 1$ per qualche h naturale e ≥ 1, si ha:

$$
\begin{aligned}
I(n) &= \int \sin^{2h}(\omega x)\ \sin(\omega x)\, \mathrm{d}\, x \\
&= \int \left(\sin^2(\omega x)\right)^h\ \sin(\omega x)\, \mathrm{d}\, x \\
&= \int \left(1 - \cos^2(\omega x)\right)^h\ \sin(\omega x)\, \mathrm{d}\, x \\
&= -\frac{1}{\omega}\ \int \left(1 - \cos^2(\omega x)\right)^h\ (-\omega\ \sin(\omega x))\, \mathrm{d}\, x \\
&\overset{t=\cos(\omega x)}{=} -\frac{1}{\omega}\ \int \left(1 - t^2\right)^h \mathrm{d}\, t
\end{aligned}
$$

e l'ultimo integrale è molto semplice, poiché l'integrando è un polinomio; analogamente si trova:

$$\begin{aligned} J(n) &= \int \cos^{2h}(\omega x)\ \cos(\omega x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{\omega}\ \int \left(1-\sin^2(\omega x)\right)^h\ (\omega\ \cos(\omega x))\,\mathrm{d}\,x\ . \\ &\overset{t=\sin(\omega x)}{=} \frac{1}{\omega}\ \int \left(1-t^2\right)^h \mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

`Esempio 15:` Per n naturale e $p \neq 0$, mostriamo che l'integrale:

$$I(n) = \int x^n\ e^{px}\,\mathrm{d}\,x$$

è elementare, determinando un'appropriata formula di ricorrenza.
Chiaramente $I(0)$ è elementare, poiché:

$$I(0) = \int \mathbf{e}^{px}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{p}\ \mathbf{e}^{px} + C\ .$$

Se $n \geq 1$, integrando con fattore differenziale $\mathbf{e}^{px}$ troviamo:

$$\begin{aligned} I(n) &= \frac{1}{p}\ x^n\ \mathbf{e}^{px} - \frac{n}{p}\ \int x^{n-1}\ \mathbf{e}^{px}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{p}\ x^n\ \mathbf{e}^{px} - \frac{n}{p}\ I(n-1)\ , \end{aligned}$$

che consente di esprimere $I(n)$ in funzione di $I(0)$. Dato che $I(0)$ è elementare, tale è anche $I(n)$. ♢

`Esempio 16:` Per n naturale, determiniamo una ricorrenza per gli integrali:

$$\begin{aligned} I(n) &= \int x^n\ \sin(\omega x)\mathbf{e}^{px}\,\mathrm{d}\,x \\ J(n) &= \int x^n\ \cos(\omega x)\mathbf{e}^{px}\,\mathrm{d}\,x\ , \end{aligned}$$

in cui $\omega > 0$ e $p \in \mathbb{R}$.
Per quanto già visto in precedenza, $I(0)$ e $J(0)$ sono elementarmente calcolabili (in quanto integrali ciclici).
Supponiamo $n \geq 1$ ed integriamo per parti in $I(n)$ e $J(n)$ con fattore finito $g(x) := x^n\mathbf{e}^{px}$: dato che:

$$g'(x) = (nx^{n-1} + p\ x^n)\ \mathbf{e}^{px}\ ,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} I(n) &= -\frac{1}{\omega}x^n\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} + \frac{1}{\omega}\ \int (nx^{n-1} + p\ x^n)\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x \\ &= -\frac{1}{\omega}x^n\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} + \frac{n}{\omega}\ J(n-1) + \frac{p}{\omega}\ J(n) \\ J(n) &= \frac{1}{\omega}\ x^n\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} - \frac{1}{\omega}\ \int (nx^{n-1} + p\ x^n)\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px}\ \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{\omega}\ x^n\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} - \frac{n}{\omega}\ I(n-1) - \frac{p}{\omega}\ I(n)\ . \end{aligned}$$

Valgono perciò le relazioni :

$$\begin{cases} \omega\ I(n) - p\ J(n) = -x^n\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} + n\ J(n-1) \\ p\ I(n) + \omega\ J(n) = x^n\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} - n\ I(n-1)\ , \end{cases}$$

le quali formano un sistema di Cramer nelle incognite $I(n)$ e $J(n)$; poiché il determinante dei coefficienti è uguale a $\omega^2+p^2>0$, tale sistema ha unica soluzione data da:

$$\begin{cases} I(n) = \frac{1}{\omega^2+p^2}\ \det \begin{pmatrix} -x^n\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} + n\ J(n-1) & -p \\ x^n\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} - n\ I(n-1) & \omega \end{pmatrix} \\ J(n) = \frac{1}{\omega^2+p^2}\ \det \begin{pmatrix} \omega & -x^n\ \cos(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} + n\ J(n-1) \\ p & x^n\ \sin(\omega x)\ \mathbf{e}^{px} - n\ I(n-1) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Lasciando allo studioso lettore il compito di esplicitare le formule precedenti, notiamo che esse forniscono ricorrenze di tipo un po' più complesso delle (9), poiché invero esse sono del tipo:

$$\begin{cases} I(n) = \alpha_n(x)\ I(n-1) + \beta_n(x)\ J(n-1) \\ J(n) = \gamma_n(x)\ I(n-1) + \delta_n(x)\ J(n-1) \end{cases}$$

con α_n, β_n, γ_n e δ_n appropriate funzioni. ♢

`Esempio 17:` Calcoliamo:

$$I(n) = \int x^{2n+1}\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

ove $p\in\mathbb{R}$ e $p\neq 0$ (per evitare banalità).
L'integrale $I(0)$ è elementare, poiché:

$$\begin{aligned} I(0) &= \int x\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2p}\ \int 2px\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2p}\ \mathbf{e}^{px^2} + C\ . \end{aligned}$$

Supponiamo allora $n\geq 1$ e, notato che:

$$I(n) = \int x^{2n}\ x\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

possiamo integrare per parti con fattore finito $g(x) := x^{2n}$ e fattore differenziale $f(x) = x\mathbf{e}^{px^2}$ (una cui primitiva è stata appena determinata): così facendo troviamo:

$$\begin{aligned} I(n) &= \frac{1}{2p}\ x^{2n}\ \mathbf{e}^{px^2} - \frac{2n}{2p}\ \int x^{2n-1}\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2p}\ x^{2n}\ \mathbf{e}^{px^2} - \frac{n}{p}\ \int x^{2(n-1)+1}\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\,x\ , \end{aligned}$$

ossia:

$$I(n) = \frac{1}{2p}\ x^{2n}\ \mathbf{e}^{px^2} - \frac{n}{p}\ I(n-1)\ .$$

La formula di ricorrenza appena trovata riduce il calcolo di $I(n)$ a quello di $I(0)$ e perciò mostra che $I(n)$ è elementare. ♢

Osservazione 25: La stessa tecnica usata in precedenza consente di calcolare una formula di ricorrenza per l'integrale:

$$J(n) = \int x^{2n}\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

per $n \geq 1$.
Infatti, scelto $n \geq 1$, poiché:

$$J(n) = \int x^{2n-1}\ x\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\, x$$

possiamo integrare per parti con fattore differenziale $f(x) = x\mathbf{e}^{px^2}$ e fattore finito $g(x) = x^{2n-1}$ ottenendo:

$$\begin{aligned} J(n) &= \frac{1}{2p}\ x^{2n-1}\ \mathbf{e}^{px^2} - \frac{2n-1}{2p} \int x^{2n-2}\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\, x \\ &= \frac{1}{2p}\ x^{2n-1}\ \mathbf{e}^{px^2} - \frac{2n-1}{2p} \int x^{2(n-1)}\ \mathbf{e}^{px^2}\ \mathrm{d}\, x\ , \end{aligned}$$

cioè:

$$J(n) = \frac{1}{2p}\ x^{2n-1}\ \mathbf{e}^{px^2} - \frac{2n-1}{2p}\ J(n-1)\ .$$

Tale formula di ricorrenza riconduce il calcolo dell'integrale $J(n)$ a quello dell'integrale $J(0)$, il quale però non è elementare per un noto risultato di Liouville (cfr. sezione 3); pertanto, nessun integrale del tipo $J(n)$ si può esprimere mediante funzioni elementari. ♦

2.3. **Sulla Scelta del Fattore Differenziale nell'Integrazione per Parti.** Non esistono regole certe che garantiscano la bontà della scelta di fattore differenziale e fattore finito in un'integrazione per parti.
Tuttavia, *empiricamente*, la scelta del fattore differenziale nei casi d'ordinaria amministrazione va fatta tenendo a mente l'acronimo d*ETAIL* ("dettaglio", in English), il quale sta per:

(fattore) d *ifferenziale*
E sponenziale
T rigonometrica (cioé seno, coseno, etc. . .)
A lgebrica (cioé potenza o polinomio)
I nversa trigonometrica (cioé arcoseno, arcocoseno, etc. . .)
L ogaritmo ,

e ricordando che le funzioni "più in alto" sono preferibili come fattori differenziali a tutte le funzioni che stanno "più in basso".
Il lettore attento avrà notato che le scelte dei fattori differenziali negli esempi di questa sezione sono state operate in conformità all'acronimo ora proposto.

3. Integrazione per Sostituzione

3.1. **Formule d'Integrazione per Sostituzione.** Proviamo la:

Proposizione 9 (Integrazione per Sostituzione)
Siano I e J due intervalli non ridotti ad un punto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e $\varphi : J \to I$ una funzione derivabile in J.
Se $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f in I, allora:

$$\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\ \mathrm{d}\, x = F(\varphi(x)) + C\ . \tag{10}$$

Dimostrazione. La funzione $F \circ \varphi$ è definita in J ed ivi derivabile, in quanto composta da funzioni derivabili; poiché la derivata di tale funzione è:

$$\begin{aligned}(F \circ \varphi)'(x) &= F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ ,\end{aligned}$$

$F(\varphi(x))$ è una primitiva di $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ in J e perciò vale la (10). □

La (10) prende il nome di *formula d'integrazione* (*indefinita*) *per sostituzione "diretta"*.
Il perché di tal nome si spiega come segue. Usando le stesse notazioni dell'enunciato abbiamo:

$$\int f(t)\ \mathrm{d}\,t = F(t) + C$$

e la formula (10) può essere riscritta come:

$$\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\ \mathrm{d}\,x = \int f(t)\ \mathrm{d}\,t \Big|_{t=\varphi(x)}\ , \tag{3'}$$

in cui la $|_{t=\varphi(x)}$ significa che il "risultato" dell'integrale al secondo membro (fatto rispetto alla variabile t!) va infine calcolato ponendo $t = \varphi(x)$.
Conseguentemente, il problema del calcolo dell'integrale $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x$ è ricondotto al problema del calcolo dell'integrale $\int f(t)\,\mathrm{d}\,t$ in cui figura la *variabile ausiliaria* t, che viene FORMALMENTE introdotta facendo la sostituzione $t = \varphi(x)$ in $f(\varphi(x))$ e sostituendo $\varphi'(x)\,\mathrm{d}\,x$ con $\mathrm{d}\,t$.

Osservazione 26: La formula d'integrazione per sostituzione si usa, evidentemente, per calcolare integrali che si presentino come prodotto tra funzioni composte e la derivata della componente interna.
Tuttavia, essa può (e deve necessariamente) essere usata anche in altri casi i quali, almeno a prima vista, non si incasellano in tale tipologia.
Ad esempio consideriamo il problema di calcolare l'integrale:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}\,x$$

in cui $f : I \to \mathbb{R}$ è un'assegnata funzione. Se l'integrale è molto complicato o, addirittura, non è calcolabile con altre tecniche elementari, è possibile usare la formula di integrazione per sostituzione "a rovescio", ossia:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}\,x = \int f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ \mathrm{d}\,t \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\ , \tag{3''}$$

in cui $\varphi : J \to I$ è un'appropriata funzione *invertibile*, di modo che il calcolo dell'integrale $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ è ricondotto al calcolo dell'integrale $\int f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ \mathrm{d}\,t$.
Così procedendo, sembra s'introduca nell'integrale un'ulteriore complicazione, dovuta alla presenza di una funzione composta e di un prodotto... Tuttavia, scegliendo BENE la sostituzione $x = \varphi(t)$ (cioè la funzione φ), gli integrali risultanti da tale procedimento sono di gran lunga più semplici rispetto agli integrali di partenza!
Per semplicità, chiameremo la (3") *formula di integrazione* (*indefinita*) *per sostituzione "inversa"*. ♦

Osservazione 27: Notiamo esplicitamente che le regole d'integrazione immediata "della tabella" non sono altro che istanze elementari della formula d'integrazione per sostituzione "diretta" (3').
Ad esempio, la formula d'integrazione elementare:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\ \mathrm{d}\,x = \arcsin\varphi(x) + C$$

non è altro che:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\ \mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=\varphi(x)}$$

cioè la (10) con $f(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. ♦

`Esempio 18:` Calcoliamo:

$$\int \frac{2x}{1+\mathbf{e}^{2x^2}}\ \mathbf{e}^{x^2}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

L'integrando si può scrivere come:

$$\frac{\mathbf{e}^{x^2}}{1+\mathbf{e}^{2x^2}}\ 2x$$

e si vede che il primo fattore è la funzione $f(\varphi(x))$ composta da:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^{2t}} \\ \varphi(x) &= x^2 \end{aligned}$$

e che il secondo fattore è proprio la derivata di $\varphi(x)$; pertanto la formula d'integrazione per sostituzione "diretta" si applica e restituisce:

$$\int \frac{2x}{1+\mathbf{e}^{2x^2}}\ \mathbf{e}^{x^2}\ \mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^{2t}}\ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=x^2}\ ,$$

ed il problema iniziale è ricondotto al calcolo di $\int \frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^{2t}}\ \mathrm{d}\,t$.
Per il calcolo di tale integrale possiamo usare ancora la formula di integrazione per sostituzione "diretta", poiché infatti è possibile scrivere l'integrando come:

$$\frac{1}{1+\mathbf{e}^{2t}}\ \mathbf{e}^t$$

con il primo fattore composto dalle funzioni:

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{1+u^2} \\ \psi(t) &= \mathbf{e}^t \end{aligned}$$

ed il secondo fattore uguale alla derivata di $\psi(t)$; quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{1+\mathbf{e}^{2x^2}}\ \mathbf{e}^{x^2}\ \mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}\,u\Big|_{u=\mathbf{e}^t}\Big|_{t=x^2} \\ &= \int \frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}\,u\Big|_{u=\mathbf{e}^{x^2}} \\ &= \arctan u + C\big|_{u=\mathbf{e}^{x^2}} \\ &= \arctan \mathbf{e}^{x^2} + C\ . \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

`Esempio 19:` Calcoliamo:

$$\int \mathbf{e}^{4\sqrt{x}}\ \log\left(1+\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}\right)\ \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x\ .$$

Notato che l'integrando si può riscrivere come:

$$\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}\ \log\left(1+\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}\right)\ \frac{\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ ,$$

è evidente che esso si fattorizza come prodotto della funzione $f(\varphi(x))$ composta da:

$$\begin{aligned} f(t) &= t \ \log(1+t) \\ \varphi(x) &= \mathbf{e}^{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

e della derivata di φ, cioé:

$$\varphi'(x) = \mathbf{e}^{2\sqrt{x}} \ \frac{1}{\sqrt{x}} \ ;$$

quindi la formula d'integrazione per sostituzione "diretta" si applica e fornisce:

$$\int \mathbf{e}^{4\sqrt{x}} \ \log\left(1+\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}\right) \ \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x = \int t \ \log(1+t) \ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}}$$

di modo che il calcolo dell'integrale iniziale è ricondotto a quello di $\int t \ \log(1+t) \ \mathrm{d}\,t$. Quest'ultimo è un classico integrale da svolgere con la formula d'integrazione per parti (con fattore finito t e fattore differenziale $\log(1+t)$) e con l'ausilio del metodo di decomposizione in somma: abbiamo:

$$\begin{aligned} \int t \ \log(1+t) \ \mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2} \ t^2 \ \log(1+t) - \frac{1}{2} \ \int \frac{t^2}{1+t} \ \mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2} \ t^2 \ \log(1+t) - \frac{1}{2} \ \int \frac{t^2-1+1}{1+t} \ \mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2} \ t^2 \ \log(1+t) - \frac{1}{2} \ \int \left[\frac{t^2-1}{1+t} + \frac{1}{1+t}\right] \ \mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2} \ t^2 \ \log(1+t) - \frac{1}{2} \ \int \left[t-1+\frac{1}{1+t}\right] \ \mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2} \ t^2 \ \log(1+t) - \frac{1}{2} \ \left(\frac{1}{2} \ t^2 - t + \int \frac{1}{1+t} \ \mathrm{d}\,t\right) \\ &= \frac{1}{2} \ t^2 \ \log(1+t) - \frac{1}{4} \ t^2 + \frac{1}{2} \ t - \frac{1}{4} \ \log(1+t) + C \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio il valore assoluto nel logaritmo è superfluo, in quanto $1+t$ è già argomento di un logaritmo e, dunque, è >0), cosicché:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{e}^{4\sqrt{x}} \ \log\left(1+\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}\right) \ \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2} \ t^2 \ \log(1+t) - \frac{1}{4} \ t^2 + \frac{1}{2} \ t \\ &\quad -\frac{1}{4} \ \log(1+t) + C\Big|_{t=\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{2} \ \mathbf{e}^{4\sqrt{x}} \ \log\left(1+\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{4} \ \mathbf{e}^{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \ \mathbf{e}^{2\sqrt{x}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \ \log\left(1+\mathbf{e}^{2\sqrt{x}}\right) + C \ . \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

`Esempio 20:` Calcoliamo:

$$\int \sqrt{x} \ \sin\sqrt{x} \ \mathrm{d}\,x \ ,$$

in $I =]0,+\infty[$.
Dato che $x>0$ in I, possiamo razionalizzare la radice che figura come primo fattore nell'integrando, ottenendo:

$$\int \sqrt{x} \ \sin\sqrt{x} \ \mathrm{d}\,x = \int x \ \sin\sqrt{x} \ \frac{1}{\sqrt{x}} \ \mathrm{d}\,x \ ;$$

moltiplicando e dividendo per 2 il nuovo integrando, si riconosce che esso si presenta come prodotto della funzione $2x\sin\sqrt{x}$ e della derivata di $\sqrt{x}$, cosicché per sostituzione "diretta" abbiamo:

$$\int \sqrt{x}\ \sin\sqrt{x}\ \mathrm{d}\,x = 2\ \int t^2\ \sin t\ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=\sqrt{x}}$$

con l'ultimo integrale che si calcola integrando due volte per parti con fattore differenziale $\sin t$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\ \sin\sqrt{x}\ \mathrm{d}\,x &= 2\ \int t^2\ \sin t\ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=\sqrt{x}} \\
&= 2\ \left(-t^2\ \cos t + 2\ \int t\ \cos t\ \mathrm{d}\,t\right)\Big|_{t=\sqrt{x}} \\
&= 2\ \left(-t^2\ \cos t + 2\ t\ \sin t - 2\ \int \sin t\ \mathrm{d}\,t\right)\Big|_{t=\sqrt{x}} \\
&= -2\ t^2\ \cos t + 2\ t\ \sin t + 2\ \cos t + C\Big|_{t=\sqrt{x}} \\
&= -2\ x\ \cos\sqrt{x} + 2\ \sqrt{x}\ \sin\sqrt{x} + 2\ \cos\sqrt{x} + C\ . \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

3.2. **Sostituzioni Razionalizzanti.** Di seguito elenchiamo delle sostituzioni "inverse" molto note ed utili, le quali servono a semplificare il calcolo degli integrali di alcune classi di funzioni, riconducendolo al calcolo di integrali razionali.
Per tale motivo, le sostituzioni che presentiamo sono anche dette *sostituzioni razionalizzanti*.

`Esempio 21:` Consideriamo la funzione:

$$\int \frac{8^x + 1}{4^x - 3\ 2^x + 2}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Poiché $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ e $8^x = 2^{3x} = (2^x)^3$, possiamo riscrivere l'integrale assegnato come:

$$\int \frac{(2^x)^3 + 1}{(2^x)^2 - 3\ 2^x + 2}\ \mathrm{d}\,x$$

il quale, tuttavia, non è calcolabile immediatamente. Dato che nell'integrale all'ultimo membro la variabile x compare solo attraverso l'esponenziale 2^x, possiamo pensare di introdurre la variabile ausiliaria $t = 2^x$ e di effettuare una sostituzione "diretta"; tuttavia ciò non è immediatamente possibile, poiché la derivata di $\varphi(x) = 2^x$ non compare nell'integrando.
Possiamo allora pensare di usare l'uguaglianza $t = 2^x$ come sostituzione "inversa", cioè come $t = \varphi^{-1}(x)$, e di applicare la formula (3"): per fare ciò, occorre anzitutto ricavare la funzione $\varphi(t)$ dall'uguaglianza $t = 2^x$, e ciò si fa esplicitando tale uguaglianza rispetto alla x:

$$x = \log_2 t = \underbrace{\frac{1}{\log 2}\ \log t}_{=:\varphi(t)}\ ;$$

poi occorre derivare φ, ottenendo:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t\ \log 2}\ ;$$

ed infine occorre sostituire nell'integrale di partenza come indicato dalla formula (3"), trovando:

$$\begin{aligned}\int \frac{8^x+1}{4^x-3\ 2^x+2}\ \mathrm{d}\,x &= \int \frac{t^3+1}{t^2-3\ t+2}\ \frac{1}{t\ \log 2}\,\mathrm{d}\,t\Big|_{t=2^x}\\ &= \frac{1}{\log 2}\ \int \frac{t^3+1}{t\ (t^2-3\ t+2)}\ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=2^x}\ .\end{aligned}$$

Si vede così che l'integrale originale viene *semplificato* dalla sostituzione, in quanto per calcolarlo basta calcolare l'integrale razionale che compare all'ultimo membro, e ciò si fa decomponendo in fratti semplici. Visto che:

$$\frac{t^3+1}{t\ (t^2-3\ t+2)} = 1+\frac{3t^2-2t+1}{t\ (t-1)\ (t-2)}$$

abbiamo:

$$\frac{t^3+1}{t\ (t-2)\ (t-1)} = 1+\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-2}$$

con:

$$\begin{cases} A = \frac{3t^2-2t+1}{(t-1)\ (t-2)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{3} \\ B = \frac{3t^2-2t+1}{t\ (t-2)}\Big|_{t=1} = -2 \\ C = \frac{3t^2-2t+1}{t\ (t-1)}\Big|_{t=2} = \frac{9}{2}\ , \end{cases}$$

sicché:

$$\begin{aligned}\int \frac{t^3+1}{t\ (t^2-3\ t+2)}\ \mathrm{d}\,t &= \int \left[1+\frac{1}{3t}-\frac{2}{t-1}+\frac{9}{2(t-2)}\right]\ \mathrm{d}\,t\\ &= t+\frac{1}{3}\ \log|t|-2\ \log|t-1|+\frac{9}{2}\ \log|t-2|+C\ .\end{aligned}$$

Conseguentemente troviamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{8^x+1}{4^x-3\ 2^x+2}\ \mathrm{d}\,x &= \frac{1}{\log 2}\ \left(t+\frac{1}{3}\ \log|t|-2\ \log|t-1|+\frac{9}{2}\ \log|t-2|+C\right)\Big|_{t=2^x}\\ &= \frac{1}{\log 2}\ \left(2^x+\frac{1}{3}\ \log 2^x-2\ \log|2^x-1|+\frac{9}{2}\ \log|2^x-2|\right)+C\\ &= \frac{1}{\log 2}\ \left(2^x+\frac{\log 2}{3}\ x-2\ \log|2^x-1|+\frac{9}{2}\ \log|2^x-2|\right)+C\ . \end{aligned}$$ ♢

Osservazione 28 (Funzioni razionali di un esponenziale)**:** In generale, se $\mathcal{R}(t)$ è una funzione razionale di t (cioè un rapporto tra polinomi in t) e se a è un numero >0 e $\neq 1$, un integrale del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left(a^x\right)\ \mathrm{d}\,x$$

si calcola SEMPRE mediante la sostituzione "inversa" $t=a^x$, cioè $x=\frac{1}{\log a}\cdot\log t$. Effettuando tale sostituzione otteniamo:

$$\int \mathcal{R}\left(a^x\right)\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{\log a}\ \int \mathcal{R}(t)\ \frac{1}{t}\ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=a^x}$$

con l'integrale al secondo membro razionale (da calcolare usando opportunamente la tecnica dei fratti semplici). ♦

`Esempio 22:` Calcoliamo:

$$\int \frac{1-\sin x}{3\ \cos x-4\ \sin x+5}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

L'integrale non è calcolabile in maniera immediata, perciò procediamo per sostituzione usando la (3").
La sostituzione che proponiamo è basata sulle cosiddette *formule parametriche razionali in* $\tan \frac{x}{2}$ della Trigonometria Elementare, cioè sulle uguaglianze:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2\ \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\\ \cos x &= \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\ ,\end{aligned}$$

le quali si ricavano, ad esempio, usando le formule di duplicazione[5]; in particolare, la sostituzione "inversa" da operare è $t=\tan \frac{x}{2}$ dalla quale si ricava:

$$x = \underbrace{2\ \arctan t}_{=:\varphi(t)}\ ,$$

e, mediante le formule parametriche ora richiamate, fornisce per seno e coseno le espressioni:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2\ t}{1+t^2}\\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\ .\end{aligned}$$

Poiché:

$$\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}\ ,$$

applicando la (3") troviamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sin x}{3\ \cos x - 4\ \sin x + 5}\ \mathrm{d}\,x &= \int \frac{1-\frac{2\ t}{1+t^2}}{3\ \frac{1-t^2}{1+t^2} - 4\ \frac{2\ t}{1+t^2} + 5}\ \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t\Bigg|_{t=\tan \frac{x}{2}}\\ &= 2\ \int \frac{t^2-2t+1}{(1+t^2)\ (2t^2-8t+8)}\ \mathrm{d}\,t\Bigg|_{t=\tan \frac{x}{2}}\\ &= \int \frac{t^2-2t+1}{(1+t^2)\ (t-2)^2}\ \mathrm{d}\,t\Bigg|_{t=\tan \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

con l'ultimo integrale razionale e calcolabile usando la formula di Hermite.
Abbiamo:

$$\frac{t^2-2t+1}{(1+t^2)\ (t-2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\frac{a}{t-2}\right]$$

[5] Ad esempio, si ha:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\\ &= 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\\ &= \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{2\cdot\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ .\end{aligned}$$

se e solo se:

$$\begin{aligned}\frac{t^2-2t+1}{(1+t^2)\ (t-2)^2} &= \frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{t-2}-\frac{a}{(t-2)^2}\\ &= \frac{(At+B)(t-2)^2+C(1+t^2)(t-2)-a(1+t^2)}{(1+t^2)\ (t-2)^2}\\ &= \frac{(At+B)(t^2-4t+4)+C(t^3-2t^2+t-2)-a(1+t^2)}{(1+t^2)\ (t-2)^2} \qquad \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2-2t+1=(A+C)t^3+(-4A+B-2C-a)t^2+(4A-4B+C)t+(4B-2C-a)$$

ossia solo se:

$$\begin{cases} A+C=0\\ -4A+B-2C-a=1\\ 4A-4B+C=-2\\ 4B-2C-a=1\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A=-\frac{6}{25}B=\frac{8}{25}C=\frac{6}{25}\\ a=-\frac{1}{5}\ .\end{cases}$$

Dunque la scomposizione cercata è:

$$\frac{t^2-2t+1}{(1+t^2)\ (t-2)^2}=\frac{-6t+8}{25(1+t^2)}+\frac{6}{25(t-2)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\frac{1}{5(t-2)}\right]$$

e conseguentemente:

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-2t+1}{(1+t^2)\ (t-2)^2}\ \mathrm{d}\,t &= \int \frac{-6t+8}{25(1+t^2)}\ \mathrm{d}\,t+\int\frac{6}{25(t-2)}\ \mathrm{d}\,t\\ &\quad -\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\frac{1}{5(t-2)}\right]\ \mathrm{d}\,t\\ &= -\frac{3}{25}\int\frac{2t}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t+\frac{8}{25}\int\frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t+\frac{6}{25}\ \log|t-2|\\ &\quad -\frac{1}{5(t-2)}\\ &= -\frac{3}{25}\ \log(1+t^2)+\frac{8}{25}\ \arctan t+\frac{6}{25}\ \log|t-2|\\ &\quad -\frac{1}{5(t-2)}+C\ ,\end{aligned}$$

il che importa:

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\sin x}{3\ \cos x-4\ \sin x+5}\ \mathrm{d}\,x &= -\frac{3}{25}\ \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{25}\ x\\ &\quad +\frac{6}{25}\ \log\left|\tan\frac{x}{2}-2\right|-\frac{1}{5\left(\tan\frac{x}{2}-2\right)}+C\ . \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Osservazione 29 (Funzioni razionali di coseno e seno)**:** Più in generale, se $\mathcal{R}(c,s)$ è una funzione razionale delle due variabili c ed s (ossia, il rapporto di polinomi nelle due variabili c ed s), allora l'integrale:

$$\int \mathcal{R}(\cos x,\sin x)\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

il cui integrando è un'espressione razionale in coseno e seno, si può sempre risolvere usando la sostituzione "inversa" $t=\tan\frac{x}{2}$, cioè $x=2\arctan t$ e tenendo presenti le formule:

$$\sin x = \frac{2\,t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ .$$

Infatti, tale sostituzione riconduce il problema del calcolo dell'integrale assegnato al calcolo di:

$$\int \mathcal{R}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t}{1+t^2}\right)\ \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,t\ ,$$

che è un integrale razionale da calcolare con le tecniche usuali. ♦

Osservazione 30 (Funzioni razionali di $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\cos x \sin x$ e $\tan x$)**:** Se in un integrale del tipo precedente compaiono *solo* potenze di $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\cos x \sin x$ e $\tan x$, ossia solo monomi del tipo:

$$\cos^p x\ \ \sin^q x\ \ \tan^n x$$

con $p+q$ numero pari ed $n \in \mathbb{N}$, allora l'integrale da calcolare può essere razionalizzato anche con la sostituzione "inversa" $t = \tan x$, ossia $x = \arctan t$, la quale fornisce le seguenti espressioni sostituibili nell'integrando:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$
$$\cos^2 t = \frac{1}{1+t^2}$$
$$\sin x\ \ \cos x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan x = t\ .$$

Di solito, quando può essere applicata, questa sostituzione semplifica di gran lunga i calcoli necessari alla risoluzione del problema. ♦

`Esempio 23:` Calcoliamo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}-x}\ \mathrm{d}\,x\ .$$

Notiamo preliminarmente che tale integrale ha senso unicamente per i valori di x che appartengono all'insieme $[1/2, 1[\cup]1, +\infty[$, formato dall'unione di due intervalli disgiunti; pertanto, il problema della ricerca della primitiva è ben posto su ognuno di tali intervalli, ma non su tutto l'insieme di definizione dell'integrando.[6]
La sostituzione "inversa" da operare in questo caso è $t = \sqrt{2x-1}$, ossia $x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$, in cui $t \geq 0$: poiché in $J = [0, +\infty[$ la funzione $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)$ è strettamente monotòna e derivabile, la formula (3") restituisce:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}-x}\ \mathrm{d}\,x &= \int \frac{\frac{1}{2}(t^2+1)}{t-\frac{1}{2}(t^2+1)}\ t\ \ \mathrm{d}\,x\Bigg|_{t=\sqrt{2x-1}} \\ &= -\int \frac{t^3+t}{t^2-2t+1}\ \ \mathrm{d}\,x\Bigg|_{t=\sqrt{2x-1}}\ ,\end{aligned}$$

cosicché il problema iniziale è ricondotto al calcolo di un integrale razionale.
Eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore dell'ultimo integrando si

[6] Sicché valgono, in linea teorica, tutte le considerazioni relative all'applicabilità del *Teorema di Caratterizzazioni delle Funzioni con Derivata Nulla* ed alla scrittura corretta della costante d'integrazione già svolte per l'integrale $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$, ad esempio.

trova:

$$\frac{t^3+t}{t^2-2t+1} = t+2+\frac{4t-2}{t^2-2t+1}$$

e quindi la scomposizione in fratti semplici può essere fatta usando la formula di Hermite, cioè:

$$\frac{t^3+t}{t^2-2t+1} = t+2+\frac{A}{t-1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\frac{a}{t-1}\right]$$

con le costanti A ed a da scegliersi in modo che valga identicamente l'uguaglianza:

$$4t-2 = A(t-1)-a \qquad \Leftrightarrow \qquad 4t-2 = At-(A+a)\ ;$$

ciò accade solo quando $A = 4$ e $a = -2$, dunque la scomposizione dell'integrando razionale è:

$$\frac{t^3+t}{t^2-2t+1} = t+2+\frac{4}{t-1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\frac{2}{t-1}\right]$$

e da questo segue immediatamente:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}-x}\ \mathrm{d}\,x &= -\int \left[t+2+\frac{4}{t-1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\frac{2}{t-1}\right]\right]\ \mathrm{d}\,x\Big|_{t=\sqrt{2x-1}}\\ &= -\left(\frac{1}{2}\ t^2+2\ t+4\log|t-1|+\frac{2}{t-1}+C\right)\Big|_{t=\sqrt{2x-1}}\\ &= -\frac{1}{2}\ (2x-1)-2\ \sqrt{2x-1}-4\log\left|\sqrt{2x-1}-1\right|\\ &\quad -\frac{2}{\sqrt{2x-1}-1}+C\ . \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

Osservazione 31 (Funzioni razionali di x e della radice n-esima di $ax+b$)**:** Se $\mathcal{R}(x,t)$ è una funzione razionale di x ed t, l'integrale che contiene un'espressione razionale di x e della $\sqrt[n]{a+b}$:

$$\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)\ \mathrm{d}\,x\ ,$$

con $a \neq 0$, si calcola con la sostituzione "inversa" $t = \sqrt[n]{ax+b}$, ossia $x = \frac{1}{a}(t^n-b)$. Poiché per $t \geq 0$, se n è pari, o per $t \in \mathbb{R}$, se n è dispari, la funzione $\varphi(t) := \frac{1}{a}(t^n-b)$ è derivabile e strettamente crescente, la formula (3") importa:

$$\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)\ \mathrm{d}\,x = \frac{n}{a}\ \int \mathcal{R}\left(\frac{1}{a}(t^n-b),t\right)\ t^{n-1}\ \mathrm{d}\,t\Big|_{t=\sqrt[n]{ax+b}}\ ,$$

di modo che l'integrale iniziale in x è ricondotto ad un integrale razionale in t, calcolabile elementarmente. ♦

Osservazione 32 (Funzioni razionali di x e delle radici n_1-esima, n_2-esima, …, n_k-esima di $ax+b$)**:** In maniera del tutto analoga, se $\mathcal{R}(x,r_1,r_2,\dots r_k)$ è una funzione razionale delle $k+1$ variabili da cui dipende, l'integrale che contiene un'espressione razionale di x e delle radici $\sqrt[n_1]{ax+b}$, $\sqrt[n_2]{ax+b}$, …, $\sqrt[n_k]{ax+b}$:

$$\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \sqrt[n_2]{ax+b},\dots,\ \sqrt[n_k]{ax+b}\right)\ \mathrm{d}\,x$$

si calcola con la sostituzione "inversa" $t = \sqrt[N]{ax+b}$, ossia $x = \frac{1}{a}(t^N-b)$, in cui N è il *minimo comune multiplo* degli indici delle radici, i.e. $N = \mathrm{MCM}(n_1,n_2,\dots,n_k)$.

Poiché la funzione $\varphi(t) = \frac{1}{a}(t^N - b)$ è derivabile ed invertibile per $t \geq 0$, la (3”) implica:

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b}\right) \,\mathrm{d}\, x$$
$$= \frac{N}{a} \int \mathcal{R}\left(\frac{1}{a}(t^N - b), t^{N/n_1}, t^{N/n_2}, \ldots, t^{N/n_k}\right) \, t^{N-1} \,\mathrm{d}\, t\Big|_{t=\sqrt[N]{ax+b}} ,$$

con l'integrando al secondo membro razionale in t (in quanto tutti gli esponenti $\frac{N}{n_1}, \ldots, \frac{N}{n_k}$ sono interi). ♦

Osservazione 33 (Funzioni razionali di x e della radice n-esima di $\frac{ax+b}{cx+d}$)**:** Se $\mathcal{R}(x,t)$ è una funzione razionale, l'integrale in cui compare una funzione razionale di x e della radice $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$:

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \,\mathrm{d}\, x ,$$

con $ad - bc \neq 0$[7], si risolve con la sostituzione $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ossia $x = \frac{b-dt^n}{ct^n - a}$.
Facendo tale sostituzione, infatti, si vede che:

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \,\mathrm{d}\, x = \int \mathcal{R}\left(\frac{b-dt^n}{ct^n - a}, t\right) \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n - a)^2} \,\mathrm{d}\, t\Big|_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

con l'integrale al secondo membro razionale. ♦

Osservazione 34 (Funzioni razionali di x e di $\sqrt{ax^2+bx+c}$)**:** Se $\mathcal{R}(x,y)$ è una funzione razionale delle variabili da cui dipende, possiamo considerare l'integrale:

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}\, x ,$$

in cui $a \neq 0$ (altrimenti si ricade in uno dei casi già esaminati) e $\Delta := b^2 - 4ac \neq 0$ (per evitare casi banali, in cui la radice si semplifichi).
In tali ipotesi, l'integrando è ben definito solo nei casi seguenti:

(1) $a > 0$ e $\Delta < 0$, ed in tal caso l'integrando ha senso per ogni x reale;

(2) $a > 0$ e $\Delta > 0$, ed in tal caso l'integrando ha senso solo per valori di x esterni alle radici del radicando;

(3) $a < 0$ e $\Delta > 0$, ed in questo caso l'integrando ha senso per valori di x compresi tra le radici del radicando.

Pertanto, nell'illustrare come procedere col calcolo dell'integrale dobbiamo necessariamente distinguere tali casi.

Casi (1) **e** (2). Si integra per sostituzione “inversa” con $x = \varphi(t)$, essendo $\varphi(t)$ l'espressione che si ricava dalla *relazione euleriana*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(t - x) ,$$

[7] Come dovrebbe esser noto dalle scuole, tale condizione assicura che i coefficienti di numeratore e denominatore non sono proporzionali, cosicché i due polinomi presenti nel radicando non possono essere “semplificati”.

esplicitandola rispetto ad x. Elevando al quadrato i due membri troviamo:

$$ax^2 + bx + c = at^2 - 2atx + ax^2$$

da cui segue:

$$x = \underbrace{\frac{at^2 - c}{2at + b}}_{=:\varphi(t)} .$$

Determinata la φ, possiamo ricavare la quantità da sostituire alla radice usando la relazione euleriana:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{a}\ \ (t - x)|_{x=\varphi(t)}\\ &= \sqrt{a}\left(t - \frac{at^2 - c}{2at + b}\right)\\ &= \sqrt{a}\frac{2at^2 + bt - at^2 + c}{2at + b}\\ &= \sqrt{a}\ \frac{at^2 + bt + c}{2at + b}\end{aligned}$$

e possiamo anche ricavare esplicitamente il fattore $\varphi'(t)$ presente al secondo membro della (3”), cioè:

$$\varphi'(t) = 2a\ \frac{at^2 + bt + c}{(2at + b)^2} .$$

Dall’espressione di φ' riconosciamo che φ è strettamente crescente negli intervalli in cui è definita, i.e. in $]-\infty, -b/2a[$ ed in $]-b/2a, +\infty[$, sicché essa è dotata di funzione inversa in ognuno di tali intervalli; per ricavare l’inversa di φ, possiamo esplicitare la relazione euleriana rispetto alla t ottenendo:

$$t = \underbrace{x + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}}_{=\varphi^{-1}(x)} .$$

Fatto ciò, la formula (3”) ci consente di scrivere:

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}\, x\\ &\qquad = 2a \int \mathcal{R}\left(\frac{at^2 - c}{2at + b}, \sqrt{a}\ \frac{at^2 + bt + c}{2at + b}\right) \cdot \frac{at^2 + bt + c}{(2at + b)^2}\, \mathrm{d}\, t\Bigg|_{t=x+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} ,\end{aligned}$$

con l’integrale a secondo membro razionale e perciò calcolabile elementarmente.

In alcuni casi, l’integrazione si semplifica usando sostituzioni “inverse” ricavabili dalle ulteriori relazioni euleriane:

$$\begin{aligned}&\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\ (t + x)\\ &\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a}\ x\\ &\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}\ x\\ &\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - tx \qquad\qquad (\text{se } c > 0) ,\end{aligned}$$

le quali forniscono sempre sostituzioni razionalizzanti per l’integrale in esame.

Caso (3). L’integrale si calcola per sostituzione “inversa”, usando il seguente stratagemma.
Dette $x_1 < x_2$ le due radici reali e distinte del radicando, la funzione $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ risulta definita nell’intervallo interno alle radici, cioè per le $x_1 \leq x \leq x_2$; dato che il

polinomio ax^2+bx+c si fattorizza come $a(x-x_1)(x-x_2)$ e dato che $x-x_1, x_2-x \geq 0$ nell'insieme di definizione della radice, abbiamo:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}\\ &= \sqrt{(-a)(x-x_1)^2\frac{x_2-x}{x-x_1}}\\ &= \sqrt{-a}\ \sqrt{(x-x_1)^2}\ \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}\\ &= \sqrt{|a|}\ (x-x_1)\ \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}\ ,\end{aligned}$$

sicché possiamo scrivere:

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}\, x = \int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{|a|}\ (x-x_1)\ \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}\right) \mathrm{d}\, x\ .$$

Poiché l'integrando al secondo membro, a ben vedere, è una funzione razionale di x e di $\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}$, l'integrale si calcola con la sostituzione "inversa" $t = \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}$ già illustrata in precedenza.
Per completezza, aggiungiamo che dalla sostituzione proposta si ricava:

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{\frac{x_2+x_1t^2}{1+t^2}}_{=\varphi(t)}\\ \sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{|a|}\ (x_1-x_2)\ \frac{t}{1+t^2}\\ \varphi'(t) &= \frac{2(x_1-x_2)}{(1+t^2)^2}\ ,\end{aligned}$$

e sarà cura dello studioso lettore dimostrare tali uguaglianze.
Un'altra sostituzione possibile si ricava in analogia a quanto fatto appena. Invero, si ha:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}\\ &= \sqrt{(-a)(x_2-x)^2\frac{x-x_1}{x_2-x}}\\ &= \sqrt{-a}\ \sqrt{(x_2-x)^2}\ \sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}\\ &= \sqrt{|a|}\ (x_2-x)\ \sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}\ ,\end{aligned}$$

dunque l'integrale proposto si razionalizza anche con la sostituzione $t = \sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}$. ♦

Osservazione 35 (Evitare Procedimenti Meccanici!)**:** È bene osservare che non per tutti gli integrali del tipo $\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, \mathrm{d}\, x$ è opportuno ricorrere alle sostituzioni indicate nell'Osservazione precedente; anzi, in diversi casi è possibile semplificare il calcolo non adoperando alcuna sostituzione, oppure usando sostituzioni di tipo molto diverso da quelle proposte.
Ad esempio, l'integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}\, x$$

(che ricade nella tipologia ora indicata) è "immediato", in quanto si riconosce nell'integrando la derivata di $\arcsin \frac{x}{2}$.

Analogamente, l'integrale:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

(che ricade nella stessa tipologia) si potrebbe calcolare con la sostituzione $t = \sqrt{\frac{x+2}{2-x}}$, che condurrebbe all'integrale:

$$32 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,t$$

il cui calcolo è sufficientemente complesso; tuttavia, esso si può calcolare più facilmente effettuando la sostituzione "inversa" $x = 2\sin t$, con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$: infatti così facendo si trova:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}\,x = 4 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}\,t\ ,$$

con l'integrale al secondo membro ciclico e calcolabile mediante una semplice integrazione per parti.

Pertanto, prima di perder tempo in *contacci* inutilmente complicati, lo studente è invitato a riflettere sulla strategia da adottare per il calcolo di un integrale. ♦

4. I Teoremi di Liouville e di Tchebichev

4.1. **Funzioni Elementarmente Integrabili e Teorema di Liouville *.** Cominciamo con un paio di definizioni, una già nota e l'altra abbastanza ovvia:

Definizione 7
Si dice che una funzione (definita in un conveniente intervallo di $\mathbb{R}$) è *elementare* o, equivalentemente, è *dotata di espressione elementare* se e solo se essa:

- coincide con una delle funzioni "costante", "potenza", "esponenziale", "logaritmo", "seno", "coseno", "arcoseno", "arcocoseno", "arcotangente";
- si ottiene combinando funzioni elementari mediante un numero finito di operazioni di somma, differenza, prodotto, quoziente o composizione.

Definizione 8
Si dice che una funzione (definita in un conveniente intervallo di $\mathbb{R}$) è *elementarmente integrabile* se e solo se essa ha almeno una primitiva (definita nel medesimo intervallo) la quale è una funzione elementare.

Osservazione 36: È appena il caso di osservare che se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è elementarmente integrabile ed F è una sua primitiva dotata di espressione elementare in I, allora TUTTE le primitive di f in I sono elementari.
Infatti, ogni altra primitiva di f in I si ottiene sommando alla funzione elementare F un'opportuna costante C, la quale è riguardabile come una funzione elementare.
Pertanto, senza modificare lo spettro della definizione precedente, potremmo sostituire le parole "ha almeno una primitiva la quale è una funzione elementare" con "ha tutte le primitive che sono funzioni elementari". ♦

Osservazione 37: L'operazione di derivazione trasforma funzioni elementari in funzioni elementari: ciò segue dalla tabella delle derivate fondamentali e dalle regole di derivazione.
Per questo motivo una funzione non elementare non può avere primitive elementari, ossia una funzione non elementare non è elementarmente integrabile. ♦

Osservazione 38: Notiamo esplicitamente che, se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua non è elementarmente integrabile su $[a, b]$, la valutazione numerica dell'integrale definito:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

non può esser fatta usando la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale "a mano" (cioè, senza disporre di strumenti di calcolo adeguati[8]).
Infatti, pur rimanendo indubbiamente vero che:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a)$$

per ogni primitiva F di f, non possiamo sperare di calcolare numericamente la differenza al secondo membro sostituendo i valori a e b in una formula valutabile "a mano" poiché ogni primitiva di f non è dotata di espressione elementare. ♦

Enunciamo solamente, dato che la dimostrazione di tale risultato richiede conoscenze "avanzate" ed esula dallo scopo di queste note, il:

Teorema di Liouville
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, g ed h funzioni razionali definite in I (a valori reali o complessi) e g non costante.
Se la funzione f (a valori reali o complessi) definita in I ponendo:

$$f(x) := \mathbf{e}^{g(x)}\ h(x)$$

è elementarmente integrabile allora tutte le sue primitive in I sono del tipo:

$$\mathbf{e}^{g(x)}\ k(x) + C\ ,$$

con k funzione razionale definita in I (a valori reali o complessi).

Il Teorema appena enunciato ha come pressoché immediata conseguenza il:

Corollario 1
Esistono funzioni elementari che non sono elementarmente integrabili.
In particolare, le funzioni elementari definite in $\mathbb{R}$ dalle assegnazioni $x \mapsto \mathbf{e}^{x^2}$ ed $x \mapsto \mathbf{e}^{-x^2}$ non hanno alcuna primitiva dotata di espressione elementare.

Per una discussione di tale argomento (che si presta ad essere generalizzato a strutture algebriche di tipo più generale della classe delle funzioni elementari) rimandiamo all'agile –ma non facile!– articolo [DL] od a [PS, cap. 8, § 1.7].
Ci accontentiamo di presentare qui di seguito una carrellata delle più note funzioni elementari che non sono elementarmente integrabili.

`Esempio 24:` Per ogni fissato $p \neq 0$, la funzione elementare $x \mapsto \mathbf{e}^{px^2}$ non è elementarmente integrabile in alcun intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.
Infatti, preso $p > 0$ ad esempio, per sostituzione "diretta" abbiamo:

$$\int \mathbf{e}^{px^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \mathbf{e}^{(\sqrt{p}x)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{p}} \int \mathbf{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t \Big|_{t=\sqrt{p}x}$$

cosicché:

$$\int \mathbf{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{p} \int \mathbf{e}^{px^2}\,\mathrm{d}\,x \Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{p}}t} .$$

[8]Ad esempio: software di calcolo appositi (come Mathematica o MatLab), calcolatrici scientifiche appositamente progettate, oppure tavole numeriche.

Ciò implica immediatamente che $x \mapsto \mathbf{e}^{px^2}$ non può essere elementarmente integrabile: infatti, se *per assurdo* lo fosse, sarebbe elementarmente integrabile anche $t \mapsto \mathbf{e}^{t^2}$, contro il Teorema di Liouville. $\diamondsuit$

`Esempio 25:` La funzione $x \mapsto \frac{1}{\log x}$ non è elementarmente integrabile, ossia nessuna delle sue primitive definite su un intervallo contenuto in $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ è una funzione elementare. $\diamondsuit$

`Esempio 26:` La funzione elementare $x \mapsto \frac{\mathbf{e}^x}{x}$ non è elementarmente integrabile su alcun intervallo contenuto nel suo dominio.
Infatti, scegliendo di limitarci alle $x \in]0,+\infty[$, per sostituzione "inversa" abbiamo:

$$\int \frac{\mathbf{e}^x}{x}\,\mathrm{d}\,x \overset{x=\log t}{=} \int \frac{\mathbf{e}^{\log t}}{\log t}\ \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t\bigg|_{t=\mathbf{e}^x} = \int \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}\,t\bigg|_{t=\mathbf{e}^x}\ ,$$

ossia:

$$\int \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{\mathbf{e}^x}{x}\,\mathrm{d}\,x\bigg|_{x=\log t}\ .$$

Ciò implica che $x \mapsto \frac{\mathbf{e}^x}{x}$ non può essere elementarmente integrabile: infatti, se *per assurdo* lo fosse, sarebbe elementarmente integrabile anche $t \mapsto \frac{1}{\log t}$, contro l'Osservazione precedente. $\diamondsuit$

`Esempio 27:` Per ogni fissato $\omega > 0$, le funzioni elementari $x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{x}$, $x \mapsto \frac{\cos(\omega x)}{x}$, $x \mapsto \sin(\omega x^2)$ e $x \mapsto \cos(\omega x^2)$ non sono elementarmente integrabili su alcun intervallo contenuto nel loro dominio, ossia nessuna delle loro primitive è una funzione elementare. $\diamondsuit$

`Esempio 28:` Per ogni fissato $\omega > 0$, la funzione elementare $x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{\sqrt{x}}$ non è elementarmente integrabile su alcun intervallo contenuto nel suo dominio.
Infatti, per sostituzione "inversa" abbiamo:

$$\int \frac{\sin(\omega x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \overset{x=t^2}{=} \int \frac{\sin(\omega t^2)}{t}\ 2t\,\mathrm{d}\,t\bigg|_{t=\sqrt{x}} = 2\int \sin(\omega t^2)\,\mathrm{d}\,t\bigg|_{t=\sqrt{x}}\ ,$$

cioè:

$$\int \sin(\omega t^2)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(\omega x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x\bigg|_{x=t^2}\ .$$

Ciò, per l'Osservazione precedente, implica l'asserto. $\diamondsuit$

4.2. **L'Integrale Binomio ed il Teorema di Tchebichev *.** Fissati $a,b \in \mathbb{R}$ non nulli e $p,r,s \in \mathbb{Q}$, consideriamo la funzione elementare $x \mapsto x^p(ax^r+b)^s$. L'integrale:

$$\int x^p(ax^r+b)^s\,\mathrm{d}\,x$$

è chiamato *integrale binomio*.
Se s è intero, allora sviluppando la potenza del binomio si vede che l'integrale binomio è del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[n_p]{x},\ \sqrt[n_r]{x}\right)\mathrm{d}\,x$$

in cui n_p ed n_r sono gli eventuali denominatori diversi da 1 di p ed r; pertanto, in tal caso l'integrale binomio è razionalizzabile con la sostituzione "inversa" $t = \sqrt[N]{x}$ in cui $N = \mathrm{MCM}(n_p, n_r)$.

Se s non è intero, facciamo la sostituzione "inversa" $t = x^r$ nell'integrale binomio ed otteniamo:

$$\int x^p (ax^r + b)^s \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{r} \int t^{\frac{p+1}{r}-1} (at+b)^s \,\mathrm{d}\,t \Big|_{t=x^r} \quad ;$$

ragionando come sopra riconosciamo che, se $\frac{p+1}{r}$ è intero, allora l'integrale al secondo membro è del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left(t,\ \sqrt[n_s]{at+b}\right) \mathrm{d}\,t$$

(in cui n_s è il donominatore di s) ed è razionalizzabile con un'opportuna sostituzione inversa.
Se entrambi s e $\frac{p+1}{r}$ non sono interi, moltiplicando e dividendo per t^s otteniamo:

$$\int x^p (ax^r + b)^s \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{r} \int t^{\frac{p+1}{r}+s-1} \left(\frac{at+b}{t}\right)^s \mathrm{d}\,t \Big|_{t=x^r} \quad ,$$

e ragionando di nuovo come sopra vediamo che, se $\frac{p+1}{r} + s$ è intero, allora l'integrale al secondo membro è del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left(t,\ \sqrt[n_s]{\frac{at+b}{t}}\right) \mathrm{d}\,t$$

(in cui n_s è il donominatore di s) ed è nuovamente razionalizzabile con un'opportuna sostituzione inversa.
Abbiamo così dimostrato la parte riguardante la sufficienza del seguente:

TEOREMA DI TCHEBICHEV
Siano $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $p, r, s \in \mathbb{Q}$.
L'integrale binomio:

$$\int x^p (ax^r + b)^s \,\mathrm{d}\,x$$

è razionalizzabile se e solo se è soddisfatta la seguente condizione:

$$\text{(T)} \qquad \textit{almeno uno tra i numeri } s,\ \frac{p+1}{r} \ \textit{o} \ \frac{p+1}{r} + s \ \textit{è intero.}$$

La dimostrazione della parte riguardante la necessità della condizione presente nell'enunciato non è elementare e perciò la omettiamo.
Il Teorema di Tchebichev implica il seguente:

COROLLARIO 2
Nelle stesse ipotesi del Teorema di Tchebichev, la funzione elementare $x \mapsto x^p(ax^r + b)^s$ *è elementarmente integrabile se e solo se vale la condizione* (T).

Forniamo, infine, qualche esempio:

`Esempio 29:` Consideriamo la funzione elementare $x \mapsto \sqrt{1+x^3}$.
L'integrale:

$$\int \sqrt{1+x^3} \,\mathrm{d}\,x$$

è un integrale binomio con $a = b = 1$, $p = 0$, $r = 3$ ed $s = \frac{1}{2}$; dato che:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \\ \frac{p+1}{r} &= \frac{1}{3} \\ \frac{p+1}{r} + s &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

l'integrale non è razionalizzabile. Pertanto, la funzione $x \mapsto \sqrt{1+x^3}$ non è elementarmente integrabile. $\diamondsuit$

`Esempio 30:` Consideriamo la funzione elementare $x \mapsto \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x\sqrt{x}}$.
L'integrale:

$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x$$

è un integrale binomio con $a = b = 1$, $p = -\frac{3}{2}$, $r = \frac{3}{4}$ ed $s = \frac{2}{3}$; poiché:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{3} \\ \frac{p+1}{r} &= -\frac{2}{3} \\ \frac{p+1}{r} + s &= 0 \end{aligned}$$

l'integrale è razionalizzabile ($\frac{p+1}{r} + s$ è intero!).
Seguendo la strategia indicata all'inizio del paragrafo, facciamo la sostituzione "inversa" $t = \sqrt[4]{x^3}$ ed otteniamo:

$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3} \int t^{-\frac{5}{3}} \sqrt[3]{(1+t)^2} \,\mathrm{d}\,t \Big|_{t=\sqrt[4]{x^3}} ;$$

moltiplichiamo e dividiamo l'integrando per $t^{\frac{2}{3}}$, ottenendo:

$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3} \int t^{-1} \sqrt[3]{\left(\frac{1+t}{t}\right)^2} \,\mathrm{d}\,t \Big|_{t=\sqrt[4]{x^3}} ,$$

e facciamo l'ulteriore sostituzione "inversa" $u = \sqrt[3]{\frac{1+t}{t}} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{t}}$, pervenendo infine all'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x &= -4 \int \frac{u^4}{u^3-1} \,\mathrm{d}\,u \Big|_{u=\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}}} \Big|_{t=\sqrt[4]{x^3}} \\ &= -4 \int \frac{u^4}{u^3-1} \,\mathrm{d}\,u \Big|_{u=\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}}} . \end{aligned}$$

Lasciamo allo studioso lettore il compito di verificare (usando i soliti metodi d'integrazione delle funzioni razionali) che:

$$-4 \int \frac{u^4}{u^3-1} \,\mathrm{d}\,u = -2u^2 + \frac{2}{3} \log \frac{u^2+u+1}{(u-1)^2} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C ,$$

nonché quello di scrivere esplicitamente la soluzione dell'integrale proposto. $\diamondsuit$

`Esempio 31:` Consideriamo la funzione elementare $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[N]{1-x^n}}$, in cui $N, n \in \mathbb{N}$, $N, n \geq 2$ (per evitare casi banali).
L'integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt[N]{1-x^n}} \, \mathrm{d}\, x$$

è un integrale binomio con $a = -1$, $b = 1$, $p = 0$, $r = n$ ed $s = -\frac{1}{N}$; poiché:

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{N} \\ \frac{p+1}{r} &= \frac{1}{n} \\ \frac{p+1}{r} + s &= \frac{N-n}{nN} \end{aligned}$$

e poiché nessuno di tali numeri è intero a meno che non sia $N = n$[9], l'integrale è razionalizzabile se e solo se $N = n$.
Supposto allora $N = n$, notiamo che l'integrale binomio:

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} \, \mathrm{d}\, x$$

si può razionalizzare facilmente, almeno per gli $x > 0$, qualora si osservi che esso è equivalente all'integrale:

$$\int \frac{1}{x \sqrt[n]{\frac{1}{x^n} - 1}} \, \mathrm{d}\, x \ ,$$

il quale si razionalizza con la sostituzione "inversa" $t = \sqrt[n]{\frac{1}{x^n} - 1}$; procedendo in tale maniera si trova:

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} \, \mathrm{d}\, x = - \int \frac{t^{n-2}}{1+t^n} \, \mathrm{d}\, t \Big|_{t = \sqrt[n]{\frac{1}{x^n} - 1}} \ .$$

Come utile esercizio, consigliamo allo studioso lettore di svolgere il calcolo nei casi $n = 3$ ed $n = 4$.
Inoltre, come utile esperimento "computazionale", consigliamo al lettore di confrontare i risultati ottenuti mediante calcolo manuale con quelli prodotti da un qualsiasi software di calcolo simbolico.[10] $\diamondsuit$

Riferimenti bibliografici

[DL] De Lellis, C. (2013) *Il Teorema di Liouville, ovvero Perché "Non Esiste" la Primitiva di* $\mathbf{e}^{x^2}$, Il Volterriano, n. 11 [reperibile su www.math.uzh.ch/fileadmin/user/delellis/piblikation/Liouville_volterriano.pdf].

[DM] Di Meglio, G. (2016) *Alcuni Esercizi sull'Integrazione Indefinita* [reperibile su www.docenti.unina.it].

[FG] Fiorenza, R. & Greco, D. (1985) **Lezioni di Analisi Matematica - volume primo**, Liguori Editore, Napoli.

[PS] Pagani, C. D. & Salsa, S. (2015) **Analisi Matematica 1 - seconda edizione**, Zanichelli, Bologna.

---

[9] Infatti, le frazioni sono tutte *proprie* (avendo numeratore minore del denominatore), ossia appartenenti all'intervallo $]-1, 1[$. Conseguentemente, l'unica possibilità che uno dei tre numeri sia intero si verifica allorquando almeno uno dei tre è nullo... E l'unico di quei tre numeri che può annullarsi è evidentemente il terzo.

[10] Ad esempio, si possono usare i software disponibili online agli indirizzi integrator.wolfram.com o wolframalpha.com.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: guglielmo.dimeglio@unina.it