# COMPLEMENTI SULLA FORMULA DI TAYLOR

G. DI MEGLIO

## Indice



## Introduzione

In questi fogli presento, con qualche aggiunta, la definizione e le proprietà del *differenziale primo* e la *formula di Taylor*.
Nel primo paragrafo, le nozioni di differenziabilità e di differenziale primo sono date in maniera indipendente da quelle di derivabilità e di derivata prima (cioé *à la Fréchet*), in modo da renderle immediatamente generalizzabile al caso di funzioni di più variabili; successivamente sono esplorati i rapporti che intercorrono tra la differenziabilità e la derivabilità.
Nel secondo paragrafo, la formula di Taylor è dimostrata anzitutto nei casi particolari $n = 1$, $n = 2$ ed $n = 3$ e solo dopo viene dimostrato il teorema nella sua completa generalità (cioé col polinomio d'ordine $n$). Inoltre, sono elencate a parte alcune notevoli proprietà del polinomio di Taylor tralasciate in [MS] ed un sottoparagrafo è completamente dedicato alle varie forme in cui si può mettere il resto ed al loro uso nei calcoli approssimati.
Il documento si chiude con un'applicazione della *formula di Taylor col resto nella forma di Lagrange* ad un risultato che generalizza il cosiddetto *Teorema di Caratterizzazione delle Funzioni Costanti in un Intervallo*.
Alcuni esercizi sul materiale qui raccolto sono reperibili in [DM1, DM2].

## 1. Funzioni Differenziabili e Differenziale Primo

Cominciamo con la seguente:

Definizione 1 (Funzione Differenziabile in un Punto[1])
Siano $I$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in I$ un punto interno.

---

*Date*: 28 dicembre 2017.

[1]La definizione presentata qui, dovuta a M. Fréchet (1878 – 1973), si estende a casi molto generali.

Si dice che $f$ *è differenziabile in* $x_0$ se e solo se esiste un numero $l = l_{x_0} \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - l \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0 \; . \tag{1}$$

In tal caso, l'applicazione $\mathrm{d}\, f(\cdot; x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita ponendo:

$$\mathrm{d}\, f(\Delta x; x_0) := l_{x_0} \cdot \Delta x$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$, si chiama *differenziale (primo) di* $f$ *nel punto* $x_0$.

**Osservazione 1** (Sulla Notazione per il Differenziale - I)**:** Notiamo esplicitamente che, il più delle volte (e soprattutto nelle applicazioni), il differenziale di una funzione $f$ viene denotato semplicemente con il simbolo $\mathrm{d}\, f$, in cui non vengono messi in evidenza né il punto in cui il differenziale è calcolato (cioè $x_0$) né la variabile da cui il differenziale dipende (cioè la $\Delta x$).
Ciò snellisce la notazione, rendendola manipolabile con estrema facilità. ♦

**Osservazione 2:** È appena il caso di notare che se una funzione $f$ è differenziabile in $x_0$, allora il numero $l$ la cui esistenza è predicata nella definizione è **unico**.
Invero, se $\lambda$ è un secondo numero reale tale che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0 \; ,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} l - \lambda &= \lim_{x \to x_0} \frac{(l - \lambda) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x_0) + l \cdot (x - x_0)\big) + \big(-f(x_0) - \lambda \cdot (x - x_0)\big)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{-\big(f(x) - f(x_0) - l \cdot (x - x_0)\big) + \big(f(x) - f(x_0) - \lambda \cdot (x - x_0)\big)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} -\frac{f(x) - f(x_0) - l \cdot (x - x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \\ &= 0 \; , \end{aligned}$$

ossia $\lambda = l$. ♦

La proprietà di differenziabilità è strettamente connessa alla proprietà di derivabilità, come mostra la:

PROPOSIZIONE 1
*Siano $I$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in I$ un punto interno.*
*La $f$ è differenziabile in $x_0$ se e solo se $f$ è derivabile in $x_0$; inoltre, il numero $l$ che gode della (1) è uguale a $f'(x_0)$.*

*Dimostrazione. Se $f$ è differenziabile, allora $f$ è derivabile ed $f'(x_0) = l$.*
Dalla (1) segue che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l = 0$$

da cui:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \; ,$$

che è la tesi in quanto $l \in \mathbb{R}$.

*Se $f$ è derivabile, allora $f$ è differenziabile ed $l = f'(x_0)$.*
Dalla definizione di derivata segue che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$$

da cui:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = 0\ ,$$

che è la tesi. □

Conseguentemente, possiamo scrivere la legge di assegnazione del differenziale primo di una funzione differenziabile in $x_0$ come:

$$\mathrm{d}\, f = f'(x_0)\cdot \Delta x$$

e la relazione di limite (1) come:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot \Delta x}{\Delta x} = 0\ .$$

Quest'ultima relazione mostra che l'incremento $\Delta f := f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, subìto dalla funzione $f$ in corrispondenza dell'incremento $\Delta x$ della variabile, si può approssimare per $\Delta x$ "piccoli" con $\mathrm{d}\, f = f'(x_0)\cdot\Delta x$ a meno di un infinitesimo d'ordine superiore al primo; in altri termini, abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \mathrm{d}\, f + \mathrm{o}(\Delta x) && \text{per } \Delta x\to 0\\ &= f'(x_0)\cdot\Delta x + \mathrm{o}(\Delta x) && \text{per } \Delta x \to 0\ , \end{aligned}$$

e ciò mostra che, se $f'(x_0)\neq 0$, il differenziale primo $f'(x_0)\cdot\Delta x$ è la *parte principale* dell'infinitesimo $\Delta f$ quando l'incremento $\Delta x$ tende a 0.

**Osservazione 3** (Sulla Notazione per il Differenziale - II)**:** Considerata la *funzione identità* $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $i(x) := x$, abbiamo $i'(x) = 1$ ovunque e perciò:

$$\mathrm{d}\, i = \Delta x\ .$$

Se scegliamo, commettendo un *abuso di notazione*, di denotare semplicemente con $x$ la funzione $i$, l'uguaglianza precedente si legge:

$$\mathrm{d}\, x = \Delta x$$

(tale uguaglianza viene talora interpretata dicendo che "il differenziale $\mathrm{d}\, x$ della variabile $x$ coincide con l'incremento $\Delta x$"). Ne consegue che la definizione di differenziale può essere riscritta come $\mathrm{d}\, f = f'(x_0)\,\mathrm{d}\, x$ o, se si sceglie di omettere totalmente la dipendenza dal punto $x_0$ al secondo membro, addirittura come:

$$\mathrm{d}\, f = f'\,\mathrm{d}\, x\ ,$$

la quale è molto comune nelle applicazioni (poiché consente di ricavare formalmente la derivata prima come rapporto degli "incrementi infinitesimi" $\mathrm{d}\, f$ e $\mathrm{d}\, x$). ♦

Dal discorso precedente ricaviamo senza sforzo che:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \mathrm{o}(x-x_0) \qquad \text{per } x\to x_0\ ,$$

cosicché la $f$ può essere approssimata da un polinomio di grado (al più) uguale ad 1 quando $x$ tende ad $x_0$.
Questo è un fatto della massima importanza e può essere generalizzato, come mostreremo nel possimo paragrafo; ora ci preme segnalare il significato geometrico insito in tale risultato:

**Osservazione 4** (Differenziabilità e Definizione di Retta Tangente al Grafico)**:** In aula abbiamo definito la *retta tangente al grafico di una funzione* $f$ *nel punto di ascissa* $x_0$ formalizzando la nozione intuitiva di "posizione limite" delle rette secanti al grafico condotte per $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Tuttavia, tale definizione si presta poco ad essere generalizzata e perciò è necessario riformularla in termini più manipolabili. In particolare, si dà la seguente definizione, formulata in termini analitici:

Definizione 2 (Retta Tangente al Grafico di una Funzione)
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in I$ un punto interno.
Si dice che la retta non verticale di equazione $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, appartenente al facio proprio di centro $P_0 = (x_0, f(x_0))$, è *tangente al grafico di* $f$ *nel punto di ascissa* $x_0$ se e solo se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - m \cdot (x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \,.$$

Confrontando la Definizione 2 con la Definizione 1 e tenendo presente l'**Osservazione 2**, vediamo che il grafico di una funzione $f$ è dotato di retta tangente non verticale nel punto di ascissa $x_0$ interna ad $I$ se e solo se $f$ è differenziabile in $x_0$; in tal caso, quindi, per la Proposizione 1 risulta $m = l = f'(x_0)$. ♦

## 2. La Formula di Taylor

D'ora in avanti supporremo sempre (a meno che non sia specificato diversamente) che $I$ sia un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in I$ sia un punto interno.[2]

### 2.1. Formula di Taylor al Primo Ordine.

Supponendo che $f$ sia derivabile in $x_0$, per quanto detto nel paragrafo precedente abbiamo:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0 \,.$$

Posto:

$$p_1(x; x_0) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

per ogni $x \in I$, la funzione $p_1(\cdot; x_0)$ è un polinomio di grado (al più) ugugale ad 1 e gode della proprietà:

$$f(x) = p_1(x; x_0) + \mathrm{o}(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0 \,. \tag{2}$$

Inoltre, il polinomio $p_1(\cdot; x_0)$ gode di un'ulteriore interessante proprietà, cioè quella di avere in $x_0$ lo stesso valore e la stessa derivata di $f$: infatti, $p_1(x_0; x_0) = f(x_0)$ ed è molto semplice constatare che l'uguaglianza:

$$p_1'(x; x_0) = f'(x_0)$$

vale ovunque in $I$ quindi, in particolare, vale in $x_0$.
Abbiamo così provato validi i seguenti fatti:

Proposizione 2 (Formula di Taylor al Primo Ordine col Resto nella Forma di Peano)
*Siano $I$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in I$ un punto interno.*
*Se $f$ è derivabile un volta in $x_0$, esiste un polinomio $p_1(\cdot; x_0)$ di grado (al più) uguale ad 1 tale che:*

$$f(x) = p_1(x; x_0) + \mathrm{o}(x - x_0) \qquad \textit{per } x \to x_0 \,; \tag{3}$$

*In particolare:*

$$p_1(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \,.$$

[2]Quest'ultima ipotesi non è strettamente necessaria; qui e nel seguito la usiamo solo per comodità.

La (3) è usualmente detta *formula di Taylor al primo ordine (col resto nella forma di Peano)* ed il polinomio $p_1(\cdot; x_0)$ è detto *polinomio di Taylor del primo ordine relativo ad $f$ centrato in $x_0$*.
In particolare, il cosiddetto *resto di Peano* è la quantità $r_1(x; x_0) := f(x) - p_1(x; x_0)$, infinitesima d'ordine superiore al primo in $x_0$.

Proposizione 3 (Proprietà del Polinomio di Taylor del Primo Ordine)
*Il polinomio $p_1(\cdot; x_0)$ gode della seguente proprietà:*

$$\begin{cases} p_1(x_0; x_0) = f(x_0) \\ p_1'(x_0; x_0) = f'(x_0) \end{cases} , \tag{4}$$

*cioè esso assume in $x_0$ lo stesso valore di $f$ ed ha ivi derivata prima coincidente con quella di $f$.*

**Osservazione 5:** Ricordata l'interpretazione geometrica della derivata, il polinomio $p_1(\cdot; x_0)$ ha come grafico la retta tangente alla curva-grafico di $f$ nel punto di coordinate $\big(x_0, f(x_0)\big)$. ♦

Ci proponiamo ora di completare gli enunciati precedenti in due direzioni: innanzitutto, mostrando che il polinomio $p_1(\cdot; x_0)$ è univocamente determinato dalla condizione (3); poi, mostrando che se una funzione $f$, continua in $x_0$, è approssimata intorno ad $x_0$ da un polinomio di grado (al più) uguale ad 1 a meno di un infinitesimo d'ordine superiore, allora $f$ è derivabile in $x_0$.

**Osservazione 6** (Unicità del Polinomio Approssimante)**:** Fatte salve le ipotesi su $f$ ed $x_0$, supponiamo che $p$ sia un polinomio di grado (al più) uguale ad 1 che goda della (3), cioè tale che:

$$f(x) = p(x) + \mathrm{o}(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0 ,$$

e mostriamo che si ha necessariamente $p(x) = p_1(x; x_0)$.
Detti $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ i coefficienti di $p$, ossia i numeri tali che:

$$p(x) = a_0 + a_1 x ,$$

il verificarsi dell'uguaglianza precedente, unito alla continuità di $p$ ed $f$ in $x_0$, implica:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \\ &= \lim_{x \to x_0} a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x - x_0) \\ &= a_0 + a_1 x_0 , \end{aligned}$$

cioè:

$$a_0 = f(x_0) - a_1 x_0 ; \tag{5}$$

d'altra parte, per definizione di "o piccolo", abbiamo pure:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x - x_0} = 0$$

da cui, per la (5), segue:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a_1(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

ossia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 ,$$

cioè:

$$f'(x_0) = a_1 \; ; \tag{6}$$

conseguentemente, per (5) e (6) abbiamo:

$$p(x) = \big(f(x_0) - f'(x_0)x_0\big) + f'(x_0)x = p_1(x; x_0) \; ,$$

come volevamo. ♦

**Osservazione 7** (Derivabilità di una Funzione Approssimabile con un Polinomio)**:** Supponiamo, infine, che $f$ sia continua in $x_0$ e che valga la relazione:

$$f(x) = p(x) + \mathrm{o}(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0$$

con $p(x) = a_0 + a_1 x$ polinomio di grado (al più) uguale ad 1, e mostriamo che $f$ è derivabile in $x_0$.
Per continuità abbiamo:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \\ &= \lim_{x \to x_0} a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x - x_0) \\ &= a_0 + a_1 x_0 \end{aligned}$$

da cui $p(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0)$; per definizione di o, abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{p(x) - f(x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{a_1(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

cosicché $f$ è derivabile in $x_0$ (e la derivata coincide con il coefficiente $a_1$). ♦

2.2. **Formula di Taylor al Secondo Ordine.** Supponiamo, ora, che $f$ sia derivabile una volta intorno ad $x_0$ e due volte in $x_0$.
In tal caso la funzione derivata prima $f'$ è ben definita intorno ad $x_0$ ed è derivabile in tale punto, la sua derivata essendo uguale a $f''(x_0)$.
Proviamo che ciò è sufficiente a dire che la funzione $f$ si può approssimare intorno ad $x_0$ con un polinomio $p$ di grado (al più) uguale a 2 a meno di un infinitesimo d'ordine superiore a 2 in $x_0$, il quale gode di qualche interessante proprietà.
Abbiamo:

Proposizione 4 (Formula di Taylor al Secondo Ordine col Resto nella forma di Peano)
*Siano $I$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile nell'interno di $I$ ed $x_0 \in I$ un punto interno.*
*Se $f$ è derivabile due volte in $x_0$, esiste un polinomio $p_2(\cdot; x_0)$ di grado (al più) uguale a due tale che:*

$$f(x) = p_2(x; x_0) + \mathrm{o}\left((x - x_0)^2\right) \qquad \textit{per } x \to x_0 \; . \tag{7}$$

*In particolare:*

$$p_2(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 \; .$$

La (7) è usualmente detta *formula di Taylor al secondo ordine (col resto nella forma di Peano)* ed il polinomio $p_2(\cdot; x_0)$ è detto *polinomio di Taylor del secondo ordine relativo ad $f$ centrato in $x_0$.*

In particolare, il cosiddetto *resto* è la quantità $r_2(x;x_0) := f(x) - p_2(x;x_0)$, infinitesima d'ordine superiore al secondo in $x_0$.

*Dimostrazione.* Dimostriamo che il polinomio $p_2(\cdot;x_0)$ definito nell'enunciato gode della proprietà (7). Applicando il *teorema di de l'Hôpital* otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} \\
&\quad \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)\cdot(x-x_0)}{2(x-x_0)} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} - f''(x_0)\right) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

cosicché $f(x) = p_2(x;x_0) + \mathrm{o}((x-x_0)^2)$ per $x \to x_0$. □

Proposizione 5 (Proprietà del Polinomio di Taylor del Secondo Ordine)
*Il polinomio $p_2(\cdot;x_0)$ gode della proprietà:*

$$\begin{cases} p_2(x_0;x_0) = f(x_0) \\ p_2'(x_0;x_0) = f'(x_0) \\ p_2''(x_0;x_0) = f''(x_0) \end{cases}, \tag{8}$$

*cioè esso assume in $x_0$ lo stesso valore di $f$ ed ha in tal punto la medesima derivata prima e seconda di $f$.*

**Osservazione 8:** Se $f''(x_0) \neq 0$, il polinomio $p_2$ ha come grafico una parabola, la quale interseca la curva-grafico di $f$ nel punto di coordinate $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ed ha come tangente in tale punto la retta tangente al grafico di $f$ nel medesimo punto; inoltre, tale parabola è concava o convessa a seconda che $f'^{prime}(x_0) < 0$ o $> 0$. ♦

*Dimostrazione.* Per dimostrare che il polinomio $p_2$ gode delle (8) è sufficiente un semplice calcolo. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
p_2(x;x_0) &= f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 \\
p_2'(x;x_0) &= f'(x_0) + f''(x_0)\cdot(x-x_0) \\
p_2''(x;x_0) &= f''(x_0)
\end{aligned}$$

e basta sostituire $x = x_0$ per concludere. □

**Osservazione 9** (Unicità del Polinomio Approssimante)**:** Ci proponiamo di completare l'enunciato della proposizione precedente come già fatto nel caso precedente, ossia mostrando che il polinomio di Taylor è univocamente individuato dalla (7). Supponiamo che un polinomio di grado (al più) uguale a 2, diciamo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, goda della (7) e mostriamo che esso coincide con il polinomio di Taylor $p_2(\cdot;x_0)$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \\
&= \lim_{x\to x_0} p(x) + \mathrm{o}\left((x-x_0)^2\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left((x-x_0)^2\right) \\
&= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2\ ,
\end{aligned}$$

perciò deve essere necessariamente:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \; . \tag{9}$$

D'altra parte, usando la (9), troviamo:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \mathrm{o}\left((x-x_0)^2\right)\right) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(a_0 - f(x_0)) + a_1 x + a_2 x^2 + \mathrm{o}\left((x-x_0)^2\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(-a_1 x_0 - a_2 x_0^2\right) + a_1 x + a_2 x^2 + \mathrm{o}\left((x-x_0)^2\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{a_1(x - x_0) + a_2(x^2 - x_0^2) + \mathrm{o}\left((x-x_0)^2\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} a_1 + a_2(x + x_0) + \frac{\mathrm{o}\left((x-x_0)^2\right)}{x - x_0} \\
&= a_1 + 2a_2 x_0
\end{aligned}$$

da cui segue che deve necessariamente essere:

$$a_1 + 2a_2 x_0 = f'(x_0) \; . \tag{10}$$

Mettendo insieme le (9) ed (10) otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ a_1 + 2a_2 x_0 = f'(x_0) \end{cases}$$

dal quale ricaviamo:

$$\begin{cases} a_0 = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + a_2 x_0^2 \\ a_1 = f'(x_0) - 2a_2 x_0 \; , \end{cases}$$

cosicché possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + a_2 x_0^2 + (f'(x_0) - 2a_2 x_0)\, x + a_2 x^2 \\
&= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 \; .
\end{aligned}$$

Infine, applicando il *teorema di de l'Hôpital* troviamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} & \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) - a_2 (x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a_2(x - x_0)}{2(x - x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} - a_2 \\
&= \frac{1}{2}\, f''(x_0) - a_2
\end{aligned}$$

e, confrontando tale risultato con la (7), otteniamo $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$; pertanto risulta:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 = p_2(x; x_0)$$

come volevamo. ⧫

**Osservazione 10:** A differenza del paragrafo precedente, dal sussistere di un'approssimazione polinomiale simile alla (7) non possiamo trarre alcuna conclusione circa l'esistenza della derivata seconda di $f$ nel punto $x_0$.
Per lumeggiare tale circostanza, proponiamo il seguente controesempio.
Fissiamo $\alpha > 0$ e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & , \text{se } x > 0 \\ 0 & , \text{se } x \leq 0 \; . \end{cases}$$

Evidentemente $f$ è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$; però, essa è continua anche in 0, dato che:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \; .$$

Analogamente, $f$ è derivabile in $\mathbb{R} - \{0\}$ ed, avendosi:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha - 1} \sin \frac{1}{x} \; ,$$

la $f$ risulta derivabile anche in 0, con derivata ivi nulla, solo se $\alpha > 1$.
Supponendo di aver scelto $\alpha > 1$, la derivata di $f$ è:

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha - 1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha - 2} \cos \frac{1}{x} & , \text{se } x > 0 \\ 0 & , \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

ed $f'$ è continua in 0 solo se risulta $\alpha - 2 > 0$, ossia $\alpha > 2$; se $\alpha > 2$, la $f'$ (che certamente è derivabile in $\mathbb{R} - \{0\}$) ha:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \alpha x^{\alpha - 2} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha - 3} \cos \frac{1}{x} \; ,$$

sicché $f'$ è derivabile in 0, con derivata nulla, solo se:

$$\begin{cases} \alpha - 2 > 0 \\ \alpha - 3 > 0 \; , \end{cases}$$

ossia se $\alpha > 3$.
Scegliamo un qualsiasi esponente $2 < \alpha \leq 3$: in tale ipotesi, abbiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha - 2} \sin \frac{1}{x} = 0 \; ,$$

cosicché $f(x) = 0 + \mathrm{o}(x^2)$ per $x \to 0$, cioè $f$ è approssimabile intorno a 0 con un polinomio[3] avente grado (al più) uguale a 2 a meno di un infinitesimo d'ordine superiore a 2; ma, d'altra parte, $f$ è derivabile **una sola volta** in 0 (ed ha derivata prima nulla). ♦

2.3. **Formula di Taylor al Terzo Ordine.** Supponiamo che $f$ sia derivabile due volte intorno ad $x_0$ tre volte in $x_0$.
Tanto basta per concludere che la funzione $f$ può essere approssimata a meno di un infinitesimo d'ordine superiore a 3 in $x_0$, come mostra la:

Proposizione 6 (Formula di Taylor al Terzo Ordine col Resto nella Forma di Peano)
*Siano $I$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in $I$ e $x_0 \in I$ un punto interno.*

[3] Quello nullo.

*Se $f$ è derivabile tre volte in $x_0$, allora esiste un polinomio $p_3(\cdot; x_0)$ di grado (al più) uguale a 3 tale che:*

$$f(x) = p_3(x; x_0) + \mathrm{o}\left((x - x_0)^3\right) \qquad \textit{per } x \to x_0 \ . \tag{11}$$

*In particolare:*

$$p_3(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 \ ,$$

L'uguaglianza (11) si chiama *formula di Taylor al terzo ordine (col resto nella forma di Peano)* ed il polinomio $p_3(\cdot; x_0)$ si chiama *polinomio di Taylor del terzo ordine relativo ad $f$ centrato in $x_0$.*
In particolare, il cosiddetto *resto* è la quantità $r_3(x; x_0) := f(x) - p_3(x; x_0)$, infinitesima d'ordine superiore al terzo in $x_0$.

**Osservazione 11:** Se $f'''(x_0) \neq 0$, il grafico di $p_3(\cdot; x_0)$ è una curva cubica, la quale interseca la curva-grafico di $f$ nel punto di coordinate $\big(x_0, f(x_0)\big)$, avendovi la medesima retta tangente e la stessa concavità. ♦

**Osservazione 12:** Notiamo esplicitamente che i coefficienti moltiplicativi 1, $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{6}$ che precedono, rispettivamente, le derivate $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ ed $f'''(x_0)$ nella definizione del polinomio di Taylor $p_3(\cdot; x_0)$ sono i reciproci dei numeri 1, $2 = 2 \cdot 1$ e $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Ciò dà un'indicazione sulla forma "generale" dei coefficienti moltiplicativi nella definizione del polinomio di Taylor, che tornerà utile nel paragrafo seguente. ♦

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga alla precedente.
Applicando due volte il *teorema di de l'Hôpital* otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 - \frac{1}{6} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3}{(x - x_0)^3} \\
&\quad \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0) \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^2}{3(x - x_0)^2} \\
&\quad \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0) \cdot (x - x_0)}{6(x - x_0)} \\
&\quad = \frac{1}{6} \left( \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} - f'''(x_0) \right) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

cosicché vale la (11). □

Proposizione 7 (Proprietà del Polinomio di Taylor del Terzo Ordine)
*Il polinomio $p_3(\cdot; x_0)$ gode della proprietà:*

$$\begin{cases} p_3(x_0; x_0) = f(x_0) \\ p_3'(x_0; x_0) = f'(x_0) \\ p_3''(x_0; x_0) = f''(x_0) \\ p_3'''(x_0; x_0) = f'''(x_0) \ , \end{cases} \tag{12}$$

*cioè esso assume in $x_0$ lo stesso valore di $f$ ed in tal punto le sue derivate prima, seconda e terza coincidono con le rispettive derivate di $f$.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare le (12) basta calcolare:

$$\begin{aligned}
p_3(x;x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3 \\
p_3'(x;x_0) &= f'(x_0) + f''(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 \\
p_3''(x;x_0) &= f''(x_0) + f'''(x_0)\cdot(x-x_0) \\
p_3'''(x;x_0) &= f'''(x_0)
\end{aligned}$$

e sostituire $x = x_0$. □

**Osservazione 13** (Unicità del Polinomio Approssimante)**:** Anche in questo caso potremmo completare l'enunciato asserendo l'*unicità* del polinomio che gode della (11): lasciamo allo studioso lettore il compito di dimostrare questa affermazione. ♦

**Osservazione 14:** Notiamo che, anche in questo caso, il sussistere della (11) non fornisce alcuna informazione sull'esistenza della derivata terza di $f$ in $x_0$: per illustrare tale circostanza basta elaborare un controesempio del tipo fornito in precedenza. ♦

2.4. **Formula di Taylor d'Ordine $n$.** Supponiamo, del tutto in generale, che la funzione $f$ sia derivabile $n-1$ volte in $I$ ed $n$ volte in $x_0$.
Tanto basta per affermare che la funzione $f$ si può approssimare intorno ad $x_0$ con un polinomio di grado (al più) uguale ad $n$, a meno di un infinitesimo d'ordine superiore ad $n$ in $x_0$. Infatti vale la:

TEOREMA 1 (Formula di Taylor di Ordine $n$ col Resto nella Forma di Peano)
*Siano $I$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte in $I$ ed $x_0 \in I$ un punto interno.*
*Se $f$ è derivabile $n$ volte in $x_0$, allora esiste un polinomio $p_n(\cdot;x_0)$ di grado (al più) uguale ad $n$ tale che:*

$$f(x) = p_n(x;x_0) + \mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right) \qquad \textit{per } x \to x_0 \ . \tag{13}$$

*In particolare:*

$$p_n(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n \ .$$

L'uguaglianza (13) si chiama *formula di Taylor di ordine $n$ (col resto nella forma di Peano)* ed il polinomio $p_n(\cdot;x_0)$ si chiama *polinomio di Taylor di ordine $n$ relativo ad $f$ centrato in $x_0$.*
In particolare, il cosiddetto *resto* è la quantità $r_n(x;x_0) := f(x) - p_n(x;x_0)$, infinitesima d'ordine superiore ad $n$ in $x_0$.
Il simbolo $n!$ (si legge "enne fattoriale") denota il prodotto di tutti i numeri naturali $\leq n$, ossia:

$$n! := n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \ .$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga alle precedenti due.

Applicando $n-1$ volte il *teorema di de l'Hôpital* otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}\\
&\quad\overset{\mathrm{H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(x-x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}\\
&\quad\overset{\mathrm{H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-2)!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{n-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\\
&\quad\overset{\mathrm{H}}{=}\cdots\\
&\quad\overset{\mathrm{H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)}{n!(x-x_0)}\\
&\quad=\frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right)\\
&\quad=0
\end{aligned}
$$

cosicché vale la (13). □

Proposizione 8 (Proprietà del Polinomio di Taylor di Ordine $n$)
*Il polinomio $p_n(\cdot;x_0)$ gode della proprietà:*

$$
\begin{cases}
p_n(x_0;x_0)=f(x_0)\\
p_n'(x_0;x_0)=f'(x_0)\\
p_n''(x_0;x_0)=f''(x_0)\\
\quad\vdots\\
p_n^{(n)}(x_0;x_0)=f^{(n)}(x_0)\,,
\end{cases}
\tag{14}
$$

*cioè esso assume in $x_0$ lo stesso valore di $f$ ed in tal punto le sue derivate fino a quella d'ordine $n$ coincidono con le corrispondenti derivate di $f$.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare le (14) basta calcolare:

$$
\begin{aligned}
p_n(x;x_0)&=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n\\
p_n'(x;x_0)&=f'(x_0)+f''(x_0)\cdot(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{n-1}\\
p_n''(x;x_0)&=f''(x_0)+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{n-2}\\
&\ \ \vdots\\
p_n^{(n-1)}(x;x_0)&=f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}\cdot(x-x_0)\\
p_n^{(n)}(x;x_0)&=f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

e sostituire $x=x_0$. □

**Osservazione 15** (Unicità del Polinomio Approssimante)**:** Anche nel caso generale, il polinomio che approssima $f$ intorno ad $x_0$ come nella (13) è univocamente determinato e coincide col polinomio di Taylor. ♦

**Osservazione 16:** Valgono considerazioni analoghe a quelle già proposte per i casi precedenti circa l'impossibilità di concludere l'esistenza della derivata $n$-esima in $x_0$ di una funzione approssimabile come detto nella (13). ♦

2.5. **Il Resto della Formula di Taylor d'Ordine $n$.** Il cosiddetto resto della formula di Taylor d'ordine $n$, cioè la quantità $r_n(x;x_0) := f(x) - p_n(x;x_0)$, può essere espresso in diversi modi: in questo paragrafo ne elencheremo alcuni, rimandando la dimostrazione di tali risultati agli `Esercizi`.

Innanzitutto, osserviamo che la relazione acquisita col Teorema 1:

$$r_n(x;x_0) = \mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right) \qquad \text{per } x \to x_0 \ , \tag{15}$$

la quale restituisce il resto nella *forma di Peano*, equivale ad asserire che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0 \ ;$$

la continuità di $r_n(x;x_0)$ in $I$ ci consente di affermare che la funzione $\omega_n(\cdot;x_0) : I \to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$\omega_n(x;x_0) := \begin{cases} \frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} & , \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & , \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in $I$, nulla in $x_0$ e tale che:

$$r_n(x;x_0) = \omega_n(x;x_0) \cdot (x-x_0)^n \ . \tag{16}$$

La (16) è un'altra forma in cui si può mettere il resto di Peano.

**Osservazione 17:** La forma di Peano (15) evidenzia una proprietà *locale* della funzione $r_n$, cioè quella di essere infinitesima d'ordine superiore ad $n$ in $x_0$.
Invece, la forma di Peano (16) fornisce un'espressione esplicita *globale* per la funzione resto $r_n(\cdot;x_0) : I \to \mathbb{R}$: il resto si esprime ovunque, in ogni punto di $I$, come prodotto di una funzione continua e nulla in $x_0$ (la $\omega_n(\cdot;x_0)$) e della potenza $n$-esima del binomio $x - x_0$. ♦

Un'espressione esplicita globale per il resto della formula di Taylor si può ottenere, sotto opportune ipotesi, anche usando un integrale definito. Invero, si può dimostrare (cfr. [DM2, Esercizio 29]) che se $f$ è dotata di derivata $n+1$-esima continua in $I$, allora:

$$r_n(x;x_0) = \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\ \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}\,t \ . \tag{17}$$

L'espressione (17) è nota come *forma integrale* del resto $r_n$.

Altre espressioni del resto non forniscono informazioni globali, bensì informazioni collegate al particolare valore $x \in I$ in cui il resto viene valutato; perciò, d'ora in avanti, riteniamo che $x$ sia un fissato elemento di $I$.
Richiedendo qualche ipotesi in più sulla funzione $f$, il resto $r_n(x;x_0)$ della formula di Taylor si può esprimere nella *forma di Lagrange*. In particolare, è possibile provare il:

Teorema 2 (Formula di Taylor col Resto nella Forma di Lagrange)
*Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale, $f : I \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in I$ un punto interno.*
*Se la $f$ è derivabile $n+1$ volte in tutto l'intervallo $I$, allora per ogni punto $x \in$*

*$I - \{x_0\}$ esiste un punto $\xi = \xi_x$ interno all'intervallo d'estremi $x_0$ ed $x$ tale che valga l'uguaglianza:*

$$f(x) = p_n(x;x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi)\ (x-x_0)^{n+1}\ ,$$

*dunque:*

$$r_n(x;x_0) = \frac{1}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi)\ (x-x_0)^{n+1}\ . \tag{18}$$

Di questo teorema forniamo una dimostrazione alternativa a quella proposta in [MS, §101], la quale non fa uso del resto nella forma integrale ed è simile nello spirito alla *Dimostrazione (secondo metodo)* riportata nel testo.

*Dimostrazione.* Senza ledere la generalità, supponiamo $x_0 < x$, potendosi ragionare in maniera identica nell'altro caso.
Osserviamo che il TEOREMA 1 assicura che $r_n(x;x_0) = \mathrm{o}\big((x-x_0)^n\big)$, dunque è abbastanza naturale cercare $r_n$ nella forma:

$$r_n(x;x_0) = \psi_n(x)\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

in cui $\psi_n$ è una funzione limitata intorno ad $x_0$.
Consideriamo la funzione ausiliaria *phi* : $[x_0,x] \to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= p_n(x;t) + r_n(x;t)\\ &= f(t) + f'(t)\ (x-t) + \frac{1}{2}f''(t)\ (x-t)^2\\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)\ (x-t)^n + \psi_n(x)\cdot(x-t)^{n+1}\ ,\end{aligned}$$

la cui legge di assegnazione si ottiene rimpiazzando con la variabile $t$ il valore $x_0$ nella formula di Taylor col resto $r_n$.
Dato che $f$ è derivabile $n+1$ volte in $I$, la $\varphi$ è continua in $[x_0,x]$ e derivabile in $]x_0,x[$; inoltre, abbiamo:

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= p_n(x;x_0) + r_n(x;x_0) = f(x)\\ \varphi(x) &= f(x) + 0 = f(x)\ ,\end{aligned}$$

cosicché $\varphi$ assume lo stesso valore negli estremi del suo intervallo di definizione.
Il *Teorema di Rolle* assicura che esiste un punto $\xi \in ]x_0,x[$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$; un calcolo esplicito mostra che:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= f'(t) - f'(t) + f''(t)\ (x-t)\\ &\quad - f''(t)\ (x-t) + \frac{1}{2}f'''(t)\ (x-t)^2\\ &\quad - \frac{1}{2}f'''(t)\ (x-t)^2 + \cdots\\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\ (x-t)^n - \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\ (x-t)^n + \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)\ (x-t)^n\\ &\quad - \psi_n(x)\ (n+1)(x-t)^n\\ &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)\ (x-t)^n - \psi_n(x)\ (n+1)(x-t)^n\end{aligned}$$

dunque, tenendo presente che $\xi \neq x$, dalla condizione $\varphi'(\xi) = 0$ ricaviamo immediatamente:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi)\ .$$

Conseguentemente risulta:

$$r_n(x;x_0) = \frac{1}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi)\ (x-x_0)^{n+1}\ ,$$

come volevamo. □

**Osservazione 18:** In generale, la forma di Lagrange (18) non ci dà alcuna informazione globale sulla funzione resto resto né restituisce alcuna sua proprietà locale: ciò è dovuto al fatto che la quantità $f^{(n+1)}(\xi)$ dipende da $x$ (perché $\xi$ dipende da $x$) in una maniera difficilmente predicibile.
Tuttavia, essa consente di stimare, in modo sufficientemente preciso per parecchie applicazioni pratiche, quanto sia grande l'errore assoluto che si commette approssimando il numero $f(x)$ col valore $p_n(x;x_0)$: vediamo come.
Per la (18), l'errore assoluto che si commette approssimando $f(x)$ con $p_n(x;x_0)$ è dato da:

$$|f(x) - p_n(x;x_0)| = |r_n(x;x_0)| = \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right|\ |x-x_0|^{n+1}\ ;$$

se la derivata $f^{(n+1)}$ si mantiene limitata nell'intervallo di estremi $x$ ed $x_0$ (cosa che certamente accade quando $f^{(n+1)}$ è continua), detto $M_{n+1}$ un maggiorante di $|f^{(n+1)}|$ tra $x$ ed $x_0$ risulta:

$$|f(x) - p_n(x;x_0)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\ |x-x_0|^{n+1}$$

e tale disuguaglianza asserisce che l'errore assoluto non supera una certa soglia dipendente unicamente da $n$.
Gli esempi che seguono illustrano dei casi d'interesse pratico in cui si applica una stima del tipo precedente. ♦

`Esempio 1:` Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) := \mathbf{e}^x$ e usiamo il polinomio di Taylor per trovare un valore approssimato di $\mathbf{e} = f(1)$.
Chiaramente $f$ è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$, cosicché le derivate di $f$ sono tutte continue in $\mathbb{R}$ ed ha senso considerare il polinomio di Taylor di $f$ centrato in $x_0 = 0$ per ogni ordine $n \in \mathbb{N}$.
Dato che $f^{(n)}(x) = \mathbf{e}^x$ identicamente in $\mathbb{R}$, risulta $f^{(n)}(x_0) = \mathbf{e}^0 = 1$ e perciò il polinomio di Taylor di $f$ d'ordine $n$ centrato in 0 è:

$$p_n(x;0) = 1 + x + \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{6}\ x^3 + \cdot + \frac{1}{n!}\ x^n$$

e la formula di Taylor col resto nella forma di Lagrange per $f$ in $x = 1$ si scrive:

$$f(1) = p_n(1;0) + \frac{1}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi)\ (1-0)^{n+1}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdot + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\ \mathbf{e}^\xi \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\ \mathbf{e}^\xi\ .\end{aligned}$$

Dato che l'esponenziale è positiva e strettamente crescente, nell'intervallo di estremi 0 ed 1, cioé in $[0,1]$, la derivata $f^{(n+1)}$ si mantiene limitata superiormente da $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}$; quindi si può prendere $M_{n+1} = 3$ e stimare l'errore assoluto di approssimazione nel modo che segue:

$$\left|\mathbf{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}\ .$$

Conseguentemente, l'errore assoluto di approssimazione non eccede la quantità $\frac{3}{(n+1)!}$.

Dato che la successione di termine generale $3/(n+1)!$ è decrescente ed infinitesima per $n \to \infty$, è chiaro che l'approssimazione fornita dal polinomio di Taylor migliora via via che si prendono ordini sempre maggiori.
Ad esempio, se si vuole un'approssimazione di $\mathbf{e}$ con un errore assoluto minore di $10^{-3}$, allora basta prendere il polinomio di Taylor d'ordine uguale al più piccolo numero naturale che soddisfa la disuguaglianza:

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \qquad \Leftrightarrow \qquad (n+1)! > 3000\ ;$$

con l'ausilio di un calcolatore si vede che basta scegliere $n = 6$, poiché $6! = 720$ e $7! = 5040$, dunque:

$$\mathbf{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2.71806\ .$$

Questo è il metodo usato dal Eulero per ottenere ottime approssimazioni di $\mathbf{e}$. $\diamondsuit$

`Esempio 2:` Se vogliamo valutare in maniera approssimata le quantità $\cos 1$ e $\sin 1$, possiamo seguire un procedimento analogo al precedente.
Infatti, dato che entrambe le funzioni cos e sin sono indefinitamente derivabili in $\mathbb{R}$, possiamo scrivere i loro polinomi di Taylor centrati in 0 d'ordine qualsiasi $n$: essi sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned}
p_n'(x;0) &= 1 - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{24}\, x^4 - \frac{1}{720}\, x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} \\
p_n''(x;0) &= x - \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{120}\, x^5 - \frac{1}{5040}\, x^7 + \cdots + (-1)^{(n+1)} \frac{1}{(2n-1)!}\, x^{2n-1}\ .
\end{aligned}$$

Conseguentemente, la formula di Taylor col resto nella forma di Lagrange, rispettivamente, d'ordine $2n$ e $2n-1$ calcolata in $x = 1$ fornisce:

$$\begin{aligned}
\cos 1 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \frac{(-1)^n\ \sin\xi'}{(2n+1)!} \\
\sin 1 &= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \cdots + (-1)^{(n+1)} \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n \sin\xi''}{(2n)!}
\end{aligned}$$

e sfruttando la limitatezza del seno otteniamo le stime:

$$|\cos 1 - p_n'(1;0)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \tag{19}$$

$$|\sin 1 - p_n''(1;0)| \leq \frac{1}{(2n)!}\ . \tag{20}$$

Le (19) e (20) implicano che per ottenere un'approssimazione di $\cos 1$ e $\sin 1$ a meno di $10^{-3}$ basta prendere $n$ uguale al più piccolo naturale tale che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2n+1)!} &< 10^{-3} \\
\frac{1}{(2n)!} &< 10^{-3}\ ,
\end{aligned}$$

cioè, rispettivamente, $n' = 3$ ed $n'' = 4$. Dunque:

$$\begin{aligned}
\cos 1 &\approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} \approx 0.540278 \\
\sin 1 &\approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = \frac{4241}{5040} = 0.841468\ . \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Un'espressione del resto analoga alla forma di Lagrange è la cosiddetta *forma di Cauchy*. Nelle stesse ipotesi richiamate più sopra, si può dimostrare (cfr. [DM1, Esercizio 40]) che esiste un punto $\eta$ nell'intervallo di estremi $x$ ed $x_0$ tale che:

$$f(x) = p_n(x;x_0) + \frac{1}{n!}\ f^{(n+1)}(\eta)\ (x-\eta)^n\ (x-x_0)\ ,$$

quindi:

$$r_n(x;x_0) = \frac{1}{n!}\ f^{(n+1)}(\eta)\ (x-\eta)^n\ (x-x_0)\ . \tag{21}$$

Più in generale, è possibile mettere il resto in una forma "intermedia" tra quella di Lagrange (in cui compare solo una potenza di $x-x_0$) e quella di Cauchy (in cui compare anche una potenza di $x-\eta$, con $\eta$ appartenente all'intervallo di estremi $x$ ed $x_0$); tale forma è la cosiddetta *forma di Schlömilch*. Si può dimostrare (cfr. [DM1, Esercizio 40]) che, nelle stesse ipotesi già richiamate, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste almeno un numero $\vartheta$ nell'intervallo d'estremi $x$ ed $x_0$ tale che:

$$r_n(x;x_0) = \frac{1}{n!\ m}\ f^{(n+1)}(\vartheta)\ (x-\vartheta)^{n-m+1}\ (x-x_0)^m\ . \tag{22}$$

**Osservazione 19:** Prendendo $m = 1$ ed $m = n+1$ dalla forma di Schlömilch (22) si ricavano rispettivamente la forma di Cauchy (21) e quella di Lagrange (18). ◆

## 3. Funzioni con Derivata $n$-esima Nulla

È noto che il Teorema di Lagrange consente di stabilire che le funzioni costanti in un intervallo $I$ sono le uniche funzioni derivabili aventi derivata identicamente nulla in $I$.

Dato che le funzioni costanti sono polinomi di grado al più uguale a 0, il risultato appena ricordato può essere riformulato dicendo che i polinomi di grado $\leq 0$ sono le uniche funzioni aventi derivata prima identicamente nulla in un intervallo.

Consideriamo allora una funzione polinomiale di grado superiore, ad esempio il polinomio di primo grado:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

(con $a_1 \neq 0$), definita in un intervallo $I$ non banale. Evidentemente $p'(x) = a_1$ e $p''(x) = 0$ identicamente nell'interno di $I$; pertanto i polinomi di grado $\leq 1$ hanno derivata seconda identicamente nulla all'interno di $I$.

Analogamente, consideriamo la funzione polinomiale di secondo grado:

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

(con $a_2 \neq 0$), definita nel solito intervallo $I$. Abbiamo $p'(x) = a_1 + 2a_2 x$, $p''(x) = 2a_2$ e finalmente $p'''(x) = 0$ ovunque nell'interno di $I$; conseguentemente, i polinomi di grado $\leq 2$ hanno derivata terza identicamente nulla dentro $I$.

Non è difficile provare, ed è lasciato come esercizio per il lettore, che una funzione polinomiale di grado $n-1$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1}$$

(con $a_{n-1} \neq 0$) ha derivata $n$-esima identicamente nulla nell'interno di $I$.

La *formula di Taylor con il resto di Lagrange* del Teorema 2 consente di invertire tale risultato nella maniera che segue:

Proposizione 9

*Siano $I$ un intervallo non banale ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $I$ e derivabile $n$ volte nell'interno di $I$.*

*Se $f^{(n)}(x) = 0$ per ogni $x$ interno ad $I$, allora $f$ è un polinomio di grado $\leq n-1$.*

*Dimostrazione.* Le ipotesi poste su $f$ assicurano che, fissato arbitrariamente $x_0$ internamente ad $I$, è possibile scrivere la formula di Taylor d'ordine $n-1$ centrata in $x_0$ col resto nella forma di Lagrange, i.e.:

$$f(x) = p_{n-1}(x; x_0) + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\xi) \cdot (x - x_0)^n \ ,$$

valida per ogni $x \in I$ con un appropriato $\xi = \xi_{x,x_0}$ appartenente all'intervallo d'estremi $x$ ed $x_0$.
Dato che $f^{(n)}$ è identicamente nulla internamente ad $I$, il resto di Lagrange $\frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\xi) \cdot (x - x_0)^n$ è nullo per ogni $x$, cosicché abbiamo:

$$f(x) = p_{n-1}(x; x_0) \ .$$

Conseguentemente, la $f$ coincide col proprio polinomio di Taylor d'ordine $n-1$ ovunque internamente ad $I$ e, per continuità, anche negli eventuali punti del bordo di $I$; questa è la tesi, perché $p(\cdot; x_0)$ è un polinomio di grado $\leq n-1$. □

**Osservazione 20:** La dimostrazione della Proposizione precedente può esser fatta anche in altra maniera, ad esempio per induzione.

*Dimostrazione.* Se $n = 1$ la cosa è vera per il *Teorema di Caratterizzazione delle Funzioni a Derivata Nulla* richiamato ad inizio paragrafo. Questa è una buona base per l'induzione.
Supponiamo allora che la Proposizione sia vera per $n$ e dimostriamo che essa vale anche per $n+1$. Consideriamo una funzione $f$ continua in $I$ e derivabile $n+1$ volte dentro $I$ avente derivata $n+1$-esima identicamente nulla in $I$.
La funzione $\varphi := f'$ è una funzione continua e derivabile $n$ volte nell'interno di $I$, la cui derivata $n$-esima è:

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} f'(x) = f^{(n+1)}(x) = 0$$

per ogni $x$ interno ad $I$. Per l'ipotesi induttiva, $\varphi$ è un polinomio di grado $\leq n-1$ e dunque esistono $n$ costanti $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ tali che:

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} \ .$$

Detta $\Phi$ una primitiva di $\varphi$ (che determineremo più avanti), si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\Big[f(x) - \Phi(x)\Big] = f'(x) - \varphi(x) = 0$$

dunque $f - \Phi$ è una funzione costante in $I$ per il *Teorema di Caratterizzazione*; detta $a_0$ tale costante, abbiamo:

$$f(x) = a_0 + \Phi(x)$$

ovunque dentro $I$.
Notato che una primitiva di $\varphi$ è la funzione:

$$\Phi(x) = b_0 x + \frac{b_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n} x^n$$

(basta derivare $\Phi$ per verificare la correttezza dell'affermazione), possiamo dunque scrivere:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \ ,$$

con $a_1 = b_0$, $a_2 = \frac{b_1}{2}$, …, $a_n = \frac{b_{n-1}}{n}$, per ogni punto $x$ interno ad $I$.
Ma tale uguaglianza si conserva, per la continuità dei suoi due membri, anche nei punti del bordo di $I$; dunque $f$ è un polinomio di grado $\leq n$ in $I$ e ciò conclude la dimostrazione per induzione. □

**Osservazione 21:** Notiamo esplicitamente che il grado di $f$ è proprio $n-1$ se e solo se esiste almeno un punto $x_0$ interno ad $I$ nel quale la derivata $f^{(n-1)}$ assume valore non nullo. Infatti, in tal caso, il polinomio di Taylor $p_{n-1}(\cdot; x_0)$ ha il coefficiente della potenza di grado massimo uguale a $\frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \neq 0$. ♦

Quanto ora acquisito si può riassumere nel seguente:

TEOREMA 3 (Caratterizzazione delle Funzioni con Derivata $n$-esima Nulla in un Intervallo)
*Siano $I$ un intervallo non banale ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $I$.*
*La $f$ è un polinomio di grado $\leq n-1$ se e solo se essa è derivabile almeno $n$ volte dentro $I$ ed ha derivata $n$-esima identicamente nulla.*
*In particolare $f$ è un polinomio di grado $= n-1$ se e solo se esiste almeno un punto interno ad $I$ in cui $f^{(n-1)}$ assume valore non nullo.*

In altri termini, il Teorema appena enunciato afferma che i polinomi sono le uniche funzioni che hanno derivate di ordine "elevato" identicamente nulle.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[DM1] Di Meglio, G. (2017) *Alcuni Esercizi sul Calcolo Differenziale* [reperibile on-line su www.docenti.unina.it]

[DM2] Di Meglio, G. (2017) *Alcuni Esercizi sul Calcolo Integrale* [reperibile on-line su www.docenti.unina.it]

[MS] Marcellini, P. & Sbordone, C. (1998) **Analisi Matematica Uno**, Liguori, Napoli.

GUGLIELMO DI MEGLIO, PHD
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
PIAZZALE TECCHIO 80
80126 NAPOLI – ITALY
EMAIL: guglielmo.dimeglio@unina.it