

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DERIVATA

G. DI MEGLIO

INTRODUZIONE

In questi fogli è trascritta la spiegazione “intuitiva” del significato geometrico della derivata data a lezione.

Ricordo che l’argomento può essere affrontato più formalmente, basando il discorso sulla proprietà caratteristica della retta tangente (i.e., quella di essere il grafico di una funzione che approssima la funzione assegnata a meno di infinitesimi d’ordine superiore): in proposito si veda [DM, § 1].

In appendice, sono forniti alcuni richiami di Geometria Analitica nel piano, con particolare riguardo alle rette ed ai fasci di rette.

1. INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DERIVATA PRIMA

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in X$ un punto interno.¹

Nelle ipotesi poste su x_0 , esiste un “piccolo” intorno di x_0 di semiampiezza $\sigma > 0$ tutto contenuto in X ; conseguentemente risulta:

$$(1) \quad x_h := x_0 + h \in X$$

per ogni $h \in]-\sigma, \sigma[$.

Fissato $h \in]-\sigma, \sigma[$ con $h \neq 0$, consideriamo i punti di coordinate $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_h = (x_h, f(x_h))$ che appartengono al grafico della f . Tali punti sono distinti ed hanno ascisse distinte: pertanto l’unica retta r_h a cui essi appartengono non è parallela all’asse delle y ed ha equazione simmetrica:

$$\left(f(x_h) - f(x_0)\right)(x - x_0) = (x_h - x_0)\left(y - f(x_0)\right)$$

dalla quale ricaviamo immediatamente l’equazione esplicita:

$$(2) \quad y = \frac{f(x_h) - f(x_0)}{x_h - x_0}(x - x_0) + f(x_0) .$$

La retta r_h , secante il grafico di f in P_0 e P_h , ha dunque coefficiente angolare:

$$(3) \quad m_h = \frac{f(x_h) - f(x_0)}{x_h - x_0}$$

uguale al rapporto incrementale $r(x_h; x_0)$ della funzione f relativo ai punti x_h ed x_0 .

Osservazione 1 (Interpretazione Geometrica del Rapporto Incrementale): Il rapporto incrementale $r(x_h; x_0)$ ha una immediata interpretazione geometrica: esso coincide con la tangente trigonometrica della pendenza ϑ_h della retta r_h secante il grafico di f in P_0 e P_h , i.e. risulta:

$$\frac{f(x_h) - f(x_0)}{x_h - x_0} = \tan \vartheta_h$$

Date: 28 dicembre 2017.

¹Questa ipotesi è troppo forte, ma serve per rendere il discorso più agevole.

per ogni $h \neq 0$ in $] - \sigma, \sigma[$ (cfr. **Osservazione 9** in APPENDICE). \blacklozenge

Immaginiamo di lasciare $h \neq 0$ libero di variare in $] - \sigma, \sigma[$. In tal modo, le rette secanti r_h descrivono un sottoinsieme \mathcal{R} del fascio proprio di rette \mathfrak{A} con centro in $P_0 = (x_0, f(x_0))$, ogni retta del quale ha pendenza:

$$(4) \quad \vartheta_h = \arctan \left(\frac{f(x_h) - f(x_0)}{x_h - x_0} \right).$$

Quel che ci interessa è analizzare il comportamento delle rette r_h della famiglia \mathcal{R} quando facciamo tendere a 0 il parametro h che le individua; in particolare, ci chiediamo se le rette r_h si “stabilizzano” attorno ad una “posizione limite” oppure no quando $h \rightarrow 0$.

Geometricamente, ciò equivale a chiedersi se le secanti r_h si “stabilizzano” oppure no attorno ad una fissata “retta limite” r_0 quando il punto P_h si avvicina indefinitamente a P_0 .

Ciò non si verifica sempre, come mostra il seguente esempio:

Esempio 1: Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

ed il punto $x_0 = 0$ che è interno al dominio di f .

Per $h \in \mathbb{R}$ si può considerare la retta secante per i punti $O = (0, 0)$ e $P_h = (h, h \sin \frac{1}{h})$, la quale ha coefficiente angolare:

$$m_h = \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \sin \frac{1}{h};$$

si può vedere che quando $h \rightarrow 0$ i coefficienti angolari m_h assumono tutti i valori compresi tra -1 ed 1 (estremi compresi) infinite volte, cioè le rette secanti r_h continuano ad oscillare tra le bisettrici di due quadranti quando il punto P_h si avvicina indefinitamente a P_0 . \blacklozenge

Dato che ogni r_h passa per P_0 , anche la retta limite r_0 (se esiste) passa per P_0 , i.e. si ha $r_0 \in \mathfrak{A}$; pertanto, r_0 è individuata univocamente dalla sua pendenza $\vartheta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$. *Euristicamente*, la pendenza ϑ_0 si ottiene come limite delle pendenze ϑ_h per $h \rightarrow 0$, cioè:

$$(5) \quad \vartheta_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \vartheta_h,$$

pertanto, l’esistenza di una “retta limite” r_0 equivale all’esistenza di una “pendenza limite” $\vartheta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Vista la (4), il limite al secondo membro di (5) equivale al $\lim_{h \rightarrow 0} \arctan \left(\frac{f(x_h) - f(x_0)}{x_h - x_0} \right)$, ossia:

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \arctan \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right).$$

Conseguentemente, richiedere l’esistenza di una “retta limite” r_0 equivale a richiedere che esista (necessariamente finito, date le limitazioni sui ϑ_h) il limite al secondo membro di (5) o equivalentemente il limite (6).

Circa l’esistenza di tali limiti sussiste la seguente:

PROPOSIZIONE 1

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 interno ad X e $\sigma > 0$ per cui valga la (1).

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta_h$ esiste finito ed uguale a $\vartheta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$;
- (2) $\lim_{h \rightarrow 0} \arctan \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$ esiste finito ed uguale a $\vartheta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$;
- (3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ esiste ed è uguale a $m_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. (1) equivale a (2). Segue banalmente da quanto osservato in precedenza.

(2) equivale a (3). Abbiamo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan \left(\arctan \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \right),$$

dunque, per il *Teorema sul Limite della Funzione Composta*, abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \arctan \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) = \vartheta_0 \in [-\pi/2, \pi/2] &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \tan \left(\arctan \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) & \\ = \begin{cases} +\infty & , \text{ se } \vartheta_0 = \pi/2 \\ \tan \vartheta_0 & , \text{ se } -\pi/2 < \vartheta_0 < \pi/2 \\ -\infty & , \text{ se } \vartheta_0 = -\pi/2 \end{cases} & \end{aligned}$$

e viceversa:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m_0 \in \widehat{\mathbb{R}} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \arctan \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{ se } m_0 = +\infty \\ \arctan m_0 & , \text{ se } m_0 \in \mathbb{R} \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ se } m_0 = -\infty \end{cases} & . \end{aligned}$$

□

Osservazione 2: Dalla dimostrazione della PROPOSIZIONE precedente si deduce che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vartheta_h = \vartheta_0 \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$$

e che l'uguaglianza $m_0 = \tan \vartheta_0$ vale in “senso generalizzato”²; pertanto, m_0 è il coefficiente angolare della “retta limite” r_0 in quanto coincide con la tangente trigonometrica della sua pendenza ϑ_0 . ♦

Osservazione 3 (Interpretazione Geometrica della Derivata Prima in un Punto): Dato che:

$$\begin{aligned} m_0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &\stackrel{x=x_0+h}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \end{aligned}$$

²Cioè ponendo convenzionalmente $\tan(\pm\pi/2) = \pm\infty$.

se f è derivabile in x_0 risulta $m_0 = f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Ciò, unito all'**Osservazione** precedente, implica che se f è derivabile in x_0 allora le rette secanti al grafico in P_0 e P_h hanno come "posizione limite" la retta non verticale r_0 (appartenente al fascio di centro P_0) con coefficiente angolare $f'(x_0)$, i.e. alla retta di equazione:

$$(7) \quad y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0) .$$

Tale retta viene detta *retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0* .

Ne viene che la derivata prima è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$. \blacklozenge

APPENDICE A. RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA

Ricordiamo alcune nozioni basilari di Geometria Analitica nel piano.

A.1. Riferimento Cartesiano. Innanzitutto, ricordiamo che nel piano della geometria elementare si può introdurre un *sistema di riferimento cartesiano Oxy monometrico ortogonale*: ciò si fa fissando una coppia di rette orientate x ed y (dette, rispettivamente, *asse delle ascisse* ed *asse delle ordinate*) ortogonali in O , di modo che l'angolo orientato che ha per lati i semiassi positivi di ascisse ed ordinate abbia per ampiezza $\pi/2$, e fissando due punti unitari P e Q sui semiassi positivi in modo che i segmenti orientati OP ed OQ abbiano la stessa misura (ciò equivale a dire che le "unità di misura" delle lunghezze su entrambi gli assi coincidono).

In tal modo, ad ogni punto A del piano Oxy si può associare un'unica coppia di numeri reali (x_A, y_A) (dette *coordinate di A in Oxy*), le quali misurano le lunghezze con segno delle proiezioni di A sui due assi x ed y ; viceversa, ad ogni coppia ordinata di numeri reali (ξ, η) si può far corrispondere un unico punto P del piano Oxy che abbia $(x_P, y_P) = (\xi, \eta)$. Rimane così definita una *corrispondenza biunivoca* tra i punti del piano cartesiano Oxy e l'insieme \mathbb{R}^2 delle coppie ordinate di numeri reali.

A.2. Equazioni Parametriche di una Retta. Uno dei primissimi risultati interessanti della Geometria Analitica è la possibilità di descrivere le rette del piano Oxy sfruttando equazioni di primo grado:

TEOREMA 1

Sia r una retta del piano cartesiano Oxy e $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di r .

Esistono due numeri $u, v \in \mathbb{R}$ non contemporaneamente nulli, ossia tali che $u^2 + v^2 > 0$, tali che il punto $P = (x, y)$ appartiene alla retta r se e solo se le sue coordinate soddisfano le uguaglianze:

$$(8) \quad \begin{cases} x = x_0 + tu \\ y = y_0 + tv \end{cases}$$

per qualche valore $t \in \mathbb{R}$.

Definizione 1 (Equazioni Parametriche della Retta) Le (8), i.e.:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu \\ y = y_0 + tv \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

vengono dette *equazioni parametriche della retta r* ed i numeri u, v vengono detti *parametri direttori di r* .

Invece, i numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ che si ottengono dividendo, rispettivamente, i due parametri direttori u e v per la quantità positiva $\sqrt{u^2 + v^2}$, cioè:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{cases},$$

si chiamano *coseni direttori della retta r* .

Osservazione 4 (Non-Unicità dei Parametri Direttori): Osserviamo che se (u, v) è una coppia di parametri direttori di una retta r , allora per ogni fissato $\lambda \neq 0$ anche la coppia $(\lambda u, \lambda v)$ è una coppia di parametri direttori di r .

Per provare ciò basta notare che:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = x_0 + tu \\ y = y_0 + tv \end{cases}, t \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{t}{\lambda}(\lambda u) \\ y = y_0 + \frac{t}{\lambda}(\lambda v) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \\ &\stackrel{\tau=t/\lambda}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = x_0 + \tau(\lambda u) \\ y = y_0 + \tau(\lambda v) \end{cases}, \tau \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

cosicché le equazioni parametriche con parametri direttori (u, v) ed $(\lambda u, \lambda v)$ sono del tutto equivalenti.

Il ragionamento ora fatto prova, tra l'altro, che anche i coseni direttori di una retta r sono suoi parametri direttori. \blacklozenge

Osservazione 5 (Sul Segno del Primo Parametro Direttore): Osserviamo che se (u, v) è una coppia di parametri direttori di una retta r , allora anche la coppia $(-u, -v)$ lo è (cfr. **Osservazione** precedente).

Da ciò segue immediatamente che, a meno di cambiare il segno di entrambi i parametri direttori di una retta, possiamo sempre supporre $u \geq 0$.

D'ora in avanti faremo tacitamente l'ipotesi $u \geq 0$, la quale implica anche $\alpha \geq 0$. \blacklozenge

I coseni direttori $\alpha \geq 0$ e β di una retta r sono due numeri tali che:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Ciò implica che il punto di coordinate (α, β) appartiene all'arco di circonferenza goniometrica che cade nel semipiano delle ascisse ≥ 0 e perciò esiste un unico angolo $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ tale che:

$$\begin{cases} \cos \vartheta = \alpha \\ \sin \vartheta = \beta \end{cases};$$

in particolare, si vede che ϑ è l'angolo orientato formato dalla retta r col semiasse delle x positive e che la sua ampiezza è data da:

$$(9) \quad \vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{ se } \alpha = 0 \text{ e } \beta > 0 \\ \arctan \frac{\beta}{\alpha} & , \text{ se } \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ se } \alpha = 0 \text{ e } \beta < 0 \end{cases}.$$

Definizione 2 (Pendenza di una Retta) L'angolo $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ fornito dalle (9) è detto *pendenza della retta r* .

Osservazione 6 (Casi Particolari): Se r è parallela all'asse delle x , allora ogni punto appartenente a tale retta ha la stessa ordinata del punto P_0 che si ottiene intersecando r con l'asse y ; dato che le coordinate di un tale P_0 sono del tipo $(0, y_0)$ e che la pendenza di r rispetto al semiasse delle ascisse positive è $\vartheta = 0$,

le equazioni parametriche di una retta parallela all'asse x possono essere scritte prendendo $\alpha = \cos 0 = 1$ e $\beta = \sin 0 = 0$ come parametri direttori; quindi:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, se r è parallela all'asse y , ogni suo punto ha la stessa ascissa del punto P_0 d'intersezione tra r ed x ; visto che le coordinate di P_0 sono del tipo $(x_0, 0)$ e che la pendenza di r rispetto al semiasse delle ascisse positive è $\pi/2$, le equazioni parametriche possono essere scritte prendendo $\alpha = \cos(\pi/2) = 0$ e $\beta = \sin(\pi/2) = 1$ come parametri direttori; quindi:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le bisettrici dei quadranti, invece, passano entrambe per $P_0 = O = (0, 0)$ ed hanno rispettivamente pendenze $\vartheta = \pm\pi/4$, cosicché i coseni direttori sono $\alpha = \cos(\pm\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e $\beta = \sin(\pm\pi/4) = \pm\sqrt{2}/2$; conseguentemente, prendendo come parametri direttori $u = \sqrt{2}\alpha = 1$ e $v = \sqrt{2}\beta = \pm 1$, le equazioni parametriche delle bisettrici si scrivono:

$$\begin{aligned} \text{(I-III): } & \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \text{(II-IV): } & \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◆

Osservazione 7 (Retta Passante per Due Punti): Abbiamo visto che se di una retta sono noti i parametri direttori (u, v) , è possibile ricavarne la pendenza ϑ ; e che viceversa, conoscendo la pendenza ϑ è possibile ricavare i coseni direttori della retta, i quali possono essere usati come parametri direttori.

Quindi possiamo scrivere le equazioni parametriche di una retta sia quando conosciamo i parametri direttori, sia quando conosciamo la sua pendenza (oltre che, ovviamente, un punto P_0 attraverso il quale tale retta passa!).

Tuttavia in molti casi né i numeri direttori né la pendenza di una retta sono immediatamente dati: si pensi, ad esempio, al problema di scrivere le equazioni parametriche dell'unica retta r che passa per due punti assegnati $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ del piano Oxy .

In tal caso, considerazioni di Geometria Elementare (basate sul *Teorema di Talete* e sulla similitudine di triangoli rettangoli) mostrano che un generico punto $P = (x, y)$ appartiene ad r se e solo se le coppie di lunghezze con segno $x - x_0$ ed $x_1 - x_0$ e $y - y_0$ ed $y_1 - y_0$ sono proporzionali secondo la stessa costante, cioè se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \end{cases};$$

da ciò si ricava immediatamente che il punto $P = (x, y)$ appartiene ad r se e solo se le sue coordinate soddisfano le equazioni parametriche:

$$(10) \quad \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quanto trovato significa che, assegnati due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ appartenenti alla retta r , i numeri $u = x_1 - x_0$ e $v = y_1 - y_0$ sono sempre una coppia di parametri direttori per la retta r .

Ovviamente, dato il legame tra parametri direttori e pendenza di una retta, possiamo determinare la pendenza di una retta passante per due punti anche in funzione delle loro coordinate: in particolare, abbiamo:

$$\vartheta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \text{ se } x_1 = x_0 \text{ e } y_1 > y_0 \\ \arctan \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & , \text{ se } x_1 \neq x_0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ se } x_1 = x_0 \text{ e } y_1 < y_0 \end{cases} .$$

◆

A.3. Equazione Cartesiana di una Retta. Fissiamo r con parametri direttori (u, v) passante per $P_0 = (x_0, y_0)$ e consideriamo il problema di eliminare il parametro t dalle equazioni parametriche di r (8).

Moltiplicando per u la prima equazione, per v la seconda e poi sommando membro a membro, otteniamo:

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = t(u^2 + v^2)$$

dalla quale ricaviamo immediatamente t dividendo per $u^2 + v^2 > 0$:

$$t = \frac{u}{u^2 + v^2}(x - x_0) + \frac{v}{u^2 + v^2}(y - y_0) ;$$

sostituendo tale valore di t in quella tra le due equazioni parametriche in cui figura un parametro direttore non nullo, otteniamo l'equazione:

$$(11) \quad v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0$$

in cui non compare più il parametro t . Viceversa, da un'equazione del tipo (11) è sempre possibile ricostruire una coppia di equazioni parametriche del tipo (8): per fare ciò basta introdurre un parametro in (11), ad esempio, ponendo $x - x_0 = t$.

Ne consegue che le equazioni (8) ed (11) sono del tutto equivalenti e perciò ha senso dare la seguente:

Definizione 3 (Equazione Cartesiana della Retta) Sia r una retta passante per $P_0 = (x_0, y_0)$ con parametri direttori (u, v) .

Un punto $P = (x, y)$ del piano Oxy appartiene ad r se e solo se esso soddisfa l'equazione:

$$v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0 ,$$

detta *equazione cartesiana della retta r in forma implicita*.

Osservazione 8 (Equazione Esplicita e Coefficiente Angolare): Se $u = 0$ (cioè se r è parallela all'asse y) la (11) diviene:

$$v(x - x_0) = 0$$

e, dato che necessariamente $v \neq 0$, essa può essere esplicitata solo rispetto alla variabile x fornendo:

$$(12) \quad x = x_0 .$$

Se, invece, $u \neq 0$ la (11) può essere esplicitata almeno rispetto alla variabile y e restituisce:

$$(13) \quad y = \frac{v}{u}(x - x_0) + y_0 .$$

Le equazioni (12) & (13) vengono dette *equazioni cartesiane di r in forma esplicita*. Il numero $m := \frac{v}{u}$, che esprime il rapporto tra i parametri direttori di una retta non parallela all'asse y , si chiama *coefficiente angolare di r* . ◆

Osservazione 9 (Coefficiente Angolare, Coseni Direttori e Pendenza): Scelta una retta r non parallela all'asse y e detti (u, v) i suoi parametri direttori, (α, β) i suoi coseni direttori, ϑ la sua pendenza ed m il suo coefficiente angolare, si ha:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}}{\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

ed anche:

$$(14) \quad \begin{aligned} m &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \\ &= \tan \vartheta . \end{aligned}$$

Pertanto il coefficiente angolare m coincide sia col rapporto β/α dei coseni direttori di r sia (e soprattutto) con la tangente trigonometrica della pendenza ϑ di r rispetto al semiasse delle ascisse positive.

Ne consegue che la relazione inversa:

$$(15) \quad \vartheta = \arctan m$$

consente di calcolare la pendenza di una retta r non parallela all'asse y della quale sia noto il coefficiente angolare m . \blacklozenge

Osservazione 10 (Equazione Cartesiana nota la Pendenza): Se della retta r sono noti un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e la pendenza ϑ , l'equazione cartesiana (11) si può riscrivere:

$$(16) \quad \sin \vartheta (x - x_0) - \cos \vartheta (y - y_0) = 0 .$$

\blacklozenge

Osservazione 11 (Equazione Cartesiana noto il Coefficiente Angolare): Se della retta r sono noti un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ed il coefficiente angolare m , l'equazione cartesiana (11) si può riscrivere direttamente in forma esplicita:

$$(17) \quad y = m(x - x_0) + y_0 .$$

\blacklozenge

Osservazione 12 (Equazione Cartesiana noti Due Punti): Se della retta r sono noti due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, l'equazione cartesiana (11) si può riscrivere:

$$(18) \quad (y_1 - y_0) (x - x_0) - (x_1 - x_0) (y - y_0) = 0 ;$$

in questo caso, se $x_1 \neq x_0$, la retta r non è parallela all'asse y ed ha coefficiente angolare dato dalla nota formula:

$$(19) \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} .$$

Osserviamo inoltre che la (18) può anche essere messa nella forma:

$$(y_1 - y_0) (x - x_0) = (x_1 - x_0) (y - y_0) ,$$

la quale viene detta *equazione simmetrica di r* .³ \blacklozenge

³Il nome deriva dal fatto che il secondo membro si ricava dal primo scambiando di posto le x con le y .

A.4. Parallelismo ed Ortogonalità. Le relazioni di parallelismo ed ortogonalità tra due rette nel piano, nell'ottica della Geometria Analitica, si esprimono come relazioni tra le rispettive coppie di parametri/coseni direttori oppure tra coefficienti angolari delle due rette.

In particolare valgono i seguenti risultati:

TEOREMA 2 (Condizioni di Parallelismo)

Siano r ed r_1 due rette del piano Oxy aventi, rispettivamente, parametri direttori (u, v) e (u_1, v_1) .

Le rette r ed r_1 sono parallele se e solo se:

$$(20) \quad uv_1 - u_1v = 0 .$$

Inoltre, se r non è parallela all'asse y ed ha coefficiente angolare m , la retta r_1 è parallela ad r se e solo se essa non è parallela all'asse y ed ha coefficiente angolare $m_1 = m$.

Osservazione 13: Dividendo la (20) membro a membro per $\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ si trova l'analoga relazione di parallelismo tra i coseni direttori (α, β) ed (α_1, β_1) delle rette r ed r_1 , cioè:

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0 .$$

Tenendo presenti i legami dei coseni direttori con la pendenza e le formule di sottrazione del seno, dette ϑ e ϑ_1 le pendenze di r ed r_1 , possiamo riscrivere la precedente come:

$$\sin(\vartheta - \vartheta_1) = 0 ;$$

tale uguaglianza fornisce $\vartheta_1 = \vartheta + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e, visto che le pendenze sono in $[-\pi/2, \pi/2]$, ciò è possibile solo se $\vartheta_1 = \vartheta$ oppure se $\vartheta = \pm\pi/2$ e $\vartheta_1 = \mp\pi/2$.

Questo ragionamento può essere sfruttato per dimostrare il TEOREMA. \blacklozenge

TEOREMA 3 (Condizioni di Ortogonalità)

Siano r ed r_1 due rette del piano Oxy aventi, rispettivamente, parametri direttori (u, v) e (u_1, v_1) .

Le rette r ed r_1 sono ortogonali se e solo se:

$$(21) \quad uu_1 + vv_1 = 0 .$$

Inoltre, se r non è parallela agli assi ed ha coefficiente angolare $m \neq 0$, la retta r_1 è ortogonale ad r se e solo se essa non è parallela agli assi ed ha coefficiente angolare $m_1 = -\frac{1}{m}$.

Osservazione 14: Dividendo la (21) membro a membro per $\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ si trova l'analoga relazione di parallelismo tra i coseni direttori (α, β) ed (α_1, β_1) delle rette r ed r_1 , cioè:

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 = 0 .$$

Tenendo presenti i legami dei coseni direttori con la pendenza e le formule di sottrazione del coseno, dette ϑ e ϑ_1 le pendenze di r ed r_1 , possiamo riscrivere la precedente come:

$$\cos(\vartheta - \vartheta_1) = 0 ;$$

tale uguaglianza fornisce $\vartheta_1 = \vartheta + \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e, visto che le pendenze sono in $[-\pi/2, \pi/2]$, ciò è possibile solo se $\vartheta_1 = \vartheta \pm \pi/2$ (col segno $-$ se $\vartheta \geq 0$, od il segno $+$ altrimenti).

Questo ragionamento può essere sfruttato per dimostrare il TEOREMA. \blacklozenge

A.5. **Fasci di Rette.** Richiamiamo un po' di definizioni:

Definizione 4 (Fascio Proprio di Rette) Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto del piano Oxy . Si chiama *fascio proprio di rette con centro P_0* l'insieme \mathfrak{R} di tutte le rette passanti per il punto P_0 .

Osservazione 15 (Equazioni Cartesiane del Fascio Proprio): Ogni retta del fascio di centro P_0 è individuata dalla propria pendenza $\vartheta \in] -\pi/2, \pi/2]$; pertanto, possiamo esprimere l'equazione cartesiana del fascio \mathfrak{R} sfruttando l'equazione (16), cioè:

$$\sin \vartheta (x - x_0) - \cos \vartheta (y - y_0) = 0$$

col parametro ϑ libero di variare in $] -\pi/2, \pi/2]$.

In maniera equivalente, detti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, l'equazione del fascio \mathfrak{R} si può scrivere:

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) = 0 ;$$

oppure, si possono sfruttare due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ non contemporaneamente nulli (cioè tali che $a^2 + b^2 > 0$) per scrivere l'equazione precedente nella forma:

$$a (x - x_0) + b (y - y_0) = 0$$

che è un'ulteriore forma dell'equazione di \mathfrak{R} . ◆

Definizione 5 (Fascio Improprio di Rette) Sia r una retta del piano Oxy . Si chiama *fascio improprio di rette con generatrice r* l'insieme \mathfrak{F} di tutte le rette parallele alla retta r .

Osservazione 16 (Equazione Cartesiana del Fascio Improprio): Ogni retta del fascio con generatrice r ha gli stessi numeri/coseni direttori di r ed è individuata dal proprio punto d'intersezione $P_0 = (0, y_0)$ con l'asse y (se r non è parallela all'asse y) o dal proprio punto d'intersezione $P_0 = (x_0, 0)$ con l'asse x (se r è parallela all'asse y); pertanto possiamo esprimere l'equazione cartesiana del fascio sfruttando l'equazione (17), cioè:

$$y = mx + y_0$$

se r non è parallela ad y , oppure:

$$x = x_0$$

in caso contrario. ◆

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[DM] Di Meglio, G. (2017) *Complementi sulla Formula di Taylor*.

GUGLIELMO DI MEGLIO, PhD
 SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
 PIAZZALE TECCHIO 80
 80126 NAPOLI – ITALY