TEOREMI SUI LIMITI DI FUNZIONI COME CONSEGUENZA DEL TEOREMA FONDAMENTALE SULLA REGOLARITÀ

G. DI MEGLIO

Introduzione

Il seguente risultato:

Teorema 1 (Teorema Fondamentale sulla Regolarità in un Punto)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per X ed $l \in \widehat{\mathbb{R}}$.
Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se per ogni successione $(x_n) \subseteq X - \{x_0\}$ e tale che $x_n \to x_0$ risulta $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

noto anche come *Teorema Ponte* (la cui dimostrazione è stata data in aula) è fondamentale sotto svariati aspetti.
Innanzitutto, esso consente di riconoscere che l'operazione di passaggio al limite rispetto alla variabile "continua" x è completamente caratterizzato dal passaggio al limite rispetto alla variabile "discreta" n (il quale è teoricamente più semplice da definire).
In seconda battuta, esso consente di "trasferire" ai limiti di funzioni i risultati già provati per i limiti di successioni e, viceversa, di "trasferire" ai limiti di successioni alcuni risultati importanti della teoria del Calcolo che coinvolgono i limiti con funzioni elementari.
Infine, il Teorema fornisce un criterio per dimostrare la non esistenza del limite per funzioni (elementari e non) ed, in tale ottica, gioca un ruolo tanto importante per le funzioni reali quanto quello del Teorema sulle Successioni Estratte per le successioni.

In questi fogli vedremo quali risultati circa i limiti di funzioni è possibile dimostrare usando massicciamente il Teorema 1 ed quanto già provato per le successioni.
Inoltre, useremo il *Teorema Fondamentale* per dimostrare che alcune funzioni elementari non sono regolari.

1. Teoremi sui Limiti

Innanzitutto, proviamo il:

Teorema 2 (Unicità del Limite)
Se una funzione f ha limite per x che tende ad x_0, allora tale limite è unico.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che f abbia due limiti distinti per x che tende ad x_0, cioè che esistano $l \neq \lambda \in \widehat{\mathbb{R}}$ tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda\ .$$

Date: 28 dicembre 2017.

Per il *Teorema Fondamentale*, fissata una successione $(x_n) \subseteq X - \{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$, la successione numerica di termine generale $f(x_n)$ ha da avere:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda \;;$$

ma ciò è assurdo, poiché la successione $\Big(f(x_n)\Big)$ non può avere due limiti distinti. □

Un altro risultato importante che può essere "trasferito" dalle successioni alle funzioni attraverso il *Teorema Fondamentale* è il:

Teorema 3 (della Permanenza del Segno)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, x_0 un punto di accumulazione per X ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione regolare in x_0 con $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \widehat{\mathbb{R}}$.
Se $l > 0$ [risp. $l < 0$], allora esiste un intorno $I \in \mathcal{I}(x_0)$[1] tale che:

(1) $$\forall x \in X \cap I - \{x_0\}, \quad f(x) > 0 \text{ [risp. } f(x) < 0\text{]}\,.$$

La dimostrazione che proponiamo si basa sull'idea (già usata per la dimostrazione del *Teorema Fondamentale*) di sfruttare particolari intorni del p.d.acc. x_0 per costruire una successione x_n con opportune proprietà.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $l < 0$, analogamente ragionandosi nell'altro caso.
Per assurdo, supponiamo che non esista alcun intorno di x_0 soddisfacente la (1) e questo equivale a dire che:

$$\forall I \in \mathcal{I}(x_0),\ \exists x \in X \cap I - \{x_0\} : \quad f(x) \geq 0\,.$$

Da tale ipotesi segue che per ognuno degli intorni di x_0 del tipo:

$$I_n := \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\;,$$

cioè per ogni numero $n \in \mathbb{N}$, è possibile determinare un $x_n \in X \cap I_n - \{x_0\}$ in modo che:

$$f(x_n) \geq 0\;;$$

osserviamo che la successione (x_n) così costruita è tale che:

$$\begin{cases} x_n \in X \\ x_n \neq x_0 \\ x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n < x_0 + \dfrac{1}{n} \;\Rightarrow\; x_n \to x_n \end{cases}$$

(l'ultima implicazione valida per il *Teorema dei Carabinieri per Successioni*); conseguentemente, per il *Teorema Fondamentale*, la successione di termine generale $f(x_n)$ ha limite uguale ad l.
Dato che $f(x_n) > 0$ per ogni indice n, il *Teorema Inverso della Permanenza del Segno per Successioni* implica $l \geq 0$; **ma ciò è assurdo**, in quanto per ipotesi risulta $l < 0$. □

Osservazione 1: Come già osservato nel caso delle successioni, l'implicazione inversa in generale non vale; in altre parole, non è detto che una funzione positiva (o negativa) intorno ad un punto di accumulazione del suo dominio ed ivi regolare abbia limite positivo (o negativo).

[1] Qui e nel seguito, il simbolo $\mathcal{I}(x_0)$ denota l'insieme di tutti gli intorni aperti del punto x_0.

Basti pensare alla funzione $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) := 1/x$: tale funzione è positiva ovunque nel suo insieme di definizione, che è un intorno di $+\infty$, e però ha limite nullo per x che tende a $+\infty$. ♦

Tuttavia, come nel caso delle successioni, indebolendo le disuguaglianze è possibile dimostrare il:

TEOREMA 4 (Inverso della Permanenza del Segno)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f : X \to \mathbb{R}$ ed x_0 un punto di accumulazione per X. Se esiste un intorno $I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che:

$$\forall x \in X \cap I - \{x_0\}, \quad f(x) \geq 0 \tag{2}$$

e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \widehat{\mathbb{R}}$, allora risulta $l \geq 0$.

Dimostrazione. Fissiamo una successione $(x_n) \subseteq X - \{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$.
Per il *Teorema Fondamentale*, la successione di termine generale $f(x_n)$ è regolare ed ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.
Dato che $x_n \to x_0$, per definizione di limite, in corrispondenza dell'intorno I di x_0 in cui è soddisfatta la (2) è possibile determinare un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \nu \ \Rightarrow \ x_n \in I \ ,$$

cosicché dalla (2) segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \nu \ \Rightarrow \ f(x_n) \geq 0 \ ;$$

conseguentemente, i termini di $\Big(f(x_n)\Big)$ corrispondenti ad indici "sufficientemente grandi" sono tutti ≥ 0 ed il *Teorema Inverso della Permanenza del Segno per Successioni* implica:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \geq 0 \ ,$$

come volevamo. □

Inoltre, vale il seguente:

TEOREMA 5 (Limitatezza Locale delle Funzioni Convergenti)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, x_0 un punto di accumulazione per X ed $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è convergente in x_0, allora esiste un intorno $I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che f è limitata in $X \cap I - \{x_0\}$; in altre parole vale l'implicazione:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad \exists I \in \mathcal{I}(x_0),\ \exists m \leq M \in \mathbb{R} :\ \forall x \in X \cap I - \{x_0\},\ m \leq f(x) \leq M \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Dimostrazione. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $x_0 \in \mathbb{R}$; negli altri casi, cambiando ciò che va cambiato, si ragiona in maniera del tutto analoga.
Per assurdo, supponiamo che la (3) non sia vera; ciò significa che vale la sua negazione, ossia che:

$$\forall I \in \mathcal{I}(x_0),\ \forall m \leq M \in \mathbb{R},\ \exists x_I \in X \cap I - \{x_0\} : \quad f(x_I) < m \text{ oppure } f(x_I) > M \ .$$

Scegliendo come intorni quelli di semiampiezza $\delta_n := \frac{1}{n}$ ed $m := l - 1 < l + 1 =: M$, dalla precedente segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ è possibile determinare un valore $x_n \in X \cap]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[- \{x_0\}$ tale che risulti :

$$f(x_n) < l - 1 \text{ oppure } f(x_n) > l + 1 \ .$$

D'altra parte, dalla relazione $x_n \in X\cap]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[-\{x_0\}$ segue che $(x_n) \subseteq X - \{x_0\}$ è tale che $x_n \to x_0$ (cfr. la dimostrazione del TEOREMA 3), dunque per il *Teorema Fondamentale* risulta:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \ .$$

Ma ciò è assurdo, poiché in corrispondenza di $\varepsilon = 1$ è possibile determinare $\nu \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulti:

$$n > \nu \quad \Rightarrow \quad l - 1 < f(x_n) < l + 1 \ ,$$

in palese contrasto con quanto trovato in precedenza. □

Altri teoremi che si dimostrano usando il *Teorema Fondamentale* sono i risultati di confronto, cioè:

TEOREMA 6 (del Confronto)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, x_0 un punto di accumulazione per X ed $f, g : X \to \mathbb{R}$.
Se esiste un intorno $I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che:

$$\forall x \in X \cap I - \{x_0\}, \quad f(x) \le g(x) \ , \tag{4}$$

allora valgono le seguenti implicazioni:

i. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty;$

ii. $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$

Dimostrazione. Dimostriamo la *i*, analogamente ragionandosi per la *ii*.
Fissiamo arbitrariamente una successione $(x_n) \subseteq X - \{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$.
Per il *Teorema Fondamentale* la successione di termine generale $f(x_n)$ è positivamente divergente, cioè ha:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty \ .$$

Dato che $x_n \to x_0$, in corrispondenza dell'intorno I di x_0 in cui è soddisfatta la (4) è possibile determinare un $\nu \in \mathbb{R}$ in guisa che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \nu \ \Rightarrow \ x_n \in I \ ,$$

cosicché dalla (4) segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \nu \ \Rightarrow \ f(x_n) \le g(x_n) \ ;$$

quindi, per il *Teorema del Confronto per le Successioni*, la successione di termine generale $g(x_n)$ è positivamente divergente, cioè ha:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = +\infty \ .$$

Visto che la (x_n) era scelta in maniera del tutto arbitraria tra quelle in $X - \{x_0\}$ che tendono ad x_0, possiamo concludere che *per ogni* successione $(x_n) \subseteq X$ approssimante x_0 vale la relazione $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = +\infty$; e ciò, per il *Teorema Fondamentale*, consente di affermare che:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \ ,$$

come volevamo. □

TEOREMA 7 (dei Carabinieri)
Siano $x \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, x_0 un punto di accumulazione per X ed $f, g, h : X \to \mathbb{R}$.
Se esiste un intorno $I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che:

$$\forall x \in X \cap I - \{x_0\}, \quad f(x) \le g(x) \le h(x) \ , \tag{5}$$

e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$*, allora* g *è regolare in* x_0 *ed ha lo stesso limite di* f *ed* h*, cioè risulta:*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l\ .$$

Dimostrazione. Fissiamo arbitrariamente una successione $(x_n) \subseteq X$ approssimante x_0.
Per il *Teorema Fondamentale* le successioni di termini generali $f(x_n)$ e $h(x_n)$ sono regolari ed hanno entrambe limite l, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} h(x_n) = l\ .$$

Dato che $x_n \to x_0$, in corrispondenza dell'intorno I di x_0 in cui è soddisfatta la (5) possiamo individuare un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \nu \ \Rightarrow\ f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)\ ;$$

dunque, per il *Teorema dei Carabinieri per Successioni*, la successione di termine generale $g(x_n)$ è regolare ed ha:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l\ .$$

Visto che la (x_n) era scelta in maniera del tutto arbitraria tra quelle approssimanti x_0, possiamo concludere che *per ogni* successione $(x_n) \subseteq X - \{x_0\}$ con $x_n \to x_0$ vale la relazione $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l$; e ciò, per il *Teorema Fondamentale*, consente di affermare che:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l\ .$$

□

2. Operazioni coi Limiti

Oltre ai teoremi sui limiti, il *Teorema Fondamentale* consente di "trasferire" ai limiti di funzioni i risultati sulle operazioni già dimostrati per le successioni.
Enunciamo il risultato in maniera concisa, lasciando allo studioso lettore il compito di completare l'enunciato (eventualmente consultando il libro di testo):

Teorema 8 (Operazioni coi Limiti)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto,* x_0 *un punto di accumulazione per* X *ed* $f, g : X \to \mathbb{R}$*.*
Se f *e* g *sono regolari in* x_0 *e se i secondi membri non si presentano in* forma indeterminata[2]*, valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)\ , \tag{6}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\ . \tag{7}$$

Inoltre, se esiste un intorno $I \in \mathcal{I}(x_0)$ *tale che:*

$$\forall x \in X \cap I - \{x_0\}, \quad g(x) \neq 0\ , \tag{8}$$

allora:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\ . \tag{9}$$

La tecnica dimostrativa è del tutto analoga a quella presentata nel paragrafo precedente; pertanto forniamo unicamente la dimostrazione della (9).

[2]Per convenienza del lettore ricordiamo che si chiamano *forme indeterminate* quelle operazioni non consentite in $\widehat{R}$, cioè $\pm\infty + (\mp\infty)$, $\pm\infty - (\pm\infty)$ (denotate usualmente coll'unico simbolo $\infty - \infty$), $0 \cdot \pm\infty$ (denotate con l'unico simbolo $0 \cdot \infty$), $0/0$ e $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ (denotate col simbolo ∞/∞)

Dimostrazione della (9). Fissiamo arbitrariamente una successione $(x_n) \subseteq X - \{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$.
Dal *Teorema Fondamentale* segue che le successioni di temini generali $f(x_n)$ e $g(x_n)$ sono regolari ed hanno, rispettivamente, limite coincidente con quello di f e con quello di g in x_0, cioè che:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lambda \; .$$

Dato che $x_n \to x_0$, in corrispondenza dell'intorno I di x_0 in cui è soddisfatta la (8) è possibile determinare un $\nu \in \mathbb{R}$ in guisa che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \nu \;\Rightarrow\; x_n \in I \; ,$$

dunque dalla stessa (8) segue immediatamente che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \nu \;\Rightarrow\; g(x_n) \neq 0 \; .$$

Conseguentemente, la successione di termine generale $g(x_n)$ ha termini non nulli per n "sufficientemente grande" ed ha senso considerare la successione rapporto $f(x_n)/g(x_n)$ almeno per indici "grandi".
Per il *Teorema sul Limite del Rapporto per Successioni* risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)}$$

poiché per ipotesi il rapporto l/λ non si presenta in forma indeterminata (i.e., non si ha né $l = 0 = \lambda$ né $l = \pm\infty$ e $\lambda = \pm\infty$).
Visto che la (x_n) era scelta in maniera del tutto arbitraria tra quelle approssimanti x_0, possiamo concludere che *per ogni* successione $(x_n) \subseteq X$ approssimante x_0 sussiste la relazione $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)}$; e ciò, per il *Teorema Fondamentale*, consente di affermare la validità di (9). □

Osservazione 2: Si possono estendere ai limiti di funzione anche tutte le possibili generalizzazioni dei teoremi sui limiti di successione presentati come esercizio in [DM].
Le modifiche sono del tutto ovvie ed è lasciato allo studioso lettore il compito di enunciare e dimostrare tali risultati. ♦

3. Sulla Irregolarità di Alcune Funzioni Elementari

In questo paragrafo vogliamo fornire alcuni esempi che chiariscano come impiegare il *Teorema Fondamentale* per stabilire che alcune funzioni elementari non hanno limite.

`Esempio 1:` La funzione sin non ha limite né per $x \to +\infty$ né per $x \to -\infty$.
Infatti, considerate le due successioni di termini generali:

$$\begin{aligned} x_n &:= 2n\pi \\ y_n &:= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \; , \end{aligned}$$

si trova:

$$\begin{aligned} \sin x_n &= 0 \\ \sin y_n &= 1 \; ; \end{aligned}$$

dato che (x_n) ed (y_n) sono successioni approssimanti $+\infty$ e che:

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin y_n \; ,$$

la funzione sin non può avere limite in $+\infty$.
La dimostrazione dell'analogo asserto circa la non regolarità in $-\infty$ è lasciata al lettore. $\diamondsuit$

Osservazione 3: Analogamente si dimostra che nemmeno la funzione cos ha limite per $x \to \pm\infty$. $\blacklozenge$

`Esempio 2:` La funzione tan non è regolare in $\pm\infty$.
Infatti, considerate le successioni di termini generali:

$$\begin{aligned} x_n &:= n\pi \\ y_n &:= \frac{\pi}{4} + n\pi \ , \end{aligned}$$

si trova:

$$\begin{aligned} \tan x_n &= 0 \\ \tan y_n &= 1 \ ; \end{aligned}$$

dato che (x_n) ed (y_n) sono successioni approssimanti $+\infty$ e che:

$$\lim_{n\to\infty} \tan x_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \tan y_n \ ,$$

la funzione tan non può avere limite in $+\infty$.
La dimostrazione dell'analogo asserto circa la non regolarità in $-\infty$ è lasciata al lettore. $\diamondsuit$

`Esempio 3:` Ancora più interessante è il fatto che la funzione tan non è regolare in $\frac{\pi}{2}$.
Consideriamo le successioni di termine generale:

$$x_n := \arctan n \qquad \text{e} \qquad y_n := \pi - \arctan n \ ;$$

evidentemente abbiamo:

$$0 < x_n < \frac{\pi}{2} < y_n < \pi$$

ed anche:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} y_n \ ,$$

cosicché entrambe (x_n) ed (y_n) sono successioni in $\operatorname{Dom}\tan$ convergenti verso $\pi/2$; d'altra parte, abbiamo:

$$\begin{aligned} \tan x_n &= \tan(\arctan n) = n \\ \tan y_n &= \tan(\pi - \arctan n) \\ &= -\tan(\arctan n) = -n \ , \end{aligned}$$

dunque:

$$\lim_{n\to\infty} \tan x_n = +\infty \neq -\infty = \lim_{n\to\infty} \tan y_n$$

quindi tan non può essere regolare in $\pi/2$. $\diamondsuit$

Osservazione 4: Dalla periodicità della funzione tan segue che essa non è regolare in nessuno dei punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. $\blacklozenge$

`Esempio 4:` La funzione $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) := \cos \frac{1}{x}$$

non è regolare in 0.
Infatti, dato che le equazioni $\cos\frac{1}{x} = 1$ e $\cos\frac{1}{x} = -1$ hanno infinite soluzioni del tipo:

$$x = \frac{1}{2k\pi} \qquad (k \in \mathbb{Z} - \{0\})$$

ed

$$x = \frac{1}{\pi + 2k\pi} \qquad (k \in \mathbb{Z}) ,$$

le due successioni di termini generali:

$$x_n := \frac{1}{2n\pi}$$
$$y_n := \frac{1}{\pi + 2n\pi}$$

approssimano entrambe lo 0 e sono tali che:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2n\pi = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} \cos(\pi + 2n\pi) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) ,$$

cosicché f non può essere regolare in 0. ♢

Osservazione 5: Con la stessa tecnica usata nell'esempio precedente, si può dimostrare che comunque si scelga $\alpha \in [-1, 1]$ esistono una successione $\big(x_n(\alpha)\big)$ a termini positivi ed una successione $\big(y_n(\alpha)\big)$ a termini negativi, entrambe infinitesime e tali che:

$$\cos\frac{1}{x_n(\alpha)} = \alpha = \cos\frac{1}{y_n(\alpha)}$$

per ogni indice $n \in \mathbb{N}$.
Per rendersi conto di ciò basta risolvere, limitatamente ai valori positivi ed ai valori negativi di x, l'equazione $\cos\frac{1}{x} = \alpha$. ♦

`Esempio 5:` La funzione $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) := \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ non è regolare in 0.
Infatti, scelto $\alpha \in [-1, 1]$, per l'**Osservazione** precedente esiste una successione $\big(x_n(\alpha)\big)$ a termini positivi, infinitesima e tale che $\cos\frac{1}{x_n(\alpha)} = \alpha$ per ogni indice n; ma allora risulta:

$$f\big(x_n(\alpha)\big) = \frac{1}{x_n(\alpha)}\ \cos\frac{1}{x_n(\alpha)} = \frac{\alpha}{x_n(\alpha)}$$

e dunque:

$$\lim_{n\to\infty} f\big(x_n(\alpha)\big) = \begin{cases} +\infty & , \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ 0 & , \text{se } \alpha = 0 \\ -\infty & , \text{se } -1 \leq \alpha < 0 \end{cases} .$$

Quanto ora trovato implica che è sempre possibile determinare due successioni di $\mathbb{R} - \{0\}$ che tendono a 0 e lungo le quali f esibisce comportamenti diversi al limite; pertanto, f non può essere regolare in 0. ♢

Osservazione 6: A voler essere precisi, il ragionamento appena concluso mostra che il limite destro:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ \cos\frac{1}{x}$$

non esiste, in quanto le successioni usate per testare la validità del *Teorema Fondamentale* sono fatte da numeri positivi.

Non è difficile rendersi conto del fatto che non esiste nemmeno il limite sinistro:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \cos\frac{1}{x} \ :$$

infatti, ciò si dimostra in maniera del tutto analoga, ma sfruttando successioni del tipo $\big(y_n(\alpha)\big)$ che sono a termini negativi. ⧫

Osservazione 7: Entrambe le funzioni di cui agli `Esempi` 4 `&` 5 oscillano *selvaggiamente* intorno a 0; tuttavia, la prima lo fa mantenendosi limitata (tra -1 ed 1) intorno a 0, mentre la seconda assume intorno a 0 tutti i valori reali possibili. ⧫

`Esempio 6:` Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) := \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$ e proviamo che essa non è regolare in 0.
Le successioni di termine generale:

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad y_n := -\frac{1}{n}$$

approssimano entrambe 0 e sono tali che:

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \mathbf{e}^n = +\infty$$
$$\lim_n f(y_n) = \lim_n \mathbf{e}^{-n} = 0\ ;$$

pertanto f non può avere limite per $x \to 0$. ◊

Riferimenti bibliografici

[DM] Di Meglio, G. (2017), *Qualche Esercizio sui Limiti di Successione.*

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY

Figura 1. Sally Brown: un esempio da non imitare…