

INTERVALLI ED INTORNI

G. DI MEGLIO

INTRODUZIONE

In questi fogli è dimostrata la *proprietà di connessione* degli intervalli di $\mathbb{R}$, così come accennata a lezione.

Inoltre, sono dimostrate alcune proprietà degli intorni aperti dei punti di $\widehat{\mathbb{R}}$.

1. INTERVALLI E PROPRIETÀ DI CONNESSIONE

Ricordiamo la seguente:

Definizione 1 Siano $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Gli insiemi:

- (1) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- (2) $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- (3) $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- (4) $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

si chiamano, rispettivamente, *intervallo chiuso*, *intervallo aperto*, *intervallo semiaperto superiormente* ed *intervallo semiaperto inferiormente* di estremi a e b .

Gli insiemi:

- (5) $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- (6) $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- (7) $] - \infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- (8) $] - \infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

si chiamano, rispettivamente, *intervallo chiuso non limitato superiormente* e *intervallo aperto non limitato superiormente di estremo inferiore a* ed *intervallo chiuso non limitato inferiormente* e *intervallo aperto non limitato inferiormente di estremo superiore b* .

Osservazione 1: Se $b = a$, l'intervallo chiuso $[a, a]$ coincide con l'insieme formato dal solo punto a , i.e. $[a, a] = \{a\}$; invece, risulta $]a, a[= [a, a[=]a, a] = \emptyset$. ♦

Osservazione 2: Nella Definizione 1 non abbiamo dato alcun significato ai simboli $] - \infty, +\infty[$, $[-\infty, +\infty[$, $] - \infty, +\infty]$ e $[-\infty, +\infty]$, né lo daremo in seguito.

Tuttavia, dato che tali simboli si incontrano in letteratura, informiamo il lettore che: il simbolo $] - \infty, +\infty[$ viene usato per denotare l'insieme $\mathbb{R}$, cioè si pone $] - \infty, +\infty[:= \mathbb{R}$; si pone $[-\infty, +\infty[:= \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $] - \infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; infine, il simbolo $[-\infty, +\infty]$ viene a volte usato per denotare l'*insieme esteso dei numeri reali* cioè $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. ♦

Definizione 2 Si dice che un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è un *intervallo* se e esso è uno tra gli insiemi di cui alla Definizione 1.

Per indicare che I è uno dei possibili intervalli di estremi $a \leq b \in \hat{\mathbb{R}}$ useremo il simbolo (a, b) .¹

In generale, distinguendo opportunamente tutti i casi, si prova che gli elementi $a \leq b \in \hat{\mathbb{R}}$ di cui alla Definizione 2 sono effettivamente gli estremi dell'intervallo $I = (a, b)$ nel senso delle definizioni di estremo inferiore ed estremo superiore [DM]; in altri termini vale il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 1

Siano $a \leq b \in \hat{\mathbb{R}}$ ed $I = (a, b)$ uno dei possibili intervalli di estremi a e b .

Risulta $\inf I = a$ e $\sup I = b$.

Inoltre, I è chiuso in a [risp. in b] se e solo se I è dotato di minimo [risp. di massimo] e $\min I = a$ [risp. $\max I = b$].

La seguente proposizione, che esprime una proprietà caratteristica degli intervalli, si può dimostrare analizzando le Definizioni 1 & 2:

PROPOSIZIONE 2 (Caratterizzazione degli Intervalli)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

X è un intervallo se e solo se esso contiene tutti i numeri strettamente compresi fra il suo estremo inferiore ed il suo estremo superiore, cioè se:

$$(9) \quad \inf X < x < \sup X \quad \Rightarrow \quad x \in X .$$

e la sua dimostrazione è lasciata allo studioso lettore.

La Proposizione 2 può essere usata per dimostrare una seconda proprietà caratteristica degli intervalli, cioè quella espressa nell'enunciato che segue:

TEOREMA 1 (Proprietà di Connessione)

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

L 'insieme X è un intervallo se e solo se esso soddisfa la proprietà:

$$(10) \quad x_1 \leq x_2 \in X \quad \Rightarrow \quad [x_1, x_2] \subseteq X ,$$

detta proprietà di connessione.

Osservazione 3: La *proprietà di connessione* esprime formalmente un fatto intuitivo, legato alla rappresentazione geometrica degli intervalli come segmenti (o eventualmente semirette) dell'asse reale. Esso è il seguente:

«Dati due punti distinti appartenenti ad un intervallo, è sempre possibile passare da uno all'altro percorrendo un segmento tutto contenuto nell'intervallo stesso».



Dimostrazione. $\Rightarrow$) Supponiamo che $X \neq \emptyset$ sia un intervallo e proviamo che esso gode della proprietà di connessione.

Fissiamo $x_1 \leq x_2 \in X$ e scegliamo ad arbitrio $x \in [x_1, x_2]$.

Chiaramente, se $x = x_1$ od $x = x_2$ abbiamo $x \in X$; pertanto, ci rimane da provare

¹Questo simbolo si può confondere con quello usato per denotare la coppia ordinata di prima coordinata a e seconda coordinata b ; tuttavia, il più delle volte il significato del simbolo diviene chiaro dal contesto e faremo a meno di specificarlo quando non nascano ambiguità.

la (10) solo nel caso in cui risulta $x_1 < x < x_2$. In tale ipotesi, per la transitività dell'ordine, troviamo:

$$\inf X \leq x_1 < x < x_2 \leq \sup X \quad \Rightarrow \quad \inf X < x < \sup X$$

cosicché $x \in X$, poiché a norma della Proposizione 2 X contiene tutti i valori strettamente compresi tra il proprio estremo inferiore ed il proprio estremo superiore. Dall'arbitrarietà nella scelta di $x \in [x_1, x_2]$ segue che $[x_1, x_2] \subseteq X$ e dall'arbitrarietà nella scelta di $x_1 \leq x_2 \in X$ segue la proprietà di connessione.

$\Leftarrow$) Supponiamo che $X \neq \emptyset$ goda della proprietà di connessione (10) e proviamo che esso è un intervallo.

Per semplicità, diciamo $\alpha = \inf X$ e $\beta = \sup X$ (i quali esistono, finiti o no).

Se $\alpha = \beta$, si ha necessariamente $X = \{\alpha\} = [\alpha, \alpha]$ e non c'è nulla da dimostrare; pertanto, nel seguito possiamo senz'altro supporre $\alpha < \beta$, di modo che X contiene almeno due punti distinti.

Per mostrare che X è un intervallo, a norma della Proposizione 2, basta mostrare che esso contiene tutti gli elementi strettamente compresi tra α e β .

Fissiamo dunque x in modo che $\alpha < x < \beta$ e consideriamo i due insiemi $X_{x-} = X \cap]-\infty, x[$ ed $X_{x+} = X \cap]x, +\infty[$ (detti, rispettivamente, *parte di X a sinistra di x* e *parte di X a destra di x*). Dato che α è un minorante di X , esso è anche un minorante di X_{x-} ; d'altra parte, fissato $0 < \varepsilon < x - \alpha$, per la *seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore*, possiamo determinare un numero $x'_\varepsilon \in X$ tale che $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$ è un minorante di X_{x-} e β è un maggiorante di X_{x+} cosicché è possibile determinare $x_1 \in X_{x-}$ ed $x_2 \in X_{x+}$ in modo che:

$$\alpha \leq x_1 < x < x_2 \leq \beta,$$

quindi $x \in [x_1, x_2]$; per la proprietà di connessione, l'intervallo $[x_1, x_2]$ è contenuto in X e ciò implica $x \in X$ come volevamo. $\square$

Una notevole proprietà degli intervalli della retta numerica è espressa dal seguente teorema (che non dimostriamo) la cui utilità effettiva non è subito evidente ma che si può sfruttare per stabilire proprietà interessanti degli insiemi aperti:

TEOREMA 2

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme aperto.²

Esiste una famiglia $\{I_n\}$ finita o al più numerabile di intervalli a due a due disgiunti la cui unione coincide con A .

2. INTORNI E LORO PROPRIETÀ

Ricordiamo le seguenti definizioni già date a lezione:

Definizione 3 Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$.

L'intervallo:

$$\begin{aligned}]x_0 - \delta, x_0 + \delta[&= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} \end{aligned}$$

viene detto *intorno aperto simmetrico di x_0 con semiampiezza δ* .

²Ricordiamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è detto *aperto* quando ogni $x \in A$ è centro di un intervallo aperto I tutto contenuto in A .

Definizione 4 Sia $K \in \mathbb{R}$.

Gli intervalli:

$$\begin{aligned}]K, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > K\} \\]-\infty, K[&= \{x \in \mathbb{R} : x < K\} \end{aligned}$$

vengono, rispettivamente, detti *intorno aperto di $+\infty$* ed *intorno aperto di $-\infty$* .

Sfruttando le definizioni 3 & 4 si prova facilmente che:

PROPOSIZIONE 3

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$ e $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. *Risulta:*

$$(11) \quad \delta_1 \leq \delta_2 \quad \Rightarrow \quad]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\subseteq]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$$

$$(12) \quad K_1 \leq K_2 \quad \Rightarrow \quad]K_2, +\infty[\subseteq]K_1, +\infty[$$

$$(13) \quad K_1 \leq K_2 \quad \Rightarrow \quad]-\infty, K_1[\subseteq]-\infty, K_2[$$

PROPOSIZIONE 4

Siano $x_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Se I e J sono due intorni di x_0 , allora $I \cap J$ ed $I \cup J$ sono intorni di x_0 .

PROPOSIZIONE 5

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ ed I_0 un intorno aperto di x_0 .

Per ogni punto $x \in I_0$ esiste almeno un intorno aperto I di x tale che $I \subseteq I_0$.

Un po' più riposta, invece, è la dimostrazione delle proprietà seguenti:

PROPOSIZIONE 6 (Proprietà di Separazione di Hausdorff)

Siano $x_0, x_1 \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Se $x_0 \neq x_1$ esistono un intorno I_0 di x_0 ed un intorno I_1 di x_1 tali che $I_0 \cap I_1 = \emptyset$.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo sempre supporre che risulti $x_0 < x_1$ (infatti, se ciò non fosse, basterebbe ragionare in maniera simmetrica).

I casi che possono presentarsi, allora, sono solo quattro:

$x_0 = -\infty$ ed $x_1 = +\infty$: in tale eventualità basta scegliere $I_0 =]-\infty, 0[$ ed $I_1 =]0, +\infty[$;

$x_0 = -\infty$ ed $x_1 \in \mathbb{R}$: in tal caso, scelto $\delta_1 = 1$, basta porre $I_0 =]-\infty, x_1 - 1[$ ed $I_1 =]x_1 - 1, x_1 + 1[$;

$x_0 \in \mathbb{R}$ ed $x_1 = +\infty$: ragionando come sopra, basta scegliere $I_0 =]x_0 - 1, x_0 + 1[$ ed $I_1 =]x_0 + 1, +\infty[$;

$x_0, x_1 \in \mathbb{R}$: in questo caso, scelti $\delta_0 = \delta_1 = \frac{x_1 - x_0}{2}$, si vede facilmente che gli intorni $I_0 =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ed $I_1 =]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$ sono disgiunti: infatti, se per assurdo esistesse qualche $x \in I_0 \cap I_1$ si avrebbe:

$$x < x_0 + \delta = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 - \delta < x,$$

ma ciò è assurdo poiché è una violazione del PRINCIPIO DI TRICOTOMIA.

In ogni caso abbiamo esplicitamente individuato due intorni I_0 ed I_1 tali che $I_0 \cap I_1 = \emptyset$, come volevamo. $\square$

Osservazione 4: Modificando leggermente la dimostrazione si può provare un fatto più forte, cioè che per ogni coppia $x_0 \neq x_1 \in \widehat{\mathbb{R}}$ esistono due intorni aperti I_0 ed I_1 e due insiemi chiusi C_0 e C_1 tali che:

$$I_0 \subset C_0; \quad I_1 \subset C_1 \quad \text{e} \quad C_0 \cap C_1 = \emptyset.$$

PROPOSIZIONE 7

Siano $x_0 < x_1 \in \widehat{\mathbb{R}}$ ed I_0, I_1 due intorni aperti, rispettivamente, di x_0 e di x_1 . Se I_0 ed I_1 sono disgiunti, allora essi sono separati ed I_0 è l'insieme dei minoranti.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che se I_0 ed I_1 sono intorni aperti e $I_0 \cap I_1 = \emptyset$, allora $\sup I_0 \leq \inf I_1$.

Distinguiamo i quattro casi possibili:

$x_0 = -\infty$ ed $x_1 = +\infty$: in tal caso $I_0 =]-\infty, K_0[$ ed $I_1 =]K_1, +\infty[$ e tali intervalli sono disgiunti solo se $K_0 \leq K_1$;

$x_0 = -\infty$ ed $x_1 \in \mathbb{R}$: in questo caso $I_0 =]-\infty, K_0[$ ed $I_1 =]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[$ e tali intervalli sono disgiunti solo se $K_0 \leq x_1 - \delta_1$;

$x_0 \in \mathbb{R}$ ed $x_1 = +\infty$: reciprocamente, $I_0 =]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[$ ed $I_1 =]K_1, +\infty[$ sono disgiunti solo se $x_0 + \delta_0 \leq K_1$;

$x_0 \in \mathbb{R}$ ed $x_1 \in \mathbb{R}$: qui $I_0 =]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[$ ed $I_1 =]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[$ che sono disgiunti solo se $x_0 + \delta_0 \leq x_1 - \delta_1$ oppure $x_0 - \delta_0 \geq x_1 + \delta_1$; ma la seconda eventualità è impossibile, poiché il suo verificarsi implica $x_0 > x_1$ contro l'ipotesi; quindi $x_0 + \delta_0 \leq x_1 - \delta_1$;

in ogni caso dunque risulta $\sup I_0 \leq \inf I_1$, come volevamo. $\square$

Osservazione 5: Quest'ultima proprietà si può usare per dimostrare il *Teorema di Permanenza del Segno* sfruttando la *definizione unificata di limite* (come fatto a lezione). $\blacklozenge$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[DM] Di Meglio, G. (2017) *Estremi di Insiemi Numerici* [reperibile nella cartella **Materiale Didattico** al seguente URL: www.docenti.unina.it/guglielmo.di_meglio].

GUGLIELMO DI MEGLIO, PhD
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"
PIAZZALE TECCHIO 80
80126 NAPOLI – ITALY
EMAIL: guglielmo.dimeglio@unina.it