ESTREMI DI INSIEMI NUMERICI

G. DI MEGLIO

Introduzione

In questi fogli, oltre ad essere richiamate le definizioni di massimo, di minimo, di estremo superiore e di estremo inferiore di un insieme numerico già date in aula, vengono dimostrate le proprietà caratteristiche degli estremi inferiore e superiore. Inoltre, vengono illustrati i legami tra gli estremi inferiore e superiore ed il minimo e il massimo di un insieme numerico.

1. Minimo e Massimo

Definizione 1 (Minimo di un Insieme Numerico) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto ed $m \in \mathbb{R}$. Il numero m è detto *minimo di* X ed è denotato col simbolo $\min X$ se e solo se esso gode delle due proprietà:

$$m \in X \;, \tag{min.1}$$

$$\forall x \in X,\ m \leq x \;. \tag{min.2}$$

Definizione 2 (Massimo di un Insieme Numerico) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto ed $M \in \mathbb{R}$.
Il numero M è detto *massimo di* X ed è denotato col simbolo $\max X$ se e solo se esso gode delle due proprietà:

$$M \in X \;, \tag{max.1}$$

$$\forall x \in X,\ x \leq M \;. \tag{max.2}$$

Osservazione 1 (Unicità di Minimo e Massimo)**:** È appena il caso di notare che se l'insieme X ha minimo, allora tale minimo è *unico*.
Infatti, se *per assurdo* $m \neq \mu$ fossero entrambi minimi di X, per le (min.1) si avrebbe $m, \mu \in X$ e per (min.2) si avrebbe $m \leq \mu \leq m$, cioè $m = \mu$ contro l'assunto.
Analogo ragionamento mostra che anche il massimo di un insieme X, se e siste, è *unico*. ♦

Osservazione 2: Notiamo esplicitamente che il minimo di un insieme X, se e siste, è un *minorante* dell'insieme X e che il massimo di un insieme X, se e siste, è un *maggiorante* dell'insieme X (a norma delle definizioni date in aula).
Pertanto, un sottoinsieme X dotato di minimo è necessariamente limitato inferiormente, mentre un sottoinsieme dotato di massimo è necessariamente limitato superiormente. ♦

Dalle osservazioni precedenti segue che, detti rispettivamente $\mathcal{L}(X)$ ed $\mathcal{M}(X)$ gli insiemi dei minoranti e dei maggioranti di X, le definizioni di minimo e massimo possono essere espresse sinteticamente come segue:

Date: 28 dicembre 2017.

> "X è dotato di minimo se e solo se $X \cap \mathcal{L}(X) \neq \varnothing$; in tal caso, l'insieme $X \cap \mathcal{L}(X)$ ha un unico elemento che si chiama *minimo di* X e si denota col $\min X$"
>
> "X è dotato di massimo se e solo se $X \cap \mathcal{M}(X) \neq \varnothing$; in tal caso, l'insieme $X \cap \mathcal{M}(X)$ ha un unico elemento che si chiama *massimo di* X e si denota col $\max X$."

Osservazione 3: Esistono sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti privi di massimo e di minimo, o dotati di minimo ma non di massimo, oppure dotati di massimo ma privi di minimo, ovvero dotati sia di minimo sia di massimo.
Ad esempio, è semplice provare che gli insiemi:

- $I_1 := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $I_2 := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $I_3 := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $I_4 := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

(con $a < b \in \mathbb{R}$) hanno, rispettivamente, le seguenti caratteristiche:

- I_1 è privo di minimo e di massimo;
- I_2 è dotato di minimo e $\min I_2 = a$, ma è privo di massimo;
- I_3 è dotato di massimo e $\max I_3 = b$, però è privo di minimo;
- I_4 è dotato sia di minimo sia di massimo e risulta $\min I_4 = a$ e $\max I_4 = b$.

Qui di seguito dimostriamo che I_1 non è dotato di massimo; lasciamo allo studioso lettore dimostrare le altre proprietà.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista un $M \in \mathbb{R}$ che goda delle (max.1) & (max.2) rispetto ad I_1, ossia tale che:

$$\begin{aligned} &M \in I_1 \quad \text{cioè} \quad a < M < b\ , \\ &\forall x \in I_1,\ x \leq M\ . \end{aligned}$$

Consideriamo allora il numero $\tilde{x} := \frac{M+b}{2}$: dato che $a < M < b$ abbiamo:

$$\begin{aligned} M < b \quad &\Rightarrow \quad M + b < b + b = 2b \\ &\Rightarrow \quad \tilde{x} = \frac{M+b}{2} < b \\ \left.\begin{array}{l} a < b \\ a < M \end{array}\right\} \quad &\Rightarrow \quad 2a = a + a < a + b < M + b \\ &\Rightarrow \quad a < \frac{M+b}{2} = \tilde{x}\ , \end{aligned}$$

cosicché $\tilde{x} \in I_1$. D'altra parte, si ha pure:

$$\begin{aligned} M < b \quad &\Rightarrow \quad 2M < M + b \\ &\Rightarrow \quad M < \frac{M+b}{2} = \tilde{x} \,, \end{aligned}$$

ma ciò è assurdo in quanto per la (max.2) è anche $\tilde{x} \leq M$ ed è violato il Principio di Tricotomia. □

♦

Tra le proprietà del minimo e del massimo (e, più in generale, dei minoranti e dei maggioranti) segnaliamo le seguenti:

Proposizione 1
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e si ponga:

$$-X := \{-x, \; x \in X\}$$

(cosicché $-X$ è l'insieme costituito dagli opposti degli elementi di X).
Valgono i seguenti fatti:

i. *$-X$ è limitato inferiormente se e solo se X è limitato superiormente e risulta:*

$$\mathcal{L}(-X) = -\mathcal{M}(X) \quad \textit{ossia} \quad \mathcal{M}(X) = -\mathcal{L}(-X) \,; \tag{1}$$

ii. *$-X$ è dotato di minimo se e solo se X è dotato di massimo e si ha:*

$$\min(-X) = -\max X \quad \textit{ossia} \quad \max X = -\min(-X) \,; \tag{2}$$

iii. *$-X$ è limitato superiormente se e solo se X è limitato inferiormente e risulta:*

$$\mathcal{M}(-X) = -\mathcal{L}(X) \quad \textit{cioè} \quad \mathcal{L}(X) = -\mathcal{M}(-X) \,; \tag{3}$$

iv. *$-X$ è dotato di massimo se e solo se X è dotato di minimo e si ha:*

$$\max(-X) = -\min X \quad \textit{ossia} \quad \min X = -\max(-X) \,. \tag{4}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la *i*, analogamente ragionandosi per la *iii*.
Sia μ un minorante di $-X$. Dato che $\mu \leq -x$ per ogni $x \in X$, risulta pure $x \leq -\mu$ per ogni $x \in X$, sicché $-\mu$ è un maggiorante di X. Dato che $\mu = -(-\mu)$ abbiamo $\mu \in -\mathcal{M}(X)$ e, vista l'arbitrarietà nella scelta di $\mu \in \mathcal{L}(-X)$, da ciò segue $\mathcal{L}(X) \subseteq -\mathcal{M}(X)$.
Viceversa, se M è un maggiorante di X, abbiamo $-M \leq -x$ per ogni $x \in X$, cosicché $-M$ è un minorante di $-X$. Data l'arbitrarietà nella scelta di M in $\mathcal{M}(X)$, otteniamo $-\mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{L}(-X)$.
Pertanto $\mathcal{L}(-X) = -\mathcal{M}(X)$ come volevamo.

Proviamo la *ii*, potendosi ragionare analogamente per la *iv*.
Detto m il minimo di X, è evidente che $-m \in -X$ e che per ogni $x \in X$ risulta $-x \leq -m$; pertanto, il numero $-m$ gode delle proprietà caratteristiche del massimo di $-X$ e risulta $\max(-X) = -m = -\min X$. □

Osservazione 4: Notiamo esplicitamente che le proprietà *i* ed *iii* consentono di dimostrare ogni teorema relativo ai maggioranti [risp. minoranti] di un insieme usando un analogo asserto già dimostrato per i minoranti [risp. maggioranti] di un insieme numerico.
Analogamente, le proprietà *ii* ed *iv* consentono di dimostrare ogni teorema relativo al massimo [risp. minimo] di un insieme usando un analogo asserto già dimostrato per il minimo [risp. massimo] di un insieme numerico. ♦

Infine segnaliamo la seguente proprietà che torna utile in varie situazioni:

Proposizione 2
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
X è limitato se e solo se esiste un $C \geq 0$ tale che:

$$\forall x \in X, \quad |x| \leq C \,. \tag{5}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$) *Dobbiamo far vedere che se X è limitato allora esiste $C \geq 0$ che soddisfa* (5). Per ipotesi esistono due numeri $m, M \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\forall x \in X, \quad m \leq x \leq M \,,$$

perciò ha senso considerare il numero $C := \max\{\pm m, \pm M\}$; evidentemente risulta $C \geq 0$ e per la *ii* della Proposizione 1 abbiamo:

$$-C = -\max\{\pm m, \pm M\} = \min\{\mp m, \mp M\} \,,$$

cosicché risulta certamente $-C \leq m$ ed $M \leq C$; pertanto abbiamo:

$$-C \leq x \leq C \quad \Rightarrow \quad |x| \leq C$$

per ogni $x \in X$ che è la tesi.

$\Leftarrow$) *Vogliamo mostrare che se esiste $C \geq 0$ che soddisfa* (5) *allora X è limitato.* Per ipotesi si ha:

$$-C \leq x \leq C$$

per ogni $x \in X$, sicché X ha $-C$ come minorante e C come maggiorante. □

2. Estremi Inferiore e Superiore

Le definizioni che richiamiamo sono fondamentali:

Definizione 3 (Estremo Superiore di un Insieme Numerico) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
Se X è limitato superiormente, si pone per definizione $\sup X := \min \mathcal{M}(X)$.
Se, invece, X non è limitato superiormente (ossia se X non ha maggioranti), si pone per definizione $\sup X = +\infty$.
In ogni caso, l'elemento $\sup X \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} =]-\infty, +\infty]$ si chiama *estremo superiore del sottoinsieme X.*

Definizione 4 (Estremo Inferiore di un Insieme Numerico) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
Se X è limitato inferiormente, si pone per definizione $\inf X := \max \mathcal{L}(X)$.
Se, invece, X non è limitato inferiormente (ossia se X non ha minoranti), si pone per definizione $\inf X = -\infty$.
In ogni caso, l'elemento $\inf X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} = [-\infty, +\infty[$ si chiama *estremo inferiore del sottoinsieme X.*

Osservazione 5: Notiamo esplicitamente che l'esistenza di $\min \mathcal{M}(X)$ per un insieme limitato inferiormente è garantita dall'Assioma di Completezza di $\mathbb{R}$. D'altra parte, l'esistenza di $\max \mathcal{L}(X)$ per un insieme limitato superiormente si può ricavare dall'Assioma di Completezza usando la Proposizione 1 come detto nell'Osservazione 4.
Infatti, sia X un sottoinsieme limitato inferiormente; in tal caso, per la *ii*, l'insieme $-X$ è limitato superiormente e si ha $\mathcal{M}(-X) = -\mathcal{L}(X)$; l'Assioma di Completezza garantisce che $\mathcal{M}(-X)$ è dotato di minimo e ciò, per la *iii*, implica che l'insieme $\mathcal{L}(X)$ è dotato di minimo. ⧫

Osservazione 6: Notiamo esplicitamente che, per definizione, *tutti* i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ sono dotati sia di estremo inferiore sia di estremo superiore (i quali risultano finiti o no a seconda dei casi).
Ad esempio, gli insiemi I_1, I_2, I_3, I_4 dell'Osservazione 3 hanno $\inf I_k = a$ e $\sup I_k = b$ per $k = 1, 2, 3, 4$. ♦

Ragionando come nella seconda parte dell'Osservazione 4 non è difficile dimostrare valide le seguenti proprietà degli estremi inferiore e superiore del tutto analoghe alle (2) & (4) della Proposizione 1:

Proposizione 3
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $-X$ l'insieme costituito dagli opposti degli elementi di X.
Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\inf(-X) = -\sup X \quad \textit{ossia} \quad \sup X = -\inf(-X)\ , \tag{6}$$

$$\sup(-X) = -\inf X \quad \textit{ossia} \quad \inf X = -\sup(-X)\ . \tag{7}$$

Gli estremi inferiore e superiore di un insieme numerico, qualora siano finiti, possono essere caratterizzati dalle due fondamentali proprietà riportate nei teoremi seguenti:

Teorema 1 (Proprietà Caratteristiche dell'Estremo Superiore)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $\Lambda \in \mathbb{R}$.
Il numero Λ è l'estremo superiore di X, cioè risulta $\Lambda = \sup X$, se e solo se esso soddisfa le proprietà:

$$\forall x \in X, \quad x \le \Lambda \tag{sup.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X : \quad \Lambda - \varepsilon < x_\varepsilon\ . \tag{sup.2}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è banalissima.
Infatti, la (sup.1) equivale a dire che Λ è un maggiorante di X, cioè che $\Lambda \in \mathcal{M}(X)$, mentre la (sup.2) equivale a dire che nessun numero minore di Λ è un maggiorante di X; pertanto, le (sup.1) & (sup.2) equivalgono all'uguaglianza $\Lambda = \min \mathcal{M}(X)$. □

Teorema 2 (Proprietà Caratteristiche dell'Estremo Inferiore)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il numero λ è l'estremo inferiore di X, cioè si ha $\lambda = \inf X$, se e solo se esso soddisfa le proprietà:

$$\forall x \in X, \quad \lambda \le x \tag{inf.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X : \quad x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon\ . \tag{inf.2}$$

La dimostrazione si può ottenere o ricalcando la precedente, oppure usando le *ii* e *iv* della Proposizione 1 ovvero usando la Proposizione 3; essa è lasciata per esercizio.

Osservazione 7: Proprietà analoghe alle (inf.2) e (sup.2) possono essere usate per caratterizzare i sottoinsiemi con estremo inferiore uguale a $-\infty$ od estremo superiore uguale a $+\infty$.
In particolare, se $X \subseteq \mathbb{R}$ è non vuoto, si ha $\inf X = -\infty$ se e solo se:

$$\forall K > 0,\ \exists x_K \in X : \quad x_K < -K\ ; \tag{inf.2'}$$

mentre si ha $\sup X = +\infty$ se e solo se:

(sup.2') $$\forall K > 0,\ \exists x_K \in X : \quad x_K > K\ .$$

Infatti è evidente che un insieme non è limitato inferiormente [risp. superiormente] se e solo se esso soddisfa la (inf.2') [risp. (sup.2')]. ⧫

Le proposizioni che seguono chiariscono i legami tra minimo ed estremo inferiore e tra massimo ed estremo superiore:

Proposizione 4
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
X è dotato di massimo se e solo se $\sup X \in X$; in tal caso, vale l'uguaglianza:

$$\max X = \sup X\ .$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$) *Se X è dotato di massimo allora $\sup X \in X$ e $\sup X = \max X$.*
Chiaramente basta provare che vale l'uguaglianza $\sup X = \max X$. Notiamo anzitutto che X è, a norma dell'**Osservazione** 1, limitato superiormente, cosicché $\sup X \neq +\infty$. Dato che $\max X$ è un maggiorante di X e che $\sup X$ è il minimo tra i maggioranti di X, risulta:

$$\sup X \leq \max X\ .$$

D'altro canto, dato che $\max X$ è un elemento di X e che $\sup X$ è un maggiorante di X, si ha:

$$\max X \leq \sup X\ .$$

Confrontando le due disuguaglianze otteniamo la tesi.

$\Leftarrow$) *Se $\sup X \in X$ allora X è dotato di massimo e $\max X = \sup X$.*
L'essere $\sup X \in X$ implica che $\sup X \neq +\infty$, cosicché X è limitato superiormente e $\sup X$ è un maggiorante di X. Ma allora $\sup X$ è in $X \cap \mathcal{M}(X)$ e ciò significa che X è dotato di massimo e che $\max X = \sup X$. □

Proposizione 5
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
X è dotato di minimo se e solo se $\inf X \in X$; in tal caso, vale l'uguaglianza:

$$\min X = \inf X\ .$$

La dimostrazione è lasciata al lettore.

3. Esempi

Concludiamo queste note con alcuni esempi.

`Esempio 1:` Consideriamo l'insieme:

$$X := \left\{ x_n := \frac{3n-2}{2n}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \right\}$$

e determiniamone gli estremi inferiore e superiore, chiarendo se essi sono (eventualmente) il minimo ed il massimo dell'insieme.

Innanzitutto, notiamo che gli elementi $x_n \in X$ si possono esprimere come segue:

$$x_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

e che da ciò e dalla positività delle frazioni $1/n$ segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq \frac{3}{2} \ ;$$

d'altro canto, dato che $n \geq 1$ implica $-1/n \geq -1$, dalla precedente segue pure che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \ ;$$

da quanto appena detto possiamo concludere che l'insieme X è limitato sia superiormente sia inferiormente e che i suoi estremi inferiore e superiore (entrambi finiti) soddisfano le disuguaglianze:

$$\inf X \geq \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \sup X \leq \frac{3}{2} \ .$$

Dato che $\frac{1}{2} = x_1$, dalla prima delle precedenti ricaviamo immediatamente che:

$$\inf X = \frac{1}{2}$$

e $\inf X = x_1 \in X$; per la Proposizione 5 X è dotato di minimo e risulta:

$$\min X = x_1 = \frac{1}{2} \ .$$

D'altro canto, dalla formula:

$$x_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

e dal fatto *intuitivo* che la frazione $\frac{1}{n}$ diviene via via più piccola all'aumentare di $n \in \mathbb{N}$, segue euristicamente che gli elementi x_n si fanno sempre più prossimi al numero $\frac{3}{2}$ al crescere di $n \in \mathbb{N}$; pertanto sembra abbastanza sensato **congetturare** che valga l'uguaglianza $\sup X = \frac{3}{2}$.
Per provare la nostra congettura basta dimostrare che il numero $\Lambda = \frac{3}{2}$ gode delle *proprietà caratteristiche dell'estremo superiore* enunciate nel Teorema 1.
Il fatto che $\frac{3}{2}$ goda della (sup.1) è immediata conseguenza di quanto detto più su; quindi rimane da provare che vale la (sup.2).
Per fare ciò, fissiamo $\varepsilon > 0$ e mostriamo che è possibile determinare un elemento $x_\nu \in X$, cioè un numero naturale $\nu \in \mathbb{N}$, in guisa che:

$$\frac{3}{2} - \varepsilon < x_\nu \ .$$

La condizione precedente equivale a dire che la disequazione:

$$\frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

nell'incognita $n \in \mathbb{N}$ ha almeno una soluzione ν; ma tale disequazione equivale a:

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

la quale ha certamente infinite soluzioni, poiché $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente. Ne consegue che $\frac{3}{2}$ gode anche della (sup.2), cosicché:

$$\sup X = \frac{3}{2} \ .$$

Infine, notato che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n < \frac{3}{2}$$

è evidente che $\frac{3}{2} \notin X$; pertanto, a norma della Proposizione 4, l'insieme X non è dotato di massimo. ◇

`Esempio 2:` Sia $f(x) := \log(x^3 - 1)$. Consideriamo l'insieme X delle controimmagini mediante f degli elementi appartenenti a $]1,2]$, cioè l'insieme:

$$X := f^{-1}\Big(]1,2]\Big) := \big\{x \in \mathbb{R} :\ 1 < \log(x^3 - 1) \leq 2\big\} \ ,$$

e determiniamone gli estremi, indicando se essi sono (eventualmente) minimo e massimo.

Innanzitutto notiamo che l'insieme X è costituito dalle soluzioni delle disequazioni:

$$1 < \log(x^3 - 1) \leq 2 \ ,$$

cosicché sembra opportuno cercare di esprimerlo esplicitamente provando a risolvere il problema. Le soluzioni delle disequazioni si trovano in corrispondenza dei numeri x che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 1 > 0 \\ \log(x^3 - 1) > 1 \\ \log(x^3 - 1) \geq 2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^3 > 1 \\ x^3 > 1 + \mathbf{e} \\ x^3 \leq 1 + \mathbf{e}^2 \end{cases}$$

il quale ha per soluzioni i numeri x che soddisfano le disuguaglianze:

$$\sqrt[3]{1 + \mathbf{e}} < x \leq \sqrt[3]{1 + \mathbf{e}^2} \ ;$$

pertanto possiamo scrivere esplicitamente:

$$X = \Big] \sqrt[3]{1 + \mathbf{e}}, \sqrt[3]{1 + \mathbf{e}^2} \Big] \ .$$

Da ciò e dalle **Osservazioni** 3 e 6 segue immediatamente che X ha:

$$\inf X = \sqrt[3]{1 + \mathbf{e}}$$
$$\sup X = \sqrt[3]{1 + \mathbf{e}^2}$$

e che X è privo di minimo e dotato di massimo, il massimo coincidendo con l'estremo superiore. ◇

`Esempio 3:` Proviamo che l'insieme immagine della funzione $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ definita mediante l'assegnazione:

$$f(x) := \frac{2x}{1 - x^2} \ ,$$

cioè l'insieme:

$$f\big(]-1,1[\big) := \left\{ \frac{2x}{1 - x^2},\ \text{con}\ -1 < x < 1 \right\} \ ,$$

non è limitato né inferiormente né superiormente.
Per fare ciò, a norma delle (inf.2') e (sup.2') basta provare che in corrispondenza di ogni $K > 0$ è possibile determinare due elementi $x'_K, x''_K \in]-1,1[$ tali che:

$$f(x'_K) < -K \quad \text{e} \quad f(x''_K) > K \ ;$$

ciò equivale a dire che, per ogni fissato valore del parametro $K > 0$, ognuna delle due disequazioni:

$$\frac{2x}{1 - x^2} < -K \quad \text{e} \quad \frac{2x}{1 - x^2} > K$$

ha almeno una soluzione in $]-1,1[$, ossia che i due sistemi:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{2x}{1-x^2} < -K \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{2x}{1-x^2} > K \end{cases}$$

hanno insiemi di soluzioni non vuoti. Mostriamo che ciò è vero per il primo, lasciando la disamina dell'altro al lettore come esercizio.

Dato che $1 - x^2 > 0$ per $x \in]-1, 1[$, la seconda disequazione del sistema è del tutto equivalente alla disequazione di secondo grado:

$$Kx^2 - 2x - K > 0$$

(che si ottiene liberando dai denominatori); dato che $K > 0$, quest'ultima è soddisfatta non appena $x < x_1 := \frac{1-\sqrt{K^2+1}}{K}$ oppure $x > x_2 := \frac{1+\sqrt{K^2+1}}{K}$, cosicché il primo sistema equivale a:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < \frac{1-\sqrt{K^2+1}}{K} \text{ oppure } x > \frac{1+\sqrt{K^2+1}}{K} \end{cases}$$

il quale ha insieme delle soluzioni non vuoto se e solo se almeno uno tra i numeri x_1 ed x_2 appartiene all'intervallo $]-1, 1[$. A questo punto è molto semplice constatare che solo x_1 appartiene a $]-1, 1[$: infatti, risultando $\sqrt{1+K^2} < \sqrt{(1+K)^2} = 1+K$ e $\sqrt{1+K^2} > 1$, si ha:

$$\begin{aligned} x_1 &> \frac{1-(1+K)}{K} = -1 \\ x_1 &< \frac{1-1}{K} = 0\ ; \end{aligned}$$

pertanto le soluzioni del sistema sono gli $-1 < x < x_1$ e basta scegliere x'_K tra esse per soddisfare la (inf.2') (ad esempio, si può scegliere $x'_K = \frac{x_1-1}{2}$).[1]

Esercizi

`Esercizio 1:` **1**. Determinare gli estremi degli insiemi:

(E.1) $$X_1 := \{n\pi + m\sqrt{2},\ \text{con } n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } -2 \le n < 2,\ -2 < m \le 3\}\ ,$$

(E.2) $$X_2 := \left\{\frac{(-1)^n}{n},\ \text{con } n \in \mathbb{N}\right\}\ ,$$

(E.3) $$X_3 := \{\arctan n,\ \text{con } n \in \mathbb{Z}\}\ ,$$

(E.4) $$X_4 := \left\{(-1)^n\, \frac{n-1}{n+1},\ \text{con } n \in \mathbb{N}\right\}\ ,$$

specificando se si tratta di minimo o massimo.

2. Cosa cambia in (E.1) se si considerano $n, m \in \mathbb{Q}$?

`Esercizio 2:` Trovare gli estremi dell'insieme delle immagini di:

(E.5) $$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \text{con } f_1(x) := \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

(E.6) $$f_2 :]0, 3] \to \mathbb{R} \quad , \text{con } f_2(x) := |x-2|\ ,$$

(E.7) $$f_3 :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad , \text{con } f_3(x) := \arctan \log x\ ,$$

specificando se si tratta di minimo o massimo.

---

[1] Notiamo che il calcolo esplicito è solo una delle vie possibili per giungere alla soluzione. Ad esempio, un'altra strada può essere la seguente.
Le due radici x_1 ed x_2 del polinomio $Kx^2 - 2x - K$ hanno somma $\frac{2}{K}$ e prodotto -1 (per le note relazioni tra coefficienti e radici di un polinomio di secondo grado); ciò implica che le radici hanno segno discorde (poiché il prodotto è negativo), che x_2 è maggiore del valore assoluto di x_1 (poiché la somma è positiva) e che il valore assoluto di x_1 ed x_2 sono situati da parti opposte rispetto all'unità (poiché il loro prodotto è uguale a 1); quindi è $-1 < x_1 < 0 < 1 < x_2$ e le soluzioni del sistema sono necessariamente gli $x \in]-1, x_1[$.

`Esercizio 3:` Siano:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &:= x^2 - 2x + 1 \ , \\
f_2(x) &:= \frac{x+1}{x-2} \ , \\
f_3(x) &:= \mathbf{e}^{x^2-1} - 1 \ , \\
f_4(x) &:= \sqrt{4 - x^2} \ , \\
f_5(x) &:= \cos 2x - \sqrt{3}\ \sin 2x \ .
\end{aligned}
$$

Scrivere esplicitamente gli insiemi:

$$
\begin{aligned}
X_k &:= f_k^{-1}([0, +\infty[) \ , \\
Y_k &:= f_k^{-1}\Big([-2, 1[\Big) \ ,
\end{aligned}
$$

determinandone gli estremi e specificando se si tratta di minimo o massimo.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: `guglielmo.dimeglio@unina.it`