SULL'ASSIOMA DI COMPLETEZZA

G. DI MEGLIO

Introduzione

In questi fogli discutiamo due questioni.
La prima è l'equivalenza delle formulazioni dell'Assioma di Completezza date a lezione e presenti sul testo di riferimento.
La seconda, più fine, riguarda l'esistenza di insiemi numerici che soddisfano gli assiomi (A.1) – (A.6) ed (O.1) – (O.3) ma sono distinti dal campo reale poiché non soddisfano l'Assioma di Completezza. In tal modo apparirà chiaramente che gli assiomi dell'algebra (**Gruppo 1**) e dell'ordine (**Gruppo 2**) non bastano *da soli* ad individuare $\mathbb{R}$.

1. Formulazioni dell'Assioma di Completezza e loro equivalenza

Come detto a lezione, vale in $\mathbb{R}$ lo:

Assioma di Completezza
L'insieme dei maggioranti di ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ha minimo,

che abbiamo denotato con il simbolo (C); abbiamo altresì accennato, senza scendere nel dettaglio, al fatto che tale assioma si può formulare equivalentemente come segue:

Assioma di Completezza (Versione Duale)
L'insieme dei minoranti di ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ha massimo

denotando quest'ultima affermazione con (C′). Sul testo [MS] sono presenti due ulteriori versioni del medesimo assioma, cioè:

Assioma di Completezza (Esistenza di Numeri Separatori)
Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono sottoinsiemi non vuoti e separati, ossia tali che:

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B, \quad a \leq b\ ,$$

esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B, \quad a \leq c \leq b\ .$$ [1]

Assioma di Completezza (Proprietà di Dedekind[2])
Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono sottoinsiemi non vuoti, separati e tali che:

$$A \cap B = \emptyset \quad e \quad A \cup B = \mathbb{R}\ ,$$ [3]

Date: 28 dicembre 2017.

[1] Un tale elemento c è detto *elemento separatore di A e B*.

[2] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), matematico tedesco.

esiste un unico numero $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B, \quad a \le c \le b\,.$$

Osservazione 1: Tutte le versioni dell'Assioma di Completezza fin qui enunciate possono essere interpretate geometricamente sfruttando la solita rappresentazione dei reali sulla retta numerica.
Ad esempio, la (C) equivale al fatto che la semiretta destra che contiene tutti i maggioranti di un dato insieme limitato superiormente ha un punto d'origine sull'asse reale.
La Proprietà di Dedekind, invece, equivale a dire che spezzando l'asse reale in due semirette con verso opposto, esse hanno l'origine in comune in un punto dell'asse.⧫

Nonostante le differenze formali, le quattro formulazioni dell'Assioma di Completezza sono sostanzialmente *equivalenti* per la costruzione del campo reale, poiché ognuna di esse vale se e solo se vale una qualsiasi delle altre. In altri termini, sussiste il seguente risultato:

Teorema 1
*Le formulazioni dell'*Assioma di Completezza *sono equivalenti.*

Dimostrazione. La (C) implica la (C′). Si veda [DM, Oss. 5].

La (C′) implica l'Esistenza di Numeri Separatori. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e separati, con B insieme dei maggioranti. Dato che B è limitato inferiormente ed evidentemente risulta $A \subseteq \mathcal{L}(B)$. Ma allora il massimo di $\mathcal{L}(B)$, cioè $\inf B$, è un numero separatore di A e B.

L'Esistenza di Numeri Separatori implica la Proprietà di Dedekind. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti, separati e tali che $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \emptyset$; supponiamo, come al solito, che B sia l'insieme dei maggioranti.
Per ipotesi, esiste qualche numero c separatore di A e B: rimane da provare che di numero separatore ce n'è uno solo. Per fare ciò, come al solito, scegliamo un altro c' separatore di A e B e mostriamo che $c' = c$. *Per assurdo*, supponiamo che $c < c'$: per le proprietà di A e B, o si ha $c' \in A$ oppure $c' \in B$; ma se fosse $c' \in A$, il numero c non potrebbe separare A e B, quindi è necessariamente $c' \in B$; analogamente, deve essere $c \in A$. Consideriamo allora il numero $\frac{1}{2}(c + c')$: esso, evidentemente, soddisfa $c < \frac{1}{2}(c + c') < c'$ e però non può appartenere né ad A (poiché altrimenti c non separerebbe A e B) né a B (poiché altrimenti c' non separerebbe A e B). **Ma ciò è assurdo**, poiché $A \cup B = \mathbb{R}$ cosicché $\frac{1}{2}(c + c')$ appartiene ad almeno uno degli insiemi A o B. Dunque non può essere $c < c'$; analogamente si esclude il caso $c' < c$, quindi è necessariamente $c' = c$.

La Proprietà di Dedekind implica (C). Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente. Chiamiamo $\mathcal{M}(X)$ l'insieme dei suoi maggioranti e poniamo $\mathcal{M}' := \mathbb{R} - \mathcal{M}(X)$. Chiaramente gli insiemi $\mathcal{M}'$ ed $\mathcal{M}(X)$ sono separati e risulta $\mathcal{M}' \cup \mathcal{M}(X) = \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}(X) = \emptyset$, cosicché $\mathcal{M}'$ ed $\mathcal{M}(X)$ costituiscono una sezione del campo reale. Per la Proprietà di Dedekind, esiste un unico numero c separatore di $\mathcal{M}'$ ed $\mathcal{M}(X)$: vogliamo provare che $c = \min \mathcal{M}(X)$. Per fare ciò basta mostrare che $c \in \mathcal{M}(X)$, poiché la disuguaglianza $c \le b$ per ogni $b \in \mathcal{M}(X)$ è soddisfatta per costruzione.

[3] Una coppia di sottoinsiemi separati che gode di questa proprietà viene usualmente detta *sezione del campo reale*.

Supponiamo, *per assurdo*, che c non sia un maggiorante di X: in tal caso, esiste un $x \in X$ tale che $c < x$ e perciò risulta $c < \frac{1}{2}(c+x) < x$; allora il numero $\frac{1}{2}(c+x)$ non è un maggiorante di X, ossia $\frac{1}{2}(c+x) \in \mathcal{M}'$. **Ma ciò è assurdo**, poiché c non sarebbe un numero separatore di $\mathcal{M}'$ e di $\mathcal{M}(X)$. □

Osservazione 2: Un'ulteriore formulazione dell'Assioma di Completezza, equivalente alle precedenti, è la seguente:

Assioma di Completezza (Proprietà di Cantor[4])
Se $I_n = (a_n, b_n)$*, con* $n \in \mathbb{N}$*, sono intervalli non vuoti,* inscatolati*, cioè tali che:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subseteq I_n \ ,$$

e tali che:

$$\inf\{b_n - a_n,\ \mathit{con}\ n \in \mathbb{N}\} = 0 \ ,$$

allora esiste un unico elemento $c \in \mathbb{R}$ *che appartiene ad ognuno degli intervalli* I_n*, ossia tale che:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c \in I_n \ .$$

Tale proprietà esprime un fatto geometrico intuitivo: se si ha una famiglia di segmenti dell'asse reale, ognuno dei quali contenuto nel precedente, le cui ampiezze divengono via via più prossime a zero, c'è un unico punto sulla retta che appartiene ad ogni segmento. ♦

2. Il Campo Razionale $\mathbb{Q}$

Consideriamo l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.
Come noto, esso ha per elementi le frazioni $\frac{n}{m}$, con numeratore $n \in \mathbb{Z}$ e denominatore $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, identificate mediante l'usuale *relazione di uguaglianza tra frazioni*[5]:

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \quad \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \quad n \cdot q = p \cdot m \tag{1}$$

(l'uguaglianza al secondo membro essendo quella usuale tra numeri interi).
Ponendo:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{n}{m}, \frac{p}{q}\right) &\mapsto \frac{nq + pm}{mq} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \left(\frac{n}{m}, \frac{p}{q}\right) &\mapsto \frac{np}{mq} \end{aligned} \tag{3}$$

[4] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), matematico tedesco iniziatore della Teoria degli Insiemi.

[5] Lo studioso lettore farà un utile esercizio verificando che la relazione d'uguaglianza tra frazioni è una *relazione d'equivalenza*, i.e. che essa gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

rimangono definite le usuali operazioni di somma e prodotto tra frazioni[6], le quali (come noto dalle scuole e come dimostrabile con un po' di pazienza) godono di tutte le proprietà richieste dagli assiomi del **Gruppo 1**.

Osservazione 3: L'insieme $\mathbb{Q}$ contiene un sottoinsieme Z "identificabile" con l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$, cioè l'insieme delle frazioni (equivalenti a quelle) aventi denominatore $m = 1$.
Pertanto, d'ora in avanti riterremo (come d'uso comune) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. ♦

D'altra parte, ponendo:

$$\frac{n}{m} \leq \frac{p}{q} \quad \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \quad n \cdot q \leq p \cdot m \tag{4}$$

(la disuguaglianza al secondo membro essendo quella usuale tra numeri interi) rimane definita una relazione d'ordine in $\mathbb{Q}$ la quale gode (come noto e come dimostrabile con un po' di pazienza) di tutte le proprietà richieste dal **Gruppo 2**.[7]
Pertanto gli assiomi dei primi due gruppi individuano, oltre ad $\mathbb{R}$, anche il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Osservazione 4: Vale la pena di osservare che tutte le usuali regole di calcolo valide per i numeri reali valgono anche per le frazioni, giacché esse possono essere dedotte dagli assiomi dei **Gruppi 1** e **2**, validi in $\mathbb{Q}$ come in $\mathbb{R}$.
Inoltre, si trasportano in $\mathbb{Q}$ le definizioni di maggiorante, minorante, massimo, minimo, insieme limitato inferiormente ed insieme limitato superiormente già date in $\mathbb{R}$. ♦

Oltre a quelle che sono immediate conseguenze degli assiomi, l'insieme $\mathbb{Q}$ condivide con $\mathbb{R}$ anche altre proprietà: ad esempio la seguente è di facile verifica:

Proposizione 1 (Densità di $\mathbb{Q}$ in sé)
Scelti due numeri razionali $\frac{n}{m} < \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *esiste almeno un* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *tale che:*

$$\frac{n}{m} < \frac{a}{b} < \frac{p}{q} \, .$$

Dimostrazione. Basta determinare esplicitamente $\frac{a}{b}$ sfruttando $\frac{p}{q}$ ed $\frac{n}{m}$.
Non è difficile constatare che il numero:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m} + \frac{p}{q}\right) \\ &= \frac{nq + pm}{2mq} \end{aligned}$$

---

[6]Notiamo che le due operazioni sono *ben definite*, nel senso che se esse vengono calcolate su coppie di frazioni a due a due equivalenti rispetto all'uguaglianza tra frazioni, allora anche i risultati sono equivalenti rispetto all'uguaglianza tra frazioni. In altri termini, prese due coppie di frazioni $(\frac{n}{m}, \frac{p}{q})$ ed $(\frac{n'}{m'}, \frac{p'}{q'})$, se $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ e $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ nel senso della (1), allora risulta pure $\frac{nq+pm}{mq} = \frac{n'q'+p'm'}{m'q'}$ e $\frac{np}{mq} = \frac{n'p'}{m'q'}$ nel senso della (1). Pertanto, il risultato delle operazioni di somma e prodotto "non dipende" dalla rappresentazione frazionaria scelta per i due addendi o fattori.

[7]Notiamo che se $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ e $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ nel senso della (1), allora si ha $n \cdot q = n' \cdot q'$ e $p \cdot m = p' \cdot m'$; pertanto risulta $\frac{n}{m} \leq \frac{p}{q}$ se e solo se $\frac{n}{m} \leq \frac{p}{q}$. In altri termini, la relazione d'ordine tra due numeri razionali "non dipende" dalla rappresentazione frazionaria scelta.

gode della proprietà richiesta: infatti, dato che per ipotesi $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$, abbiamo $nq < pm$ e dunque:

$$\begin{aligned} nq + pm < pm + pm \quad &\Rightarrow \quad nq + pm < 2mp \\ &\Rightarrow \quad (nq + pm) \cdot q < 2mp \cdot q \\ &\Rightarrow \quad (nq + pm) \cdot q < p \cdot 2mq \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{nq + pm}{2mq} < \frac{p}{q} \ ; \end{aligned}$$

analogo discorso si fa per provare la disuguaglianza $\frac{n}{m} < \frac{a}{b}$. □

Nel resto di questi fogli ci occuperemo di dimostrare che $\mathbb{Q}$, a differenza di $\mathbb{R}$, *non* soddisfa la:

Proprietà di Completezza
L'insieme dei maggioranti di ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoto limitato superiormente è dotato di minimo.

Per fare ciò basta individuare esplicitamente un insieme $X \subseteq \mathbb{Q}$ limitato superiormente il cui insieme dei maggioranti non sia dotato di minimo.

3. Esistenza di un Sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ Limitato Superiormente il cui Insieme dei Maggioranti non ha Minimo

Consideriamo i tre insiemi:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_- &:= \{r \in \mathbb{Q} : \ r < 0\} \ , \\ A &:= \left\{r \in \mathbb{Q} : \ r \geq 0 \text{ e } r^2 < 2\right\} \ , \\ B &:= \left\{r \in \mathbb{Q} : \ r \geq 0 \text{ e } r^2 \geq 2\right\} \ . \end{aligned}$$

Evidentemente, i tre insiemi sono a due a due disgiunti ed ogni numero razionale appartiene ad uno ed uno solo di essi; inoltre, si vede che ogni elemento $b \in B$ è maggiore di ogni elemento $a \in \mathbb{Q}_- \cup A$: infatti, la cosa è banale se $a \in \mathbb{Q}_-$, mentre se supponessimo *per assurdo* che un $a \in A$ risultasse $a \geq b$, avremmo $a^2 \geq b^2 \geq 2$, contro il fatto che $a^2 < 2$.
Posto:

$$X := \mathbb{Q}_- \cup A \ ,$$

di modo che X contene tutti i razionali negativi e quelli non negativi il cui quadrato è minore di 2, vogliamo provare la:

Proposizione 2
X è un sottoinsieme limitato superiormente in $\mathbb{Q}$ il cui insieme dei maggioranti $\mathcal{M}(X)$ è privo di minimo in $\mathbb{Q}$.

Per fare ciò, dimostriamo preliminarmente alcuni lemmi:

Lemma 1
Non esiste alcun razionale $r > 0$ tale che $r^2 = 2$.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che un tale $r = p/q$ esista. Possiamo sempre pensare che la frazione p/q sia già *ridotta ai minimi termini* (poiché se così non fosse basterebbe semplificare gli eventuali fattori comuni) e con numeratore e denominatore positivi (altrimenti, bastarebbe cambiare i segni).
Abbiamo:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2 \ ,$$

di modo che p^2 deve essere un numero pari; ma ciò accade solamente se p stesso è un numero pari, ossia se $p = 2n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Allora avremmo:

$$2q^2 = 4n^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2n^2 \ ,$$

di modo che q^2 è pari; ma ciò accade se e solo se q stesso è un numero pari, cioè se $q = 2m$ con $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. **Ma ciò è assurdo**, poiché p e q avrebbero in comune il fattore 2, contro l'ipotesi sulla natura della frazione p/q. □

Osservazione 5 (Numeri Irrazionali)**:** Il risultato appena acquisito, già noto a Pitagora[8] ed ai matematici della sua scuola, si esprime usualmente dicendo che *il numero reale* $\sqrt{2}$ *è irrazionale.*
In generale, vengono detti *numeri irrazionali* tutti quei numeri reali che non possono essere rappresentati usando frazioni. Esempi importanti di numeri irrazionali sono π, **e** e la costante γ di Eulero-Mascheroni. ♦

Osservazione 6: Il Lemma 1 implica che la disuguaglianza $r^2 \geq 2$ presente nelle proprietà caratteristiche degli elementi di B è sempre stretta; in altre parole, si ha $r \in B$ se e solo se $r \geq 0$ e $r^2 > 2$. ♦

Lemma 2
Per ogni $x \in X$ *è possibile determinare* $x' \in X$ *tale che:*

$$x < x' \ .$$

Analogamente, per ogni $b \in B$ *è possibile determinare* $b' \in B$ *tale che:*

$$b' < b \ .$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in X$.
Se x è negativo, basta prendere $x' = 0$; quindi possiamo supporre $x \geq 0$, di modo che $x^2 < 2$.
In tale ipotesi, consideriamo il numero $x' = x + 1/n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, che è maggiore di x e domandiamoci se è possibile determinare n in modo che $x' \in X$. Chiaramente è $x' > 0$, dunque affinché $x' \in X$ occorre e basta verificare che $(x')^2 < 2$: essendo:

$$\begin{aligned}(x')^2 &= \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= x^2 + (2x+1) \cdot \frac{1}{n}\end{aligned}$$

si ha $(x')^2 < 2$ non appena si scelga $n > \frac{2x+1}{2-x^2}$; dato che $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, questa scelta è sempre possibile, e ciò importa $x' \in X$.

La dimostrazione nel caso di B si fa allo stesso modo, ma ricercando il numero b' nella forma $b - 1/n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Chiaramente $b' < b$ per ogni n e perciò basta capire se è possibile scegliere n in modo che siano soddisfatte entrambe le condizioni di appartenenza a B, i.e. $b - 1/n \geq 0$ e $(b - 1/n)^2 \geq 2$.

[8] Pitagora da Samo (circa 575 a.C. – 495 a.C.), filosofo e matematico greco.

Affinché sia soddisfatta la prima c'è bisogno che $n \geq 1/b$;[9] d'altra parte, abbiamo:

$$\begin{aligned}\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 &= b^2 - 2b \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &> b^2 - 2b \cdot \frac{1}{n}\,,\end{aligned}$$

cosicché $(b - 1/n)^2 > 2$ non appena $b^2 - 2b \cdot 1/n \geq 2$, cioè non appena si scelga $n \geq \frac{2b}{b^2-2}$;[10] conseguentemente per avere $b - 1/n \in B$ basta scegliere $n > \max\{1/b, 2b/(b^2 - 2)\}$, cosa che si può sempre fare per il solito motivo. □

Lemma 3
L'insieme X è privo di massimo e l'insieme B è privo di minimo.

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che non esiste alcun elemento $M \in X$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in X$.
Per assurdo, supponiamo che M sia il massimo di X, di modo che $M \in X$ e $x \leq M$ per ogni $x \in X$. Considerato l'elemento $M \in X$, per il Lemma precedente, esiste un elemento $M' \in X$ tale che $M < M'$; **ma ciò è assurdo**, poiché dovrebbe risultare pure $M' \leq M$ per definizione di massimo, e dunque $M < M$ per proprietà transitiva.
Il discorso per provare che B è privo di minimo è del tutto analogo. □

Lemma 4
X è limitato superiormente ed $\mathcal{M}(X) = B$, ossia l'insieme dei maggioranti di X coincide con B.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per quanto detto all'inizio sugli insiemi $\mathbb{Q}_-$, A e B, ogni elemento $b \in B$ è un maggiorante di X; quindi X è limitato superiormente e $B \subseteq \mathcal{M}(X)$.
D'altra parte, dato che $X \cap B = \emptyset$ e $X \cup B = \mathbb{Q}$, l'unico maggiorante di X che può non cadere in B è l'eventuale massimo di X; dato che X è privo di massimo, si ha $\mathcal{M}(X) \subseteq B$ e dunque $\mathcal{M}(X) = B$. □

Concludiamo fornendo la:

Dimostrazione della Proposizione 2. Per il Lemma 4 l'insieme X è limitato superiormente e B è l'insieme dei suoi maggioranti; d'altra parte, per il Lemma 3 l'insieme B è privo di minimo in $\mathbb{Q}$. □

Esercizi

`Esercizio 1:` Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo.

1. Provare che non esiste alcun numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = p$.

2. Generalizzare il punto **1**. Dimostrare che per ogni indice $n \in \mathbb{N}$ maggiore di 1 non esiste alcun numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^n = p$.

3. Generalizzare il punto **1**. Mostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ che non è *quadrato perfetto* non esiste alcun $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = m$.

[9] Si noti che ogni $b \in B$ è strettamente positivo, poiché $0^2 = 0 < 2$ dunque $0 \notin B$.
[10] Si noti che $b^2 > 2$, cosicché è lecito dividere per $b^2 - 2$.

4. Generalizzare ulteriormente. Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ maggiore di 1 e per ogni $m \in \mathbb{N}$ che non è una *potenza n-esima perfetta*, non esiste alcun $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^n = m$.

`Esercizio 2:` Siano $n, m \in \mathbb{N}$.
Mostrare che se $\sqrt{m}$ è un numero reale *irrazionale* (i.e., se non esiste alcun $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = m$), allora il numero $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ è anch'esso irrazionale.

[`Suggerimento`: *Per assurdo*, supporre che esista $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r = \sqrt{m} + \sqrt{n}$; allora $r^2 = m + 2\sqrt{m}\sqrt{n} + n = m - n + 2r\sqrt{n}$; **ma ciò è assurdo**, perché…]

Riferimenti bibliografici

[DM] Di Meglio, G. (2017) *Estremi di Insiemi Numerici* [reperibile nella cartella `Materiale Didattico` al seguente URL: www.docenti.unina.it/guglielmo.di_meglio].

[MS] Marcellini, P. & Sbordone, C. (1998) **Analisi Matematica Uno**, Liguori, Napoli.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80,
80126 Napoli – ITALY
email: `guglielmo.dimeglio@unina.it`