SULLE REGOLE DI CALCOLO IN $\mathbb{R}$

G. DI MEGLIO

Indice

Introduzione

Come già detto a lezione, gli assiomi che individuano il campo reale $\mathbb{R}$ sono sufficienti a dimostrare tutte le *regole di calcolo* che usualmente si utilizzano per far di conto coi numeri reali.
Qui di seguito ricordiamo le più comuni e ne forniamo la dimostrazione; inoltre, esortiamo lo studioso lettore a tentare di dimostrare tutte quelle regole di calcolo che gli sono familiari e che, per dimenticanza, sono state omesse dalle presenti note.

1. Regole Algebriche

Innanzitutto, richiamiamo gli assiomi del **Gruppo 1**:

Assiomi dell'Algebra
Esistono due operazioni + e ·, cioè due funzioni definite in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, che soddisfano le seguenti proprietà:

(A.1) *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad x + y = y + x$ *e* $x \cdot y = y \cdot x$

(A.2) *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$ *e* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(A.3) *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(A.4) *esistono* $0, 1 \in \mathbb{R}$ *tali che* $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = x$ *e* $x \cdot 1 = x$

(A.5) *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *esiste un* $-x \in \mathbb{R}$ *tale che* $x + (-x) = 0$

(A.6) *per ogni* $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ *esiste un* $x^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$ *tale che* $x \cdot x^{-1} = 1$.[1]

Date: 28 dicembre 2017.

[1]Ricordiamo al lettore la terminologia introdotta a lezione (e peraltro già nota dalle scuole dell'obbligo).
Le proprietà espresse dalle (A.1) si chiamano *proprietà commutativa della somma* e *del prodotto*.
Quelle espresse dalle (A.2) si chiamano *proprietà associativa della somma* e *del prodotto*.
La proprietà espressa dalla (A.3) è detta *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*.
Gli elementi 0 ed 1 la cui esistenza è predicata in (A.4) vengono, rispettivamente, detti *elemento neutro rispetto alla somma* e *rispetto al prodotto*.
Il numero $-x$ di cui in (A.5) si chiama *opposto di* x.
Il numero x^{-1} di cui in (A.6) è detto *reciproco di* x.

Osservazione 1: L'assioma (A.1) (cioè la proprietà commutativa di entrambe le operazioni) garantisce che le uguaglianze di cui agli assiomi (A.3) – (A.6) valgono *a meno dell'ordine dei fattori*; in altri termini è anche vero che:

$$\begin{aligned} (x+y)\cdot z &= x\cdot z + y\cdot z \\ 0+x = x \quad &\text{e} \quad x\cdot 1 = x \\ (-x)+x &= 0 \\ x^{-1}\cdot x &= 1\ . \end{aligned}$$

Sarà lasciato al lettore il compito di capire quali tra le regole enunciate nel seguito possano essere manipolate usando la proprietà commutativa. ♦

Osservazione 2 (Unicità degli Elementi Neutri)**:** Gli elementi 0 ed 1 neutri, rispettivamente, per la somma e per il prodotto sono anche unici.
Per provare ciò nel caso dell'unità si può ragionare come segue. Supponiamo che $1' \in \mathbb{R}$ sia un altro elemento tale che $1'\cdot x = x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e mostriamo che è necessariamente $1' = 1$. Sfruttando il fatto che sia 1 sia $1'$ sono neutri rispetto al prodotto e quanto notato nell'Osservazione 1 otteniamo:

$$1' = 1'\cdot 1 = 1\ ,$$

come volevamo. *Mutatis mutandis*, lo stesso ragionamento funziona per provare l'unicità di 0. ♦

Osservazione 3 ($0\neq 1$!!!)**:** Dagli assiomi non traspare immediatamente, ma gli elementi neutri rispetto alle due operazioni $+$ e $\cdot$ sono distinti, cioè risulta $0\neq 1$. Questa è un'immediata conseguenza della definizione della relazione d'ordine, come vedremo più avanti (cfr. Osservazione 11). ♦

Osservazione 4 (Unicità dell'Opposto e del Reciproco)**:** Anche gli elementi $-x$ ed x^{-1}, la cui esistenza è postulata negli assiomi (A.5) & (A.6), sono unici.
Proviamo ciò per il reciproco. Supponiamo che, in corrispondenza fissato $x\neq 0$, esista un altro elemento $x'\in\mathbb{R}-\{0\}$ tale che $x'\cdot x = 1$ e mostriamo che è necessariamente $x' = x^{-1}$. Sfruttando la definizione di reciproco, la proprietà (A.1) e quanto detto nell'Osservazione 1 troviamo:

$$\begin{aligned} x' &= x'\cdot 1 \\ &\overset{(A.6)}{=} x'\cdot(x\cdot x^{-1}) \\ &\overset{(A.2)}{=} (x'\cdot x)\cdot x^{-1} \\ &\overset{(A.6)}{=} 1\cdot x^{-1} \\ &= x^{-1}\ , \end{aligned}$$

come volevamo. *Mutatis mutandis*, lo stesso ragionamento funziona per provare l'unicità dell'opposto. ♦

Dagli assiomi ora elencati possiamo trarre le familiarissime regole di calcolo compendiate qui sotto:

Teorema 1
Siano $x,y\in\mathbb{R}$.

Valgono i seguenti fatti:

(1) $-0 = 0 \quad e \quad 1^{-1} = 1$

(2) $-(-x) = x$

(3) $-(x+y) = (-x) + (-y)$

(4) $x = y$ *se e solo se per ogni* $z \in \mathbb{R}$ *si ha* $x + z = y + z$

(5) $x \cdot 0 = 0$

(6) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y \quad e \quad -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$

(7) $-x = (-1) \cdot x$

(8) *se* $x \neq 0$*, allora* $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$

(9) $x = y$ *se e solo se per ogni* $z \neq 0$ *si ha* $x \cdot z = y \cdot z$

(10) $x \cdot y = 0$ *se e solo se* $x = 0$ *oppure* $y = 0$

(11) *se* $x, y \neq 0$*, allora* $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

Osservazione 5: L'implicazione $\Leftarrow$ nella regola (4) è la cosiddetta *Regola di Semplificazione della Somma.*
L'implicazione $\Leftarrow$ nelle regole (9) è la cosiddetta *Regola di Semplificazione del Prodotto.*
La regola (10) è chiamata *Legge di Annullamento del Prodotto*: essa solitamente è enunciata come segue:

> «Un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei suoi fattori è nullo».

♦

Dimostrazione. Dimostriamo la (1). Dato che per (A.4) si ha:

$$0 + 0 = 0 \quad \text{e} \quad 1 \cdot 1 = 1 ,$$

è evidente che 0 gode della proprietà (A.5) rispetto a se stesso e che 1 gode della proprietà (A.6) rispetto a se stesso; pertanto 0 coincide col suo opposto ed 1 coincide col suo reciproco, come volevamo.

Dimostriamo la (2). Mostrare vera la (2) equivale a mostrare che l'elemento x è l'(unico) opposto di $-x$, ossia che esso soddisfa la relazione:

$$(-x) + x = 0 ;$$

ma tale relazione è senz'altro soddisfatta, per l'assioma (A.5). Conseguentemente $x = -(-x)$, come chiedevamo.

Dimostriamo la (3). Mostrare la prima delle (3) equivale a far vedere che l'elemento $(-x) + (-y)$ è l'(unico) opposto di $x + y$, cioè che esso soddisfa la relazione:

$$(x + y) + \big((-x) + (-y)\big) = 0 .$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}(x+y)+\big((-x)+(-y)\big) &\overset{(A.1)}{=} (y+x)+\Big(\big((-x)+(-y)\big)\Big)\\ &\overset{(A.2)}{=} y+\Big(\big(x+(-x)\big)+(-y)\Big)\\ &\overset{(A.5)}{=} y+\big(0+(-y)\big)\\ &\overset{(A.4)}{=} y+(-y)\\ &\overset{(A.5)}{=} 0\,,\end{aligned}$$

come volevamo.

Dimostriamo le (4). L'implicazione $\Rightarrow$ di (4) è immediata conseguenza della definizione di uguaglianza, quindi basta dimostrare la $\Leftarrow$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}x+z=y+z \quad &\overset{(4,\Rightarrow)\text{ e }(A.5)}{\Rightarrow} \quad (x+z)+(-z)=(y+z)+(-z)\\ &\overset{(A.2)}{\Rightarrow} \quad x+\big(z+(-z)\big)=y+\big(z+(-z)\big)\\ &\overset{(A.5)}{\Rightarrow} \quad x+0=y+0\\ &\overset{(A.4)}{\Rightarrow} \quad x=y\,,\end{aligned}$$

come volevamo.

Dimostriamo la (5). Abbiamo:

$$\begin{aligned}x\cdot 0 &\overset{(A.4)}{=} x\cdot(0+0)\\ &\overset{(A.3)}{=} x\cdot 0+x\cdot 0\end{aligned}$$

quindi $x\cdot 0 = x\cdot 0 + x\cdot 0$ per la proprietà transitiva dell'uguaglianza. Dalla (4) e da (A.4) segue:

$$\begin{aligned}x\cdot 0 = x\cdot 0+x\cdot 0 &\overset{(A.4)}{\Rightarrow} 0+x\cdot 0 = x\cdot 0+x\cdot 0\\ &\overset{(4)}{\Rightarrow} 0 = x\cdot 0\,,\end{aligned}$$

che, per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, è proprio quanto volevamo.

Dimostriamo la (6). Per mostrare la prima uguaglianza dobbiamo mostrare che l'elemento $(-x)\cdot y$ gode delle proprietà:

$$x\cdot y+(-x)\cdot y = 0\,.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}x\cdot y+(-x)\cdot y &\overset{(A.3)}{=} \big(x+(-x)\big)\cdot y\\ &\overset{(A.5)}{=} 0\cdot y\\ &\overset{(5)}{=} 0\,,\end{aligned}$$

pertanto $-(x\cdot y) = (-x)\cdot y$. La dimostrazione dell'altra uguaglianza è del tutto analoga ed è lasciata al lettore.

Dimostriamo la (7). Fissato $x \in \mathbb{R}$, occorre e basta mostrare che $(-1)\cdot x$ è l'opposto di x, cioè che risulta $x + (-1)\cdot x = 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} x + (-1)\cdot x &\overset{(A.4)}{=} 1\cdot x + (-1)\cdot x \\ &\overset{(A.3)}{=} \big(1 + (-1)\big)\cdot x \\ &\overset{(A.5)}{=} 0\cdot x \\ &\overset{(5)}{=} 0\ , \end{aligned}$$

dunque $(-1)\cdot x$ è l'opposto di x, ossia vale la (7).

Dimostriamo la (8). Scelto $x \neq 0$, provare l'uguaglianza $(x^{-1})^{-1} = x$ significa mostrare che x^{-1} è diverso da zero e che l'elemento x è il reciproco di x^{-1}, ossia che esso gode della proprietà:

$$x^{-1}\cdot x = 1\ .$$

Ma tanto il fatto che x^{-1} sia diverso da zero tanto l'uguaglianza di cui sopra sono senz'altro soddisfatte, a causa dell'assioma (A.6) e di (A.1); conseguentemente $(x^{-1})^{-1} = x$.

Dimostriamo la (9). L'implicazione $\Rightarrow$ di (9) è un'immediata conseguenza della definizione di uguaglianza, quindi basta dimostrare le $\Leftarrow$. Per la $\Rightarrow$ di (9), fissato ad arbitrio $z \neq 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} x\cdot z = y\cdot z \quad &\overset{(8,\Rightarrow),\,(A.6)}{\Rightarrow} \quad (x\cdot z)\cdot z^{-1} = (y\cdot z)\cdot z^{-1} \\ &\overset{(A.2)}{\Rightarrow} \quad x\cdot(z\cdot z^{-1}) = y\cdot(z\cdot z^{-1}) \\ &\overset{(A.6)}{\Rightarrow} \quad x\cdot 1 = y\cdot 1 \\ &\overset{(A.4)}{\Rightarrow} \quad x = y\ , \end{aligned}$$

come volevamo.

Dimostriamo la (10). L'implicazione $\Leftarrow$ è un'immediata conseguenza della regola (5): infatti, se $x = 0$ allora $x\cdot y = 0\cdot y \overset{(5)}{=} 0$ ed analogamente se $y = 0$.
Mostriamo allora che vale l'implicazione $\Rightarrow$, cioè che se $x\cdot y = 0$ allora almeno uno tra x ed y è nullo. Procediamo *per assurdo*: supponiamo che $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e mostriamo che ciò genera una contraddizione.
Dato che $y \neq 0$, y è dotato di reciproco per l'assioma (A.6) e perciò abbiamo:

$$\begin{aligned} x\cdot y = 0 &\overset{(9)}{\Rightarrow} (x\cdot y)\cdot y^{-1} = 0\cdot y^{-1} \\ &\overset{(A.2),\,(5)}{\Rightarrow} x\cdot(y\cdot y^{-1}) = 0 \\ &\overset{(A.6)}{\Rightarrow} x\cdot 1 = 0 \\ &\overset{(A.4)}{\Rightarrow} x = 0\ , \end{aligned}$$

contro il fatto che $x \neq 0$!
Perciò non è possibile avere contemporaneamente $x\cdot y = 0$ e $x, y \neq 0$, dunque almeno uno tra x ed y deve essere nullo se $x\cdot y$ è nullo.

Dimostriamo la (11). Presi $x, y \neq 0$ il prodotto $x\cdot y$ è diverso da zero e, per l'assioma (A.6), esso è dotato di reciproco. Vogliamo adesso stabilire che $(x\cdot y)^{-1} = x^{-1}\cdot y^{-1}$, cioè che il numero $x^{-1} \cdot y^{-1}$ gode della proprietà:

$$(x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) = 1 \ .$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) &\overset{(A.1)}{=} (y \cdot x) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) \\
&\overset{(A.2)}{=} y \cdot \big(x \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1})\big) \\
&\overset{(A.2)}{=} y \cdot \big((x \cdot x^{-1}) \cdot y^{-1}\big) \\
&\overset{(A.6)}{=} y \cdot \big(1 \cdot y^{-1}\big) \\
&\overset{(A.4)}{=} y \cdot y^{-1} \\
&\overset{(A.6)}{=} 1 \ ,
\end{aligned}$$

come volevamo. □

Osservazione 6: Introducendo le usuali convenzioni:

$$\begin{aligned}
x - y &\overset{\text{DEF}}{=} x + (-y) && , \text{per } x, y \in \mathbb{R} \\
\frac{x}{y} &\overset{\text{DEF}}{=} x \cdot y^{-1} && , \text{per } x \in \mathbb{R} \text{ ed } y \in \mathbb{R} - \{0\} \ ,
\end{aligned}$$

le regole (3), (8), (11) assumono la forma:

$$-(x + y) = -x - y \tag{4}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x \tag{9}$$

$$\frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \tag{13}$$

certamente più familiare al lettore. ♦

Osservazione 7: Combinando opportunamente gli assiomi con le regole elencate nel Teorema 1, non è difficile dimostrare altre regole di calcolo.
Ad esempio, l'usuale *Regola di Semplificazione delle Frazioni*:

$$\text{per ogni } y, z \neq 0 \text{ si ha } \frac{x \cdot z}{y \cdot z} = \frac{x}{y}$$

si può di mostrare come segue.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{x \cdot z}{y \cdot z} &= (x \cdot z) \cdot (y \cdot z)^{-1} \\
&\overset{(11)}{=} (x \cdot z) \cdot z^{-1} \cdot y^{-1} \\
&\overset{(A.2)}{=} x \cdot (z \cdot z^{-1}) \cdot y^{-1} \\
&\overset{(A.6)}{=} x \cdot 1 \cdot y^{-1} \\
&\overset{(A.4)}{=} x \cdot y^{-1} \\
&= \frac{x}{y} \ .
\end{aligned}$$

□

Oppure, il fatto evidente che:

$$\frac{1}{-1} = -1 \ ,$$

equivalente alla relazione $(-1)^{-1} = -1$, si può dimostrare come segue.

> *Dimostrazione.* Partendo dall'assioma (A.6) ed usando (2) ed (6) otteniamo:
>
> $$\begin{aligned} -1 = 1 \cdot (-1) \quad &\Rightarrow \quad -(-1) = -\big(1 \cdot (-1)\big) \\ &\Rightarrow \quad 1 = (-1) \cdot (-1)\ ; \end{aligned}$$
>
> dall'ultima uguaglianza, in virtù dell'unicità del reciproco garantita dall'assioma (A.6), traiamo immediatamente $(-1)^{-1} = -1$. □

♦

2. Regole dell'Ordine

Ricordiamo gli assiomi del **Gruppo 2**:

Assiomi dell'Ordine

Esiste una relazione d'ordine[2] $\leq$ *che soddisfa le seguenti proprietà:*

(O.1) *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *o si ha* $x \leq y$ *oppure* $y \leq x$

(O.2) *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\quad x \leq y \ \Rightarrow\ x + z \leq y + z$

(O.3) *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\quad x \leq y$ *e* $0 \leq z \ \Rightarrow\ x \cdot z \leq y \cdot z$.[3]

Osservazione 8 (Definizione della Relazione d'Ordine Stretto $<$)**:** Dagli assiomi dell'ordine segue che è possibile definire in $\mathbb{R}$ anche una relazione d'ordine stretto[4], denotata col simbolo $<$, ponendo per definizione:

$$x < y \quad \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \quad x \leq y \text{ ed } x \neq y\ ; \tag{12}$$

la relazione $x < y$ si legge "x è minore di y". ♦

Osservazione 9 (Principio di Tricotomia)**:** Introdotta la relazione d'ordine stretto, è evidente che la totalità della relazione $\leq$ può essere espressa anche come segue:

> «Per ogni paio di numeri $x, y \in \mathbb{R}$ sussiste una ed una soltanto delle alternative $x < y$, $x = y$ od $y < x$».

Quello ora enunciato è solitamente detto *Principio di Tricotomia*. ♦

Fatte tali premesse, dagli assiomi dell'ordine e dalla definizione (12) si ricavano le seguenti regole di calcolo:

---

[2] Ricordiamo che una relazione interna ad un insieme è detta *d'ordine* se essa gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

[3] Ricordiamo la terminologia introdotta a lezione (peraltro già nota dalle scuole dell'obbligo).
La notazione $x \leq y$ si legge "x è minore o uguale ad y".
La proprietà (O.1) si esprime dicendo che la relazione d'ordine $\leq$ è *totale*. Le proprietà (O.2)–(O.3) sono dette, rispettivamente, *compatibilità con la somma* e *compatibilità col prodotto*.
I numeri reali diversi da 0 che soddisfano la relazione $0 \geq x$ e sono si chiamano *numeri positivi*, mentre i numeri diversi da 0 che soddisfano la relazione $x \leq 0$ vengono detti *numeri negativi*.
Si dice che due numeri $x, y \neq 0$ *hanno lo stesso segno* quando sono entrambi positivi od entrambi negativi; mentre si dice che essi *hanno segno opposto* se uno dei due è positivo e l'altro è negativo.

[4] Ricordiamo che una relazione $\mathcal{R}$ interna ad un insieme è detta *d'ordine stretto* se essa gode delle proprietà transitiva nonché della seguente:

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow\ y \not\mathcal{R} x\ ,$$

usualmente detta *proprietà asimmetrica* (da non confondere con la proprietà antisimmetrica!).

Teorema 2
Siano $x, y \in \mathbb{R}$.
Valgono i seguenti fatti:

$$x < y \text{ se e solo se per ogni } z \in \mathbb{R} \text{ si ha } x + z < y + z \tag{13}$$

$$x \leq y \text{ se e solo se per ogni } z \in \mathbb{R} \text{ si ha } x + z \leq y + z \tag{14}$$

$$\text{se } x < y \text{ e } z < w, \text{ allora } x + z < y + w \tag{15}$$

$$\text{se } x < y \text{ e } z \leq w, \text{ allora } x + z < y + w \tag{16}$$

$$\text{se } x \leq y \text{ e } z < w, \text{ allora } x + z < y + w \tag{17}$$

$$\text{se } x \leq y \text{ e } z \leq w, \text{ allora } x + z \leq y + w \tag{18}$$

$$x < y \text{ se e solo se } -y < -x \tag{19}$$

$$x \leq y \text{ se e solo se } -y \leq -x \tag{20}$$

$$x < y \text{ se e solo se per ogni } z < 0 \text{ si ha } y \cdot z < x \cdot z \tag{21}$$

$$x \leq y \text{ se e solo se per ogni } z < 0 \text{ si ha } y \cdot z \leq x \cdot z \tag{22}$$

$$\text{se } 0 < x \text{ e } 0 < y \quad \text{oppure} \quad \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0, \text{ allora } 0 < x\, y \tag{23}$$

$$\text{se } x < 0 \text{ e } 0 < y \quad \text{oppure} \quad \text{se } 0 < x \text{ e } y < 0, \text{ allora } x\, y < 0 \tag{24}$$

$$\text{se } x \neq 0, \text{ allora si ha } 0 < x \text{ se e solo se } 0 < \frac{1}{x} \tag{25}$$

$$\text{se } x \neq 0, \text{ allora si ha } x < 0 \text{ se e solo se } \frac{1}{x} < 0 \tag{26}$$

$$0 < x < 1 \text{ se e solo se } 1 < \frac{1}{x} \tag{27}$$

$$1 < x \text{ se e solo se } 0 < \frac{1}{x} < 1 \tag{28}$$

$$0 < x < y \text{ se e solo se } \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \tag{29}$$

$$0 < x \leq y \text{ se e solo se } \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \tag{30}$$

Osservazione 10: Le regole (23) e (24) vengono solitamente enunciate assieme come segue:

> «Il prodotto di due numeri reali non nulli è positivo se i due numeri hanno lo stesso segno, negativo altrimenti».

Tale affermazione è detta *Regola dei Segni*. ♦

Dimostrazione. Dimostriamo le (13) *e* (14). L'implicazione $\Rightarrow$ di (13) segue immediatamente dall'assioma (O.2), quindi basta mostrare la $\Leftarrow$. Scelto ad arbitrio $z \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
x + z < y + z &\overset{(O.2)}{\Rightarrow} x + z + (-z) < y + z + (-z) \\
&\overset{(A.2)}{\Rightarrow} x + \big(z + (-z)\big) < y + \big(z + (-z)\big) \\
&\overset{(A.5)}{\Rightarrow} x + 0 < y + 0 \\
&\overset{(A.4)}{\Rightarrow} x < y
\end{aligned}$$

come volevamo.
D'altra parte, per la definizione di $\leq$ abbiamo:

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oppure } x = y \\ &\overset{(13),(4)}{\Leftrightarrow} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{R},\ x + z < y + z \text{ oppure } x + z = y + z \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{R},\ x + z \leq y + z\ , \end{aligned}$$

che è la (14).

Dimostriamo le (15)–(18). Per la proprietà transitiva dell'ordine e la (O.2) abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} x < y \quad &\overset{(O.2)}{\Rightarrow} \quad x + z < y + z \\ z < w \quad &\overset{(O.2)}{\Rightarrow} \quad y + z < y + w \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x + z < y + w\ ,$$

che è la (15).
Le (16)–(18) si provano analogamente.

Dimostriamo la (19). Mostriamo che vale la $\Rightarrow$. *Per assurdo*, supponiamo che contemporaneamente ad $x < y$ non si abbia $-y < -x$; allora, per il *Principio di Tricotomia*, o è $-x < -y$ oppure è $-x = -y$.
Nel primo caso, per la (O.2) troveremmo:

$$\begin{aligned} x < y \quad &\overset{(O.2)}{\Rightarrow} \quad x + (-x) < y + (-x) \\ &\Rightarrow \quad 0 < y - x \end{aligned}$$

ed analogamente:

$$\begin{aligned} -x < -y \quad &\overset{(O.2)}{\Rightarrow} \quad y + (-x) < y + (-y) \\ &\Rightarrow \quad y - x < 0\ ; \end{aligned}$$

ma il raffronto delle due ultime disuguaglianze porta ad un assurdo, in quanto il numero $y - x$ violerebbe il *Principio di Tricotomia*.
Nel secondo caso, avremmo addirittura $x = y$ per la (2), il che è assurdo poiché $x < y$.
Conseguentemente, in concomitanza con $x < y$ deve necessariamente aversi anche $-y < -x$, come volevamo.
L'implicazione inversa $\Leftarrow$ si dimostra usando quanto appena mostrato e la regola (2): infatti, abbiamo:

$$\begin{aligned} -y < -x \quad &\overset{(19)}{\Rightarrow} \quad -(-x) < -(-y) \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad x < y\ . \end{aligned}$$

Dimostriamo la (20). L'implicazione $\Rightarrow$ segue dalla (19) e dalla proprietà simetrica dell'uguaglianza: infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oppure } x = y \\ &\overset{(19)}{\Leftrightarrow} -y < -x \text{ oppure } -x = -y \\ &\overset{(19)}{\Leftrightarrow} -y < -x \text{ oppure } -y = -x \\ &\Leftrightarrow \quad -y \leq -x\ . \end{aligned}$$

L'implicazione inversa $\Leftarrow$ segue da quanto ora mostrato come nella dimostrazione di (19).

Dimostriamo le (21) *e* (22). Per la (19), se $z < 0$ allora si ha $0 = -0 < -z$; pertanto abbiamo:

$$\begin{aligned} x < y &\overset{(O.3)}{\Leftrightarrow} x \cdot (-z) < y \cdot (-z) \\ &\overset{(6)}{\Leftrightarrow} -(x \cdot z) < -(y \cdot z) \\ &\overset{(19)}{\Leftrightarrow} y \cdot z < x \cdot z \end{aligned}$$

e ciò dimostra l'equivalenza (21). D'altro canto, usando la (21) e la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, si ha:

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad x < y \text{ oppure } x = y \\ &\overset{(21)}{\Leftrightarrow} \quad \text{per ogni } z < 0,\ y \cdot z < x \cdot z \text{ oppure } x \cdot z = y \cdot z \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } z < 0,\ y \cdot z < x \cdot z \text{ oppure } y \cdot z = x \cdot z \\ &\Leftrightarrow \quad y \cdot z \leq x \cdot z\ , \end{aligned}$$

che è la (22).

Dimostriamo le (23) *e* (24). Se $0 < x, y$, le (23) seguono immediatamente dalla (O.3) e dalla regola (5): invero, se $0 < x$ e $0 < y$ per (O.3) è $0 \cdot y < x \cdot y$ ossia $0 < x \cdot y$.
Viceversa, se $x, y < 0$, abbiamo $0 < -x, -y$ e dunque da (O.3) e (7) segue:

$$0 < (-x) \cdot (-y) = \big((-1) \cdot x\big)\big((-1) \cdot y\big) = xy\ .$$

Le (24) si dimostrano in modo analogo.

Dimostriamo la (25). Innanzitutto, notiamo che l'essere $x > 0$ implica $x \neq 0$, cosicché x è certamente dotato di reciproco, il quale è a sua volta un numero diverso da 0. *Per assurdo*, supponiamo che contemporaneamente ad $0 < x$ non si abbia $\frac{1}{x} > 0$: ciò, per il *Principio di Tricotomia* e per quanto notato all'inizio, significa che è $\frac{1}{x} < 0$. Allora per la (O.3), abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} < 0 &\overset{(O.3)}{\Rightarrow} \frac{1}{x} \cdot x < 0 \cdot x \\ &\Rightarrow 1 < 0 \end{aligned}$$[5]

e dalla (19) segue $0 < -1$. Usando ancora la (O.3) troviamo:

$$\begin{aligned} 0 < -1 &\overset{(O.3)}{\Rightarrow} 0 \cdot (-1) < (-1) \cdot (-1) \\ &\overset{(5),(6)}{\Rightarrow} 0 < -\big(1 \cdot (-1)\big) \\ &\overset{(A.4)}{\Rightarrow} 0 < -(-1) \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} 0 < 1 \end{aligned}$$

e questo è assurdo, in quanto le due relazioni $1 < 0$ e $0 < 1$ non possono sussistere contemporaneamente per il *Principio di Tricotomia*.
Pertanto, non si può avere contemporaneamente $0 < x$ ed $\frac{1}{x} < 0$ e dunque quando $0 < x$ è necessariamente anche $0 < \frac{1}{x}$.

[5]Come ben noto, tale disuguaglianza è falsa... Tuttavia non l'abbiamo ancora dimostrata, dunque non possiamo usarla per concludere la dimostrazione!

Dimostriamo la (26). Evidentemente, anche l'ipotesi $x < 0$ implica che x è dotato di reciproco diverso dallo 0.
Abbiamo:

$$\begin{aligned} x < 0 &\overset{(19)}{\Leftrightarrow} -0 < -x \\ &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0 < -x \\ &\overset{(19)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{1}{-x} \\ &\overset{(A.6)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{1}{1 \cdot (-x)} \\ &\overset{(6)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{1}{(-1) \cdot x} \\ &\overset{(11)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow 0 < (-1) \cdot \frac{1}{x} \\ &\overset{(7)}{\Leftrightarrow} 0 < -\frac{1}{x} \\ &\overset{(19)}{\Leftrightarrow} -\left(-\frac{1}{x}\right) < -0 \\ &\overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} < 0\,, \end{aligned}$$

come volevamo.

Dimostriamo le (27) *e* (28). Proviamo dapprima le implicazioni $\Rightarrow$. Fissato $0 < x < 1$, si ha $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, sicché $0 < x \cdot \frac{1}{x}$ e ciò importa $0 < 1/x$. Se, *per assurdo*, fosse $1/x < 1$, si avrebbe:

$$x < 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = x \cdot \frac{1}{x} < 1$$

contro il Principio di Tricotomia; analogamente, se fosse $1/x = 1$ avremmo anche $x = 1$, il che è contro l'ipotesi. Pertanto l'unica alternativa possibile è $1 < 1/x$ e vale la prima delle implicazioni di (27).
Se, invece, $x > 1$, allora un ragionamento identico al precedente mostra che $0 < 1/x < 1$, sicché vale la prima delle implicazioni (28).
Mostriamo le $\Leftarrow$. Evidentemente, se $1 < 1/x$, possiamo usare la (28) per ottenere $0 < 1/(1/x) < 1$, ossia $0 < x < 1$; analogamente, se $0 < 1/x < 1$, allora possiamo usare la (27) per avere $1 < 1/(1/x)$, ovvero $1 < x$.

Dimostriamo le (29) *e* (30). Scegliamo $0 < x < y$ e, *per assurdo*, supponiamo che non sia soddisfatta la relazione $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$; ciò significa che $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ oppure che $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$. Quest'ultima relazione non può sussistere, in quanto $x \neq y$, dunque deve certamente essere $1/x < 1/y$.
Per la (25) abbiamo $0 < 1/x$ ed invocando la (O.3) troviamo:

$$x < y \text{ e } 0 < \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{y}{x}\,;$$

da ciò, usando la (28) ed il fatto che $\frac{x}{y} = (\frac{y}{x})^{-1}$, desumiamo che $0 < \frac{x}{y} < 1$.
D'altra parte, applicando di nuovo la (O.3) otteniamo:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \text{ e } 0 < x \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{y}\,,$$

e ciò è assurdo, perché il numero $\frac{x}{y}$ viola il *Principio di Tricotomia*.
Conseguentemente, le relazioni $0 < x < y$ ed $1/x \leq 1/y$ non possono presentarsi contemporaneamente; dunque vale la (29).
La dimostrazione della (30) è analoga. □

Osservazione 11: La Regola dei Segni implica che per ogni $x \neq 0$ il prodotto $x \cdot x$ è positivo, cioè che:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad 0 < x \cdot x \ ,$$

relazione che usualmente si esprime dicendo che:

> «Il quadrato di ogni numero reale non nullo è positivo».

Tale relazione ed il fatto che $1 = 1 \cdot 1$ implicano che $0 < 1$, cioè che 1 è un numero positivo. Ciò mostra che l'insieme dei numeri reali positivi non è vuoto (cosa non scontata, dato che non è contemplata in nessun assioma).
Analogamente, da $0 < 1$, da (19) e da (1) segue $-1 < 0$, ossia che -1 è un numero negativo. Pertanto nemmeno l'insieme dei numeri reali negativi è vuoto. ♦

Osservazione 12: Come ben noto al lettore, in $\mathbb{R}$ si possono istituire anche le relazioni $>$ e $\geq$ per mezzo delle posizioni:

$$x \geq y \quad \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \quad x > y \text{ oppure } x = y \ , \tag{31}$$

$$x > y \quad \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \quad y < x \ ; \tag{32}$$

il simbolo $x \geq y$ si legge "x è maggiore od uguale ad y", mentre il simbolo $x > y$ si legge "x è maggiore di y".
Tali relazioni sono, rispettivamente, un ordine ed un ordine stretto su $\mathbb{R}$.
Istitutite tali convenzioni, alcune delle regole enunciate nel Teorema 2 si riscrivono in una forma più familiare; ad esempio, le regole (19), (20), (29) ed (30) divengono:

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Leftrightarrow \quad -x > -y \\ x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad -x \geq -y \\ 0 < x < y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\ 0 < x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \ . \end{aligned}$$

Usualmente, le prime due equivalenze vengono espresse dicendo:

> «Passando agli opposti, le disuguaglianze si invertono»;

mentre le seconde due equivalenze si riassumono come segue:

> «Passando ai reciproci, le disuguaglianze tra numeri positivi si invertono».

Infine, ricordiamo che vale il seguente fatto più generale:

> «Passando ai reciproci, le disuguaglianze tra numeri *aventi lo stesso segno* si invertono»,

la cui dimostrazione è lasciata allo studioso lettore. ♦

Osservazione 13: Le regole di calcolo e gli assiomi possono essere combinate per dimostrare tutte le altre regole omesse da questi fogli.
Ad esempio, mostriamo come provare che vale la seguente relazione:

$$x < y \text{ e } z < 0 \quad \Rightarrow \quad y \cdot z < x \cdot z \ .$$

Dimostrazione. Fissati $x < y$ e $z < 0$, per (19) ed (2) si ha $0 < -z$; allora abbiamo:

$$\begin{aligned} x < y \quad &\overset{(O.3)}{\Rightarrow} \quad x \cdot (-z) < y \cdot (-z) \\ &\overset{(7)}{\Rightarrow} \quad -(x \cdot z) < -(y \cdot z) \\ &\overset{(19)}{\Rightarrow} \quad y \cdot z < x \cdot z \ , \end{aligned}$$

come volevamo. □

La regola generale che contiene quella appena provata si esprime usualmente dicendo che:

> «Moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per un numero negativo, la disuguaglianza si inverte»,

e la sua dimostrazione è lasciata al lettore.
Il lettore può anche provare che vale la regola:

$$x < y \text{ e } 0 < z < w \quad \Rightarrow \quad x \cdot z < y \cdot w \ ,$$

ed altre che coinvolgono il prodotto e sono formalmente analoghe alle (15) – (18).♦

Osservazione 14: Notiamo esplicitamente, ma senza entrare nei dettagli, che gli assiomi dell'ordine forniti all'inizio del paragrafo non sono gli unici possibili.
Ad esempio, è possibile dimostrare che richiedere l'esistenza di una relazione d'ordine stretto che goda delle (O.1) – (O.3) equivale a richiedere l'esistenza di un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto che goda delle seguenti proprietà:

(P.1) per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $x \in P$ oppure $x = 0$ oppure $-x \in P$

(P.2) se $x, y \in P$, allora $x + y \in P$

(P.3) se $x, y \in P$, allora $x \cdot y \in P$.

Infatti, scelto di postulare come assioma l'esistenza di un sottoinsieme P che goda delle proprietà (P.1) – (P.3), si può costruire una relazione $\leq$ su $\mathbb{R}$ ponendo:

$$x \leq y \quad \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \quad y - x \in P \cup \{0\} \ ;$$

si verifica che tale relazione è d'ordine, gode delle (O.1) – (O.3) ed è tale che $P = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x\}$. ♦

Esercizi

`Esercizio 1:` Sia $x \in \mathbb{R}$.

1. Dimostrare che $x \leq 0$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \ x < \varepsilon \ .$$

2. Analogamente, dimostrare che $x \geq 0$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \ x > -\varepsilon \ .$$

3. Infine, mostrare che $x = 0$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \ |x| < \varepsilon \ .$$

4. È possibile sostituire la disuguaglianza stretta $x < \varepsilon$ con $x \leq \varepsilon$ nella **1** conservando la validità del risultato?
Motivare la risposta ed estendere le proprie considerazioni a **2** e **3**.

`Esercizio 2 (Monotònia della potenza):` Scelto un qualsiasi numero reale x, ponendo:

$$\begin{cases} x^1 := x \\ x^{n+1} := x^n \cdot x \end{cases}$$

rimane definita la *potenza n-esima di x* per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ (questa è un'istanza del Principio d'Induzione); tale potenza coincide con il numero:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ \cdots \ \cdot x}_{n \text{ volte}} \ .$$

1. Dimostrare che l'implicazione:

$$0 \leq x < y \quad \Rightarrow \quad x^n < y^n$$

vale per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

2. Dimostrare che l'implicazione:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad x^n < y^n$$

vale per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ ed ogni indice n dispari.
Trovare un controesempio che confuti l'implicazione precedente nel caso in cui n sia pari (ci si può limitare a considerare il caso $n = 2$).

3. Dimostrare che se $n \geq 1$ è pari allora vale l'implicazione:

$$x < y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad y^n < x^n \ .$$

Fornendo alcuni esempi, mostrare nel caso in cui $x < 0 < y$, in generale, nulla si può dire sull'ordine in cui si presentano x^n ed y^n.

N.B.: le **1-3** asseriscono, rispettivamente, che le funzioni potenza ad esponente naturale sono tutte strettamente crescenti in $[0, +\infty[$; che le potenze ad esponente naturale dispari sono strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$; e che le potenze ad esponente naturale pari sono strettamente decrescenti su $]-\infty, 0]$.

`Esercizio 3:` **1**. Provare che l'implicazione:

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x^{-n} > y^{-n}$$

vale per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

2. Provare che l'implicazione:

$$x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad x^{-n} > y^{-n}$$

vale per ogni n dispari.

3. Provare che l'implicazione:

$$x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad x^{-n} < y^{-n}$$

vale per ogni n pari.

N.B.: Le **1 - 3** asseriscono, rispettivamente, che le funzioni potenza ad esponente intero negativo sono tutte strettamente decrescenti in $]0, +\infty[$; che le potenze ad esponente interno negativo dispari sono strettamente decrescenti anche in $]-\infty, 0[$;

e che le potenze ad esponente interno negativo pari sono strettamente crescenti in $]-\infty, 0[$.

`Esercizio 4:` **1**. Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti e sia $f : X \to Y$ una funzione invertibile.
Provare che f è strettamente crescente [risp. strettamente decrescente] in X se e solo se f^{-1} è strettamente crescente [risp. strettamente decrescente] in Y.

2. Dedurre dalla **1** e dagli esercizi precedenti le proprietà di monotònia delle potenze del tipo $x^{\frac{1}{n}}$ e delle funzioni radice n-esima (per n dispari).

`Esercizio 5:` **1**. Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti, $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$.
Provare che se f e g hanno la stessa monotònia (i.e., entrambe crescenti o entrambe decrescenti), allora la funzione composta $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ è crescente.
Al contrario, provare che se f e g hanno monotònie opposte (i.e., una crescente e l'altra decrescente), allora la funzione composta $f \circ g$ è decrescente in X.

2. Ricavare le proprietà di monotonia delle potenze ad esponente razionale e reale.

Guglielmo Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – ITALY
email: `guglielmo.dimeglio@unina.it`