

ALCUNE APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE

G. DI MEGLIO

INDICE

Introduzione	1
1. Uguaglianza e Disuguaglianze di Young	1
2. Calcolo della Lunghezza della Curva-Grafico di una Funzione di Classe C^1	5
3. Volume di un Solido di Rotazione	10
4. Massa di un Cilindro con Densità Variabile	15
Esercizi	17

INTRODUZIONE

Le presenti note sono proposte come integrazione facoltativa degli argomenti trattati a lezione.

In particolare, vengono qui proposte applicazioni del Calcolo Integrale sia a questioni di interesse puramente matematico, sia (e specialmente) a questioni d'interesse geometrico e fisico.

Ho cercato di mantenere la trattazione per lo più sul piano euristico, poiché le giustificazioni rigorose di alcune formule presuppongono la conoscenza di argomenti di Analisi più avanzati (i quali sono usualmente esposti durante le lezioni di Analisi Matematica II e di Fisica Matematica).

Più che concentrarsi sugli aspetti puramente formali, il lettore farebbe bene a comprendere ed a metabolizzare le idee di base, in vista delle loro applicazioni in campo ingegneristico.

1. UGUAGLIANZA E DISUGUAGLIANZE DI YOUNG

Siano $a, A \geq 0$, $b > a$, $B > A$ ed $f : [a, b] \rightarrow [A, B]$ una funzione continua, strettamente crescente e suriettiva.

Per noti fatti, la stretta monotonia di f garantisce che f è pure invertibile e la funzione inversa $f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$ è continua e strettamente crescente.

Le ipotesi poste su f garantiscono che entrambe f ed f^{-1} sono integrabili nei rispettivi intervalli di definizione e ci proponiamo di calcolare:

$$(1) \quad \int_a^b f(x) \, dx + \int_A^B f^{-1}(y) \, dy .$$

Notiamo innanzitutto che l'essere f biiettiva e crescente implica che $f(a) = A$, $f(b) = B$ ed $f(x) \geq A \geq 0$, cosicché f è non negativa in $[a, b]$; analogamente, abbiamo $f^{-1}(A) = a$, $f^{-1}(B) = b$ e dunque $f^{-1}(y) \geq a \geq 0$, cosicché anche

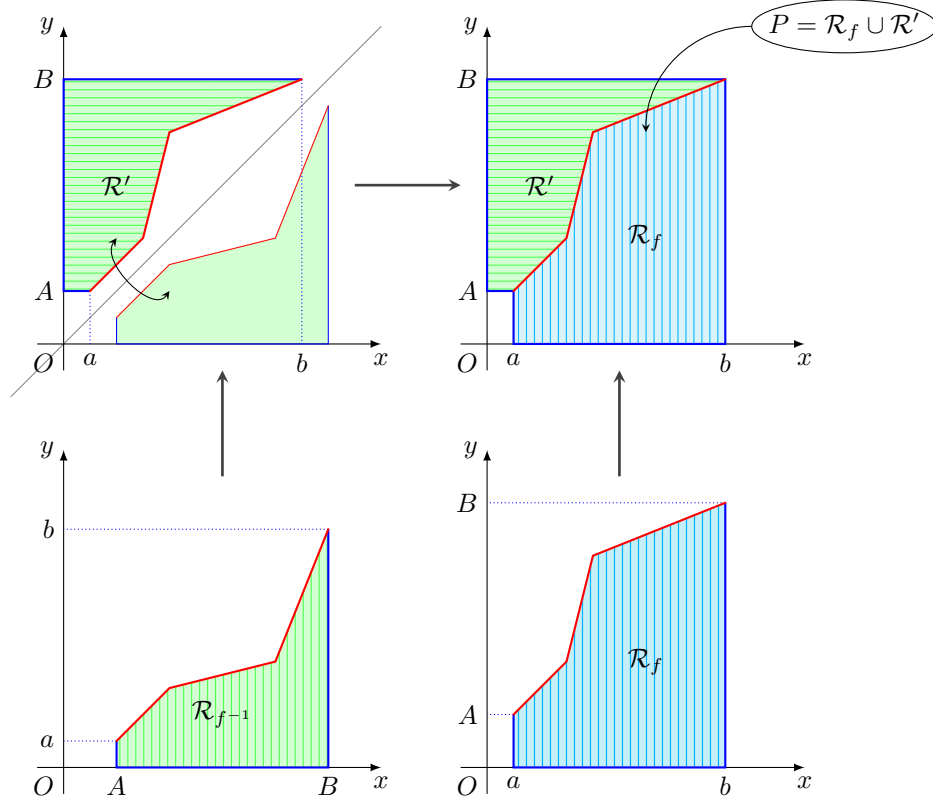


FIGURA 1. Interpretazione geometrica della somma (1).

f^{-1} è non negativa in $[A, B]$. Conseguentemente, i due integrali presenti nella (1) coincidono con la misura dei rettangoloidi $\mathcal{R}_f$ ed $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ relativi ad f ed a f^{-1} , cioè:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) \, dx = m(\mathcal{R}_f)$$

$$(3) \quad \int_A^B f^{-1}(y) \, dy = m(\mathcal{R}_{f^{-1}}) .$$

Facendo un disegno (cfr. FIGURA 1), si nota anche che l'unione di $\mathcal{R}_f$ con una “copia” $\mathcal{R}'$ di $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ (ottenuta da $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ mediante una simmetria assiale, che preserva la misura di Peano–Jordan degli insiemi del piano) forma un plurirettangolo P , precisamente quello che ha vertici nei punti di coordinate $(a, 0)$, $(b, 0)$, (b, B) , $(0, B)$, $(0, A)$ ed (a, A) ; dato che $\mathcal{R}' \cap \mathcal{R}_f$ coincide col grafico di f , il quale è un insieme di misura nulla secondo Peano–Jordan, per la *proprietà additiva* della misura abbiamo:

$$(4) \quad m(\mathcal{R}_f) + m(\mathcal{R}_{f^{-1}}) = m(P) .$$

La misura di P si calcola molto facilmente: infatti, P si ottiene eliminando dal rettangolo $I = [0, b] \times [0, B]$ il rettangolino $J = [0, a] \times [0, A]$, sicché:

$$(5) \quad m(P) = m(I) - m(J) = b \cdot B - a \cdot A .$$

Infine, mettendo insieme le (2), (3), (4) e (5), troviamo:

$$(6) \quad \int_a^b f(x) \, dx + \int_A^B f^{-1}(y) \, dy = b \cdot B - a \cdot A$$

che risponde alla questione sollevata sopra.

D'altra parte, notiamo pure che la misura del plurirettangolo P è certamente più grande della misura del rettangolo di vertici (a, A) , (b, A) , (b, B) ed (a, B) , cioè $R = [a, b] \times [A, B]$, la quale vale $m(R) = (b - a) \cdot (B - A)$. Ne consegue la disuguaglianza:

$$(7) \quad \int_a^b f(x) \, dx + \int_A^B f^{-1}(y) \, dy \geq (b - a) \cdot (B - A)$$

(la quale poteva esser ricavata anche dalla (6), tenendo presente che $b \cdot B - a \cdot A \geq (b - a) \cdot (B - A)$).

La (6) e la (7) cessano d'esser valide quando la funzione f non è suriettiva, poiché in tal caso la funzione inversa f^{-1} non può esser definita su tutto il codominio $[A, B]$ di f .

Tuttavia si può rimediare a questo inconveniente in maniera semplicissima: basta infatti constatare che gli estremi A e B nel secondo integrale ed al secondo membro possono essere sostituiti, rispettivamente, con $f(a)$ e con $f(b)$ senza alterare in alcun modo la dimostrazione dell'uguaglianza fornita sopra.

Fatta tale sostituzione, la (6) e la (7) si mutano in:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) \, dy &= b \cdot f(b) - a \cdot f(a) \\ \int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) \, dy &\geq (b - a) \cdot (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

le quali, a differenza delle (6) e (7), hanno il pregio di conservare la loro validità anche nel caso in cui f non sia suriettiva: infatti, nelle ipotesi poste, la f è dotata di inversa definita nell'intervallo $[f(a), f(b)] \subseteq [A, B]$ ed ivi continua e strettamente crescente, di modo che l'integrale al primo membro ha senso (e continua ad esprimere la misura di un rettangoloide).

D'altra parte, l'essere $a \geq 0$ e $f(a) \geq A$ implica che $a \cdot f(a) \geq a \cdot A$ ed, analogamente, l'essere $b > 0$ ed $f(b) \leq B$ importa $b \cdot f(b) \leq b \cdot B$; da queste relazioni segue immediatamente che:

$$b \cdot f(b) - a \cdot f(a) \leq b \cdot B - a \cdot A.$$

Mettendo insieme quanto appena detto con l'uguaglianza determinata in precedenza, possiamo affermare che in generale vale la relazione:

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) \, dy \leq b \cdot B - a \cdot A,$$

la quale è più debole della (6).

Possiamo compendiare quanto acquisito nella seguente proposizione:

UGUAGLIANZA E DISUGUAGLIANZE DI YOUNG

Siano $a, A \geq 0$, $b > a$, $B > A$ ed $f : [a, b] \rightarrow [A, B]$.

Se f è continua e strettamente crescente in $[a, b]$ valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} (\text{uY}) \quad & \int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) \, dy = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) \\ (\text{dYsup}) \quad & \int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) \, dy \leq b \cdot B - a \cdot A \\ (\text{dYinf}) \quad & \int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) \, dy \geq (b - a) \cdot (f(b) - f(a)) , \end{aligned}$$

le quali sono, rispettivamente, dette uguaglianza di Young e disuguaglianze di Young¹ (superiore ed inferiore) per le funzioni crescenti.

Osservazione 1: L'uguaglianza (uY) può essere usata per calcolare l'integrale di f^{-1} esteso all'intervallo $[A, B] = [f(a), f(b)]$ non appena si conosca (o si sappia calcolare) l'integrale di f esteso ad $[a, b] = [f^{-1}(A), f^{-1}(B)]$, o viceversa. ♦

Osservazione 2: Variando di poco il discorso fatto per dimostrare la (dYinf) si può dimostrare che, più in generale, vale la disuguaglianza:

$$(\text{dYinf}') \quad \int_a^b f(x) \, dx + \int_{f(a)}^{\beta} f^{-1}(y) \, dy \geq (b - a) \cdot (\beta - f(a))$$

per ogni $\beta \in [f(a), f(b)]$. ♦

Esempio 1: Consideriamo la funzione potenza $f(x) := x^{p-1}$ con esponente reale $p > 1$. È noto che tale funzione è strettamente crescente e suriettiva se riguardata come applicazione di $[0, +\infty[$ in sé: pertanto essa è invertibile in $[0, +\infty[$, la sua inversa essendo la funzione potenza $f^{-1}(y) := y^{\frac{1}{p-1}}$.

Fissati che siano $a < b, A < B \in \mathbb{R}$, gli integrali che figurano nella (1) sono entrambi calcolabili esplicitamente:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^b x^{p-1} \, dx \\ &= \frac{1}{p} x^p \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{p} (b^p - a^p) , \\ \int_A^B f^{-1}(y) \, dy &= \int_A^B y^{\frac{1}{p-1}} \, dy \\ &= \frac{1}{\frac{1}{p-1} + 1} y^{\frac{1}{p-1} + 1} \Big|_A^B \\ &= \frac{p-1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} \Big|_A^B \\ &= \frac{p-1}{p} \left(B^{\frac{p}{p-1}} - A^{\frac{p}{p-1}} \right) , \end{aligned}$$

cosicchè:

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_A^B f^{-1}(y) \, dy = \frac{1}{p} (b^p - a^p) + \frac{p-1}{p} \left(B^{\frac{p}{p-1}} - A^{\frac{p}{p-1}} \right) .$$

¹W. H. Young (1863 – 1942), matematico inglese.

Prendendo $a = 0$, $A = f(a) = 0$, $b \geq 0 = a$ e $0 \leq \beta \leq b^{p-1}$, dalla precedente otteniamo:

$$\int_0^b f(x) \, dx + \int_0^\beta f^{-1}(y) \, dy = \frac{1}{p} b^p + \frac{p-1}{p} \beta^{\frac{p}{p-1}}.$$

Usando la disuguaglianza inferiore di Young modificata (dYinf') otteniamo allora:

$$\frac{1}{p} b^p + \frac{p-1}{p} \beta^{\frac{p}{p-1}} \geq b \cdot \beta,$$

che è valida per ogni $b \geq 0$ e $0 \leq \beta \leq b^{p-1}$.

D'altra parte, se $\beta > b^{p-1}$, possiamo considerare la funzione strettamente crescente $g(x) := x^{\frac{1}{p-1}}$ definita in $[0, \beta]$: applicando la disuguaglianza (dYinf') alla funzione g con integrali estesi agli intervalli $[0, \beta]$ e $[0, b] \subseteq [0, g(\beta)]$, troviamo:

$$\int_0^\beta g(x) \, dx + \int_0^b g^{-1}(y) \, dy \geq \beta \cdot b,$$

ossia nuovamente la:

$$\frac{p-1}{p} \beta^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p} b^p \geq b \cdot \beta.$$

Pertanto possiamo concludere che la disuguaglianza:

$$(8) \quad b \cdot \beta \leq \frac{1}{p} b^p + \frac{p-1}{p} \beta^{\frac{p}{p-1}}$$

vale per ogni $b, \beta \geq 0$. ◆

2. CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DELLA CURVA-GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI CLASSE C^1

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia derivabile ovunque in $[a, b]$ ed abbia derivata continua in $[a, b]$, financo negli estremi dell'intervallo.

Diagrammato il grafico di f sul piano cartesiano Oxy , ci proponiamo di calcolare la lunghezza della curva Γ grafico di f .²

Intuitivamente, un modo sensato per determinare la lunghezza di tale curva sembra tentare di approssimare Γ con curve "elementari" di cui sappiamo valutare la lunghezza, ad esempio con *poligonal*³ aventi vertici sulla curva, e cercare di migliorare sempre più tali approssimazioni.

La sensatezza di tale intuizione discende dall'analogia con il caso della misura della lunghezza di una circonferenza, che può esser fatta approssimando la circonferenza con il perimetro di poligoni regolari in essa inscritti.

Un buon modo per creare una poligonale Π "inscritta" nella curva Γ è il seguente: si fissa una decomposizione $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ di $[a, b]$ e si considerano i segmenti aventi per estremi i punti su Γ individuati dalle ascisse $x_0, \dots, x_n$, cioè $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $\dots$, $P_n = (x_n, f(x_n))$. Infatti, i segmenti $\Pi_1 := \overline{P_0 P_1}$, $\Pi_2 := \overline{P_1 P_2}$, $\dots$, $\Pi_n := \overline{P_{n-1} P_n}$ hanno a due a due un

²Qui stiamo sfruttando il *senso comune* del lettore. Infatti, non abbiamo fornito alcuna definizione di "lunghezza" di curve nel piano, né tantomeno abbiamo proposto una definizione sensata di "curva". Ciò, a rigore, ci impedisce di parlare di "lunghezza di una curva" e, a maggior ragione, di usare formule per calcolarla. Questo aspetto "formale" della faccenda verrà chiarito durante il corso di Analisi II e, per ora, chiediamo al lettore di accontentarsi delle nozioni di curva e lunghezza che il proprio senso comune gli suggerisce.

³Dovrebbe esser noto dalla Geometria Elementare che una "poligonale", o "spezzata", è una curva ottenuta giustappoendo un numero finito di segmenti aventi a due a due un estremo in comune.

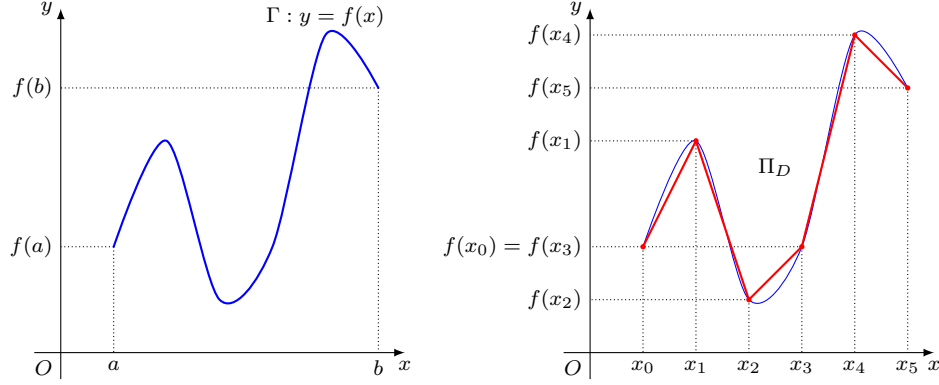


FIGURA 2. Una poligonale Π_D (in **rosso**) inscritta nel grafico Γ della funzione f (in **blu**).

estremo in comune e, perciò, individuano una poligonale.

La lunghezza di ogni segmento Π_k è calcolabile elementarmente come distanza che separa i punti P_{k-1} e P_k , cioè:

$$\text{lungh}(\Pi_k) = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2},$$

e la lunghezza totale della poligonale Π_D è la somma delle lunghezze dei segmenti che la compongono, ossia:

$$\begin{aligned} l_D &:= \text{lungh}(\Pi_D) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{lungh}(\Pi_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \end{aligned}$$

Non è difficile constatare che la lunghezza l_D della generica poligonale Π_D è un numero positivo maggiore od uguale al numero $\sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$ (che rappresenta la lunghezza del segmento $\overline{AB}$).

Le ipotesi poste su f ci consentono di esprimere in una maniera più utile la quantità l_D . Invero, il *Teorema di Lagrange* ci assicura che in ogni intervallino $[x_{k-1}, x_k]$ della decomposizione D esiste almeno un punto ξ_k tale che:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k)$$

e ciò ci consente di sostituire la quantità $f'(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$ al posto di $f(x_k) - f(x_{k-1})$ nell'espressione di l_D , ottenendo:

$$\begin{aligned} l_D &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k))^2 \cdot (x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

La quantità a terzo membro è una somma integrale di Riemann relativa alla funzione $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo $\varphi(x) := \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, precisamente è la somma integrale determinata da D subordinata alla scelta dei punti $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$l_D = \sigma_D(\varphi; \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Poiché la funzione φ è una funzione continua in tutto $[a, b]$, all'infittirsi la decomposizione D la quantità $\sigma_D(\varphi; \xi_1, \dots, \xi_n)$ diviene sempre più prossima al numero reale positivo $\lambda = \int_a^b \varphi(x) dx$ (indipendentemente dalla scelta dei punti $\xi_1, \dots, \xi_n$); ciò significa che, all'aumentare dei vertici della poligonale “inscritta” Π_D , la lunghezza l_D approssima sempre più il numero:

$$\lambda = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

il quale può essere assunto come valore della lunghezza della curva Γ .
Pertanto:

$$(9) \quad \text{lungh}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Osservazione 3 (Interpretazione Euristica della (9)): La formula (9) che fornisce la lunghezza della curva-grafico di una funzione di classe C^1 può essere interpretata come segue:

“La lunghezza della curva-grafico di una funzione C^1 è la *somma* di infinite lunghezze elementari dl di infiniti segmenti infinitesimi, ognuno dei quali è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo aventi cateti di lunghezza dx e $|f'(x)| dx$ ”.

Tale interpretazione è del tutto *euristica*. ◆

Esempio 2 (Lunghezza di una Catenaria): Consideriamo la funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) := k \cosh \frac{x}{k}$.

La curva-grafico Γ di f è detta *catenaria* e rappresenta la configurazione di equilibrio, sotto l'azione di un campo gravitazionale uniforme, di un filo pesante fissato nei due estremi, rispettivamente nei punti di coordinate $A = (a, k \cosh \frac{a}{k})$ e $B = (b, k \cosh \frac{b}{k})$.

Dato che il coseno iperbolico è una funzione derivabile con derivata continua in $\mathbb{R}$, la f risulta una funzione derivabile con derivata $f'(x) = \sinh \frac{x}{k}$ continua fin negli estremi di $[a, b]$; pertanto la lunghezza di Γ è calcolabile mediante l'uso della formula (9), la quale fornisce:

$$\begin{aligned} \text{lungh}(\Gamma) &= \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{k}} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{k}} dx \\ &= \int_a^b \cosh \frac{x}{k} dx \\ &= \left[k \sinh \frac{x}{k} \right]_a^b \\ &= k \sinh \frac{b}{k} - k \sinh \frac{a}{k} \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato la *relazione fondamentale della trigonometria iperbolica*, cioè $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

In molte applicazioni è utile determinare relazioni esatte o approssimate tra la lunghezza della curva l , le distanze orizzontale d e verticale h che separano i punti di sospensione, e la costante k (la quale è legata alle caratteristiche fisiche del filo sospeso, e.g. alla sua densità lineare).

Dato che:

$$\begin{aligned}
 d &= b - a \\
 h &= k \cosh \frac{b}{k} - k \cosh \frac{a}{k} \\
 &= 2k \sinh \frac{b-a}{2k} \cdot \sinh \frac{b+a}{2k} \\
 &= 2k \sinh \frac{d}{2k} \cdot \sinh \frac{b+a}{2k} \\
 l &= k \sinh \frac{b}{k} - k \sinh \frac{a}{k} \\
 &= 2k \sinh \frac{b-a}{2k} \cdot \cosh \frac{b+a}{2k} \\
 &= 2k \sinh \frac{d}{2k} \cdot \cosh \frac{b+a}{2k}
 \end{aligned}$$

per le *formule di prostaferesi iperboliche*, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \cosh \frac{b+a}{2k} &= \frac{l}{2k \sinh \frac{d}{2k}} \\
 \sinh \frac{b+a}{2k} &= \frac{h}{2k \sinh \frac{d}{2k}}
 \end{aligned}$$

ed usando nuovamente la relazione fondamentale ricaviamo:

$$l^2 - h^2 = 4k^2 \sinh^2 \frac{d}{2k}$$

la quale, prendendo le radici e dividendo per $\frac{d}{2k}$, si riscrive:

$$\frac{\sinh \frac{d}{2k}}{\frac{d}{2k}} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{d}.$$

Notato che $l^2 > h^2 + d^2$ (perché la lunghezza della curva Γ è maggiore della lunghezza del segmento $\overline{AB}$) e notato che la funzione $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\psi(t) := \frac{\sinh t}{t}$$

è strettamente crescente in $]0, +\infty[$ ⁴, possiamo affermare che, una volta note le tre quantità l , d ed h , è possibile determinare un unico valore k per cui la sia soddisfatta.

Esempio 3 (Lunghezza di un Arco di Circonferenza): Nel piano cartesiano Oxy consideriamo la circonferenza Γ di raggio $r > 0$ e centro $(0, 0)$. Come noto, i punti di tale curva sono tutti e soli quelli le cui coordinate soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = r^2$.

Fissiamo un angolo Ω del piano, delimitato dalle semirette uscenti dall'origine ed

⁴Infatti, si ha:

$$\psi'(t) = \frac{t \cosh t - \sinh t}{t^2} = (t - \tanh t) \frac{\cosh t}{t^2},$$

con $\frac{\cosh t}{t^2} > 0$, dunque il segno di $\psi'(t)$ dipende dal segno di $t - \tanh t$; d'altra parte si ha:

$$\begin{aligned}
 (t - \tanh t)' &= 1 - \frac{1}{\cosh^2 t} \\
 &= \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} \\
 &= \tanh^2 t > 0
 \end{aligned}$$

dunque $t - \tanh t > 0$ per $t > 0$.

aventi anomalie $\vartheta_1 < \vartheta_2$ comprese strettamente tra 0 e π : evidentemente, tale angolo giace completamente all'interno del semipiano delle ordinate positive e stacca su Γ un arco $\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}$ con estremi nei punti $A = (r \cos \vartheta_1, r \sin \vartheta_1)$ e $B = (r \cos \vartheta_2, r \sin \vartheta_2)$. Vogliamo calcolare la lunghezza dell'arco $\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}$.

I punti dell'arco $\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}$, cadendo nel semipiano delle ordinate positive e nella striscia delimitata dalle rette verticali per A e B , sono allora caratterizzati dal soddisfare l'equazione della circonferenza e dalle ulteriori condizioni $y > 0$ ed $r \cos \vartheta_2 \leq x \leq r \cos \vartheta_1$. Sotto tali condizioni l'equazione $x^2 + y^2 = r^2$ è esplicitabile rispetto alla y : essa fornisce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a patto che $x \in [r \cos \vartheta_2, r \cos \vartheta_1]$.

Ne consegue che un punto $P = (x, y)$ appartiene all'arco $\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}$ se e solo se esso è un punto della curva-grafico della funzione $f : [r \cos \vartheta_2, r \cos \vartheta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Dato che il radicando è strettamente positivo nell'intervallo di definizione, la f è derivabile con derivata $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ continua in $[r \cos \vartheta_2, r \cos \vartheta_1]$ e ciò rende possibile calcolare la lunghezza dell'arco $\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}$ usando la formula (9):

$$\begin{aligned} \text{lungh}(\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}) &= \int_{r \cos \vartheta_2}^{r \cos \vartheta_1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{r \cos \vartheta_2}^{r \cos \vartheta_1} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{r \cos \vartheta_2}^{r \cos \vartheta_1} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}} dx \\ &= r \int_{r \cos \vartheta_2}^{r \cos \vartheta_1} \frac{1/r}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}} dx \\ &= r \left[-\arccos \frac{x}{r} \right]_{r \cos \vartheta_2}^{r \cos \vartheta_1} \\ &= r(\vartheta_2 - \vartheta_1), \end{aligned}$$

cosicché la lunghezza dell'arco $\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}$ è uguale al prodotto dell'ampiezza $\vartheta_2 - \vartheta_1$ dell'angolo Ω per il raggio della circonferenza.

Notiamo esplicitamente che, mandando $\vartheta_1 \rightarrow 0^+$ e contemporaneamente $\vartheta_2 \rightarrow \pi^-$, l'arco $\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}$ tende a coincidere con la semicirconferenza Γ^+ che giace nel semipiano delle ordinate positive. Pertanto possiamo ritenere intuitivamente ragionevole la relazione:

$$\text{lungh}(\Gamma^+) = \lim_{\vartheta_1 \rightarrow 0^+, \vartheta_2 \rightarrow \pi^-} \text{lungh}(\Gamma_{\vartheta_1, \vartheta_2}) = \lim_{\vartheta_1 \rightarrow 0^+, \vartheta_2 \rightarrow \pi^-} r(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \pi r,$$

la quale restituisce un risultato di Geometria Elementare, dal quale segue la nota relazione:

$$\text{lungh}(\Gamma) = 2 \text{lungh}(\Gamma^+) = 2\pi r.$$

Esempio 4 (Lunghezza di un Arco di Parabola): Consideriamo la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) := \alpha x^2,$$

con $\alpha \neq 0$.

Ci proponiamo di calcolare la lunghezza della curva-grafico Γ di f .

Dato che la f è derivabile con derivata continua in $[a, b]$, possiamo applicare la (9):

abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \text{lungh}(\Gamma) &= \int_a^b \sqrt{1 + (2\alpha x)^2} \, dx \\
 &\stackrel{2\alpha x = \sinh t}{=} \frac{1}{2\alpha} \int_{\text{settsinh}(2\alpha a)}^{\text{settsinh}(2\alpha b)} \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cosh t \, dt \\
 &= \frac{1}{2\alpha} \int_{\text{settsinh}(2\alpha a)}^{\text{settsinh}(2\alpha b)} \cosh^2 t \, dt \\
 &= \frac{1}{4\alpha} [t + \cosh t \sinh t]_{\text{settsinh}(2\alpha a)}^{\text{settsinh}(2\alpha b)} \\
 &= \frac{1}{4\alpha} \left[t + \sinh t \sqrt{1 + \sinh^2 t} \right]_{\text{settsinh}(2\alpha a)}^{\text{settsinh}(2\alpha b)} \\
 &= \frac{1}{4\alpha} \left(\text{settsinh}(2\alpha b) + 2\alpha b \sqrt{1 + (2\alpha b)^2} - \text{settsinh}(2\alpha a) - 2\alpha a \sqrt{1 + (2\alpha a)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4\alpha} \log \frac{2\alpha b + \sqrt{1 + (2\alpha b)^2}}{2\alpha a + \sqrt{1 + (2\alpha a)^2}} + \frac{1}{2} \left(b \sqrt{1 + (2\alpha b)^2} - a \sqrt{1 + (2\alpha a)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Osservazione 4: Non sempre l'integrale che figura in (9) è calcolabile elementarmente, anche nel caso di funzioni di “ordinaria amministrazione”. ♦

3. VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ continua.

Diagrammato il grafico di f sul piano cartesiano Oxy , ci proponiamo di calcolare il volume del solido di rotazione $\mathcal{S}$ generato nello spazio $Oxyz$ dalla rotazione completa del rettangoloide di f attorno all'asse delle ascisse x .⁵

Un modo sensato per determinare il volume di tale solido sembra consista nell'approssimare, dall'interno e dall'esterno, il solido $\mathcal{S}$ con solidi elementari di cui sappiamo valutare il volume.

La sensatezza di tale intuizione discende dall'analogia con il caso di figure piane: infatti, a ben vedere, su una tale approssimazione si basa la costruzione della misura di Peano–Jordan degli insiemi del piano.

Un modo abbastanza naturale di approssimare il solido $\mathcal{S}$ consiste nel suddividere l'altezza, ossia l'intervallo $[a, b]$, in intervallini e di considerare opportuni cilindretti che si formano tra i piani perpendicolari all'asse x passanti per gli estremi degli intervallini.

Fissiamo allora una decomposizione $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$ e consideriamo i cilindri (circolari retti) $\mathcal{C}'_n$ generati ruotando attorno all'asse delle ascisse i rettangoli di base il segmento dell'asse corrispondente all'intervallo $[x_{n-1}, x_n]$ ed altezza uguale ad m_n , essendo $m_n := \min_{[x_{n-1}, x_n]} f$. Poiché per ogni indice n il rettangolo che genera $\mathcal{C}'_n$ è contenuto nel rettangoloide $\mathcal{R}_f$, è evidente che $\mathcal{C}'_n \subseteq \mathcal{S}$ per $n = 1, 2, \dots, N$ e da ciò segue che il pluricilindro $\mathcal{C}'_D$ corrispondente all'unione dei cilindretti $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \dots, \mathcal{C}'_N$ è contenuto in $\mathcal{S}$.

⁵Qui stiamo nuovamente sfruttando il *sensu comune* del lettore. Infatti, non abbiamo fornito alcuna definizione di “volume” per solidi spaziali e ciò, a rigore, ci impedisce di parlare di “volume di $\mathcal{S}$ ” e, a maggior ragione, di usare formule per calcolarlo. Questo aspetto “formale” della faccenda verrà chiarito durante il corso di Analisi II e, per ora, chiediamo al lettore di accontentarsi della nozione di volume che il proprio senso comune gli consente di “percepire”.

Un semplice calcolo mostra che il volume di ogni cilindretto $\mathcal{C}'_n$ è:

$$\text{vol}(\mathcal{C}'_n) = \pi m_n^2 \cdot (x_n - x_{n-1})$$

cosicché il volume del pluricilindro inscritto $\mathcal{C}'_D$ è:

$$v_D(f) = \sum_{n=1}^N \pi m_n^2 \cdot (x_n - x_{n-1}) .$$

Analogamente, consideriamo i cilindri (circolari retti) $\mathcal{C}''_n$ generati ruotando attorno all'asse delle ascisse i rettangoli di base il segmento dell'asse corrispondente all'intervallo $[x_{n-1}, x_n]$ ed altezza uguale ad m_n , essendo $M_n := \max_{[x_{n-1}, x_n]} f$. Poiché l'unione dei rettangoli ora detti contiene il rettangoloide $\mathcal{R}_f$, è evidente che il pluricilindro $\mathcal{C}''_D$, corrispondente all'unione dei cilindretti $\mathcal{C}''_1, \mathcal{C}''_2, \dots, \mathcal{C}''_N$ contiene $\mathcal{S}$. Un semplice calcolo mostra che il volume di ogni cilindretto $\mathcal{C}''_n$ è:

$$\text{vol}(\mathcal{C}''_n) = \pi M_n^2 \cdot (x_n - x_{n-1})$$

cosicché il volume del pluricilindro circoscritto $\mathcal{C}''_D$ è:

$$V_D(f) = \sum_{n=1}^N \pi M_n^2 \cdot (x_n - x_{n-1}) .$$

Evidentemente abbiamo $v_D(f) \leq V_D(f)$ e però si può dire di più, cioè che i due insiemi numerici:

$$H = \{v_D(f), D \text{ decomposizione di } [a, b]\}$$

$$K = \{V_D(f), D \text{ decomposizione di } [a, b]\}$$

sono separati e perciò hanno $\sup H \leq \inf K$.

Sempre in analogia col caso bidimensionale, saremmo tentati di chiamare *volume di $\mathcal{S}$* l'unico numero separatore dei due insiemi H e K , *qualora esso esista*.

Mostriamo che ciò è effettivamente possibile, poiché le ipotesi fatte su f ci consentono di affermare che senza dubbio le classi H e K hanno un unico numero separatore.

Fissata una decomposizione D , consideriamo le quantità $v_D(f)$ e $V_D(f)$. Poiché f è non negativa in $[a, b]$ e $\pi > 0$, per ogni indice n abbiamo:

$$\begin{aligned} \pi m_n^2 &= \pi \left(\min_{[x_{n-1}, x_n]} f \right)^2 \\ &= \pi \min_{[x_{n-1}, x_n]} f^2 \\ &= \min_{[x_{n-1}, x_n]} \pi f^2 \\ \pi M_n^2 &= \pi \left(\max_{[x_{n-1}, x_n]} f \right)^2 \\ &= \pi \max_{[x_{n-1}, x_n]} f^2 \\ &= \max_{[x_{n-1}, x_n]} \pi f^2 \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \pi m_n^2 &= \min_{[x_{n-1}, x_n]} g \\ \pi M_n^2 &= \max_{[x_{n-1}, x_n]} g , \end{aligned}$$

con $g : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo $g(x) := \pi f^2(x)$; da ciò segue che le quantità $v_D(f)$ e $V_D(f)$ coincidono, rispettivamente, con le somme di Riemann

inferiore e superiore relative alla funzione g determinate dalla decomposizione D , cioè che:

$$\begin{aligned} v_D(f) &= s_D(g) \\ V_D(f) &= S_D(g) . \end{aligned}$$

Conseguentemente abbiamo:

$$\begin{aligned} H &= \{s_D(g), D \text{ decomposizione di } [a, b]\} \\ K &= \{S_D(g), D \text{ decomposizione di } [a, b]\} \end{aligned}$$

e, dato che g è evidentemente continua in $[a, b]$, dalla teoria dell'integrale di Riemann consegue che tali due insiemi hanno effettivamente un unico numero separatore, cioè il numero:

$$\int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b \pi f^2(x) \, dx .$$

Pertanto, possiamo ritenere valida la formula:

$$(10) \quad \text{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi f^2(x) \, dx .$$

Un buon motivo per ritenere corretta la (10) è che essa restituisce risultati già noti dalla Geometria Elementare. Per lumeggiare le ragioni di tale affermazione proponiamo alcuni esempi.

Esempio 5 (Volume di un Cilindro Circolare Retto): Consideriamo la funzione $f : [0, h] \rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo $f(x) := r$ (con $r, h > 0$) e calcoliamo il volume del solido $\mathcal{C}$ generato dalla rotazione attorno all'asse delle ascisse del rettangoloide $\mathcal{R}_f$. Usando la (10) troviamo:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{C}) &= \pi \int_0^h r^2 \, dx \\ &= \pi r^2 [x]_0^h \\ &= \pi r^2 h , \end{aligned}$$

e ciò concorda con le formule della Geometria Elementare, in quanto $\mathcal{C}$ è un *cilindro circolare retto con altezza h e raggio di base r* .

Esempio 6 (Volume di un Tronco di Cono Circolare Retto): Consideriamo la funzione $f : [0, h] \rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo:

$$f(x) := \frac{R-r}{h}x + r$$

(con $h, r, R > 0$ ed $r < R$) e calcoliamo il volume del solido $\mathcal{T}$ ottenuto ruotando il rettangoloide $\mathcal{R}_f$ attorno all'asse delle ascisse. Usando la (10) troviamo:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\mathcal{T}) &= \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^2 dx \\
 &= \pi \frac{h}{R-r} \int_0^h \frac{R-r}{h} \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^2 dx \\
 &= \pi \frac{h}{R-r} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^3 \right]_0^h \\
 &= \frac{\pi}{3} \frac{h}{R-r} \left[\left(\frac{R-r}{h}h + r \right)^3 - r^3 \right] \\
 &= \frac{\pi}{3} \frac{h}{R-r} (R^3 - r^3) \\
 &= \frac{\pi}{3} h(R^2 - rR + r^2) .
 \end{aligned}$$

Anche questo risultato concorda con le formule della Geometria Elementare, in quanto $\mathcal{T}$ è un *tronco di cono circolare retto di altezza h , con base minore di raggio r e base maggiore con raggio R* .

In particolare, prendendo $r = 0$, dalla precedente si trae la nota formula per il volume del *cono circolare retto con altezza h e base di raggio R* , cioè:

$$\text{vol}(\mathcal{T}) = \frac{\pi}{3} h R^2 .$$

Esempio 7 (Volume di una Sfera): Calcoliamo il volume del solido $\mathcal{S}$ che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse delle ascisse il rettangoloide relativo alla funzione $f : [-r, r] \rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ (con $r > 0$). Per la (10) abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\mathcal{S}) &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= \pi \left(\int_{-r}^r r^2 dx - \int_{-r}^r x^2 dx \right) \\
 &= \pi \left(r^2 [x]_{-r}^r - \frac{1}{3} [x^3]_{-r}^r \right) \\
 &= \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) \\
 &= \frac{4}{3} \pi r^3 ,
 \end{aligned}$$

e ciò concorda con la nota formula della Geometria Elementare, in quanto $\mathcal{S}$ è la *sfera di centro O e raggio r dello spazio $Oxyz$* .

Esempio 8 (Volume di un'Ellissoide di Rotazione): Consideriamo la funzione $f : [-a, a] \rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo:

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} .$$

Il volume del solido di rotazione $\mathcal{E}$ ottenuto facendo ruotare $\mathcal{R}_f$ attorno all'asse delle ascisse è dato da:

$$\begin{aligned}\text{vol}(\mathcal{E}) &= \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a \\ &= \pi \frac{b^2}{a^2} \left(2a^3 - \frac{2}{3} a^3 \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi a b^2 .\end{aligned}$$

Facendo un disegno si vede che il solido $\mathcal{E}$ è un ellissoide di rotazione, con centro nell'origine del sistema di riferimento $Oxyz$ e semiassi di lunghezza, rispettivamente, a , b e b .

Osservazione 5: Notiamo esplicitamente che l'integrando $\pi f^2(x)$ rappresenta l'area della sezione $\mathcal{S}_x$ del solido $\mathcal{S}$ determinata dal piano perpendicolare all'asse delle ascisse condotto per il punto di ascissa $x \in [a, b]$ (infatti, tale sezione è un cerchio di raggio $f(x)$).

Conseguentemente, la formula (10) può essere riscritta come:

$$(11) \quad \text{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \text{area}(\mathcal{S}_x) \, dx ,$$

ed in tale forma essa vale anche per solidi “sensati”⁶ che non sono di rotazione.

Infatti, la formula (11) afferma che per conoscere il volume di un solido “sensato” $\mathcal{S}$ basta conoscere la funzione $x \mapsto A(x) = \text{area}(\mathcal{S}_x)$, che descrive le aree di tutte le sue sezioni determinate dal fascio di piani perpendicolari all'asse delle ascisse, ed integrarla nell'intervallo su cui essa è definita, cioè dall'ascissa a del primo piano del fascio che incontra $\mathcal{S}$ fino all'ascissa b dell'ultimo piano del fascio che incontra $\mathcal{S}$.

Alla luce dei risultati del Calcolo Integrale, la formula (11) non è poi così sorprendente.

Infatti, consideriamo una figura piana $\mathcal{F}$ che sia costituita dai punti compresi tra i grafici di due funzioni $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e tali che $f(x) \leq g(x)$. L'area (o, per dirla correttamente, la misura di Peano–Jordan) di $\mathcal{F}$ si calcola semplicemente facendo la differenza tra gli integrali di g ed f estesi ad $[a, b]$, ossia:

$$\text{area}(\mathcal{F}) = \int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx ,$$

e tale formula può, per proprietà distributiva, essere riscritta come segue:

$$\text{area}(\mathcal{F}) = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx .$$

L'integrando $g(x) - f(x)$ al secondo membro è la lunghezza del segmento $\mathcal{F}_x$ che la retta perpendicolare all'asse delle ascisse condotta per $x \in [a, b]$ stacca sulla figura $\mathcal{F}$, perciò possiamo scrivere:

$$(12) \quad \text{area}(\mathcal{F}) = \int_a^b \text{lung}(\mathcal{F}_x) \, dx ,$$

⁶Così come ci sono insiemi del piano ai quali non è possibile assegnare un'area (poiché non misurabili secondo Peano–Jordan, ad esempio), così esistono insiemi dello spazio cui non è possibile assegnare un volume. Qui e nel seguito ci limitiamo a considerare dei solidi “sensati”, che siano limitati ed ai quali si possa assegnare (anche intuitivamente) un volume.

in completa analogia con la (11) (seppure con “una dimensione in meno”). ♦

Osservazione 6 (Interpretazione Euristica delle Formule (11) e (12)): La formula (11) che fornisce il volume come integrale di un’area può essere interpretata come segue:

“Il volume del solido $\mathcal{S}$ è dato dalla *somma* dei volumi elementari $dV = \text{area}(\mathcal{S}_x) dx$ di infiniti cilindri infinitesimi, ognuno dei quali avente base con area $A(x) = \text{area}(\mathcal{S}_x)$ ed altezza dx ”;

analogamente, la formula (12) che fornisce l’area come integrale di una lunghezza può essere interpretata come segue:

“L’area della figura $\mathcal{F}$ è data dalla *somma* delle aree elementari $dA = \text{lung}(\mathcal{F}_x) dx$ di infiniti rettangoli infinitesimi, ognuno dei quali avente base con lunghezza $l(x) = \text{lung}(\mathcal{F}_x)$ ed altezza dx ”.

Tali interpretazioni, seppure intuitive ed utilissime per semplificare molti calcoli nelle applicazioni, sono del tutto *euristiche* e non si possono inscrivere in un quadro teorico elementare: pertanto, esse non trovano posto nella *Teoria dell’Integrazione* che viene proposta nei corsi di Analisi. ♦

Osservazione 7: Notiamo che le (11) e (12) forniscono una giustificazione del cosiddetto *Principio di Cavalieri* sull’equiestensione di solidi e di figure piane, il quale afferma che:

- (1) due solidi $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ hanno uguale volume se e solo se ogni piano appartenente ad un fissato fascio di piani paralleli che incontra $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ stacca, su ognuno dei due solidi, sezioni aventi la stessa area;
- (2) due figure piane $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ hanno uguale area se e solo se ogni retta appartenente ad un fissato fascio di rette parallele che incontra $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ stacca, su ognuna delle due figure, sezioni aventi la stessa lunghezza.

♦

4. MASSA DI UN CILINDRO CON DENSITÀ VARIABILE

Consideriamo un cilindro circolare retto $\mathcal{C}$ avente altezza h e raggio di base r , costituito da un materiale omogeneo avente *densità volumica* costante $\rho > 0$. Scelto opportunamente un sistema di riferimento *Oxyz* dello spazio, il solido $\mathcal{C}$ può essere pensato come generato dalla rotazione rispetto all’asse delle ascisse del rettangoloide relativo alla funzione $f : [0, h] \rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo $f(x) := r$. Visto che la densità volumica esprime il rapporto tra massa e volume, è evidente che la massa $m(\mathcal{C})$ può essere calcolata come prodotto:

$$(13) \quad m(\mathcal{C}) = \rho \, \text{vol}(\mathcal{C}) .$$

In molte applicazioni a casi reali, la densità ρ del materiale costituente un certo solido può conservare un minimo di variabilità (dovuta a fattori fisici o causata dall’uso di materiali non del tutto omogenei).

Ad esempio, se il solido $\mathcal{C}$ fosse un campione di suolo derivante da una prova di carotaggio, a stratificazioni di materiali diversi potrebbero corrispondere densità

diverse: in tal caso, la densità ρ del materiale costituente il cilindro non risulta costante e, anzi, dipende dall'altezza dello strato della *carota* che stiamo analizzando. Pertanto, possiamo porci il problema di calcolare la massa di un cilindro costituito da materiale non omogeneo; in particolare, di un cilindro costituito da materiale avente densità variabile in funzione della sola altezza.⁷

In tal caso, come notato più sopra, il cilindro può essere pensato come ottenuto ruotando il rettangoloide relativo alla funzione $f(x) := r$ definita in $[0, h]$ e la densità variabile si può esprimere attraverso una funzione $\rho : [0, h] \rightarrow [0, +\infty[$. Sulla funzione ρ faremo, per comodità di calcolo, l'ipotesi che essa sia una funzione continua.⁸

Per calcolare la massa del cilindro $\mathcal{C}$ procediamo come al solito, cioè “approssimando” con un po' di buon senso.

Fissata una decomposizione $D = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = h\}$, suddividiamo il cilindro $\mathcal{C}$ in n cilindretti $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, sezionando $\mathcal{C}$ con piani paralleli alle basi passanti per i punti $x_k \in D$. Se l'altezza dei cilindretti è sufficientemente piccola, la densità volumica in ognuno di essi è pressoché costante e si può approssimare con un qualsiasi valore assunto dalla funzione ρ in un fissato punto dell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Detto ξ_k un qualsiasi punto di $[x_{k-1}, x_k]$, la massa di $\mathcal{C}_k$ si può calcolare usando la (13), cioè moltiplicando $\rho(\xi_k)$ per il volume di $\mathcal{C}_k$:

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}_k) &= \rho(\xi_k) \operatorname{vol}(\mathcal{C}_k) \\ &= \rho(\xi_k) \cdot \pi r^2 (x_k - x_{k-1}) , \end{aligned}$$

cosicché:

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}) &\approx \sum_{k=1}^n m(\mathcal{C}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \pi r^2 \cdot \rho(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) . \end{aligned}$$

Detta $\mu : [0, h] \rightarrow [0, +\infty[$ la funzione che assegna $\mu(x) := \pi r^2 \rho(x)$, la precedente si può riscrivere come:

$$m(\mathcal{C}) \approx \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = \sigma_D(\mu; \xi_1, \dots, \xi_n) ,$$

perciò la massa di $\mathcal{C}$ è una quantità approssimabile con la somma di Riemann $\sigma_D(\mu; \xi_1, \dots, \xi_n)$, relativa alla funzione continua $\mu(x) := \pi r^2 \rho(x)$ rispetto alla decomposizione D e subordinata alla scelta dei punti $\xi_1, \dots, \xi_n$. Per definizione di integrale, all'infittirsi della decomposizione D le somme $\sigma_D(\mu; \xi_1, \dots, \xi_n)$ diventano prossime al numero:

$$\int_0^h \mu(x) \, dx = \int_0^h \pi r^2 \rho(x) \, dx ,$$

ed intuitivamente possiamo identificare la massa del cilindro $\mathcal{C}$ proprio con tale numero.

Pertanto, la massa di $\mathcal{C}$ è fornita dalla formula:

$$(14) \quad m(\mathcal{C}) = \pi r^2 \int_0^h \rho(x) \, dx ,$$

⁷Ovviamente, altre situazioni sono possibili; ma qui scegliamo di limitarci ad un caso molto semplice.

⁸Tale assunzione è abbastanza restrittiva, in quanto il materiale costituente il cilindro potrebbe essere molto “disomogeneo”: ad esempio, in una carota del tipo detto in precedenza, uno strato di terriccio potrebbe essere sovrapposto ad uno strato di argilla compatta ed, in tal caso, la funzione densità avrebbe una discontinuità di salto nel passaggio tra uno strato e l'altro.

la quale restituisce la (13) in caso di densità costante.

Osservazione 8 (Interpretazione Euristica della (14)): Ricordando le notazioni del paragrafo precedente, chiamiamo $\mathcal{C}_x$ la sezione di $\mathcal{C}$ determinata da un piano perpendicolare all'asse delle ascisse passante per il punto di ascissa $x \in [0, h]$. Visto che $\mathcal{C}_x$ è un cerchio di raggio r , la formula (14) può essere riscritta:

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}) &= \int_0^h \rho(x) \pi r^2 dx \\ &= \int_0^h \rho(x) \text{area}(\mathcal{C}_x) dx \end{aligned}$$

e tale uguaglianza può essere interpretata come segue:

“La massa di un cilindro formato da materiale di densità variabile in funzione dell'altezza è la *somma* delle masse elementari $dm = \rho(x) \text{area}(\mathcal{C}_x) dx$ di infiniti cilindri infinitesimi, ognuno dei quali ha base con $\text{area}(\mathcal{C}_x)$, altezza dx e densità $\rho(x)$ ”.



Osservazione 9 (Generalizzazione della (14)): L'interpretazione euristica appena fornita ci consente di intuire che la formula (14) può essere generalizzata a solidi di rotazione qualsiasi.

Invero, se $\mathcal{S}$ è il solido di rotazione ottenuto ruotando il rettangoloide di $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ e se il materiale che costituisce $\mathcal{S}$ ha densità $\rho : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ dipendente unicamente dall'altezza, la massa totale di $\mathcal{S}$ può essere ottenuta *sommando* le infinite masse elementari dm di cilindri infinitesimi aventi base con $\text{area}(\mathcal{S}_x) = \pi f^2(x)$, altezza dx e densità $\rho(x)$, ossia:

$$\begin{aligned} m(\mathcal{S}) &= \int_a^b \rho(x) \text{area}(\mathcal{S}_x) dx \\ (15) \quad &= \pi \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx . \end{aligned}$$



ESERCIZI

Esercizio 1: Modificare la formula (10) in modo da riuscire a calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il rettangoloide $\mathcal{R}_f$ di un qualsiasi angolo $\vartheta \in]0, 2\pi]$ attorno all'asse delle ascisse .

Esercizio 2: Siano $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua, derivabile con derivata prima continua e concava in $[0, 1]$ e Γ la curva-grafico di f .

1. Provare che se $f(0) = 0 = f(1)$, allora risulta:

$$\text{lungh}(\Gamma) \leq 3 .$$

[**Suggerimento:** Notare che $\text{lungh}(\Gamma) \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx$; per terminare, sfruttare il *Teorema di Rolle* e ricordare che f' è decrescente.]

2. Fornire un'interpretazione geometrica del punto 1.

Esercizio 3: a. Usando un ragionamento euristico si trovi una motivazione per la formula:

$$\text{per}(\mathcal{S}) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

che restituisce l'area laterale del solido di rotazione $\mathcal{S}$ ottenuto ruotando il rettangoloide $\mathcal{R}_f$ di una funzione di classe C^1 in $[a, b]$.

b. Calcolare l'area laterale dei solidi di rotazione elementari (cilindro, tronco di cono, cono e sfera) e confrontare i risultati ottenuti con le formule della Geometria Elementare.

c. Come si deve modificare la formula precedente per calcolare la superficie laterale del solido ottenuto ruotando $\mathcal{R}_f$ attorno all'asse delle ascisse di un qualsiasi angolo $\vartheta \in]0, 2\pi]$?

Esercizio 4: a. Considerata la funzione $f_h : [1, h] \rightarrow [0, +\infty[$ (con $h > 1$) definita ponendo $f_h(x) := 1/x$, calcolare il volume del solido di rotazione $\mathcal{S}_h$ ottenuto ruotando $\mathcal{R}_f$ attorno all'asse delle ascisse.

b. Posto, per ogni $h \in]1, +\infty[$, $v(h) := \text{vol}(\mathcal{S}_h)$ ed $s(h) := \text{per}(\mathcal{S}_h)$, calcolare i limiti:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} v(h) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} s(h) .$$

Per calcolare il secondo limite si consiglia di minorare opportunamente l'integrale che fornisce $s(h)$ ed usare il *Teorema del Confronto*.

c. Sia $\mathcal{S}$ il solido ottenuto ruotando attorno all'asse delle ascisse il rettangoloide (non limitato!) sotteso al grafico della funzione $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ definita ponendo $f(x) := 1/x$.

È possibile assegnare intuitivamente ad $\mathcal{S}$ un volume ed un'area laterale?

Se sì, quali?⁹

Esercizio 5: Una sfera di legno avente raggio $R > 0$ viene forata, lungo un diametro, con un trapano avente punta di diametro $d > 0$. Calcolare il volume del solido ottenuto.

Esercizio 6: Siano $a > 0$, $f : [-a, a] \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione *pari*, di classe C^1 in $[-a, a]$, tale che $f(-a) = 0 = f(a)$.

Detto $\mathcal{S}$ il solido di rotazione che si ottiene ruotando il rettangoloide $\mathcal{R}_f$ attorno all'asse delle ascisse, possiamo definire le tre misure geometriche:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{S}) &= \pi \int_{-a}^a f^2(x) \, dx , \\ \text{per}(\mathcal{S}) &= 2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx , \\ \text{sec}(\mathcal{S}) &= 2 \int_{-a}^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

le quali restituiscono, rispettivamente, il volume di $\mathcal{S}$, l'area laterale di $\mathcal{S}$ e l'area delle sezioni di $\mathcal{S}$ determinate da piani che contengono l'asse di rotazione.

⁹Il solido $\mathcal{S}$ venne "scoperto" da G. B. Torricelli e, viste le sue paradossali proprietà, la sua dignità di oggetto matematico venne messa in dubbio per lungo tempo.

a. Dimostrare che vale la disuguaglianza:

$$\text{per}(\mathcal{S}) - t \cdot \sec(\mathcal{S}) \geq 0$$

per ogni $t \in [0, \pi]$.

b. Usare la relazione:

$$\text{per}^3(\mathcal{S}) \geq 36\pi \cdot \text{vol}^2(\mathcal{S}) ,$$

detta *disuguaglianza isoperimetrica*¹⁰, per dimostrare che, per ogni $t \in [0, \pi]$, esiste una costante $c = c(t) \geq 0$ tale che:

$$(\text{per}(\mathcal{S}) - t \cdot \sec(\mathcal{S}))^3 \geq c \cdot \text{vol}^2(\mathcal{S}) .$$

GUGLIELMO DI MEGLIO, PhD
 SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
 UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”
 PIAZZALE TECCHIO 80
 80126 NAPOLI – ITALY
 EMAIL: guglielmo.dimeglio@unina.it

¹⁰Tale disuguaglianza esprime il fatto che l'area laterale di un solido di rotazione è maggiore dell'area laterale della sfera che ha lo stesso volume. Infatti, detto $V > 0$ il volume del solido $\mathcal{S}$, la sfera $\mathcal{S}^*$ avente lo stesso volume di $\mathcal{S}$ ha raggio $r^* = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ e area laterale $\text{per}(\mathcal{S}^*) = 4\pi(r^*)^2$, e perciò:

$$\begin{aligned} \text{per}(\mathcal{S}) \geq \text{per}(\mathcal{S}^*) &\Leftrightarrow \text{per}^3(\mathcal{S}) \geq \text{per}^3(\mathcal{S}^*) \\ &\Leftrightarrow \text{per}^3(\mathcal{S}) \geq 4^3 \pi^3 (r^*)^6 \\ &\Leftrightarrow \text{per}^3(\mathcal{S}) \geq 4^3 \pi^3 \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \text{per}^3(\mathcal{S}) \geq 36\pi \cdot V^2 \\ &\Leftrightarrow \text{per}^3(\mathcal{S}) \geq 36\pi \cdot \text{vol}^2(\mathcal{S}) . \end{aligned}$$