ESERCIZI 6

(1) La soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[4]{1+y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è definita in tutto $\mathbb{R}$? Disegnare il grafico di $y(x)$.

(2) Supponiamo che la funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ abbia derivata parziale rispetto ad y limitata. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Provare che, se

$$\frac{1}{2} \leq f(x,y) \leq 1, \qquad x \geq 0,$$

allora il grafico di $y(x)$ è contenuto nel settore del primo quadrante compreso tra le semirette uscenti da O di equazioni $y = \frac{x}{2}$ e $y = x$.

(3) Provare che, fissato $a > 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y - x^2} \\ y(0) = a \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione y_a in un intorno di 0. Calcolare le derivate prima, seconda e terza di y_a in 0.

(4) Stabilire l'insieme di definizione della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione può annullarsi in tale insieme?

(5) Provare che l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(x^4 + y^3\right) \sqrt[3]{x} \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

è una funzione pari.

(6) Verificare che l'unica soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(2-y)e^{\sin y} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

è definita in tutto $\mathbb{R}$ e che

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 2.$$

(7) Verificare che la funzione $y(x) = x$ risolve l'equazione differenziale

$$x^2y'' - (2x + x^2)y' + (2 + x)y = 0$$

e scrivere l'integrale generale dell'equazione.

(8) Scrivere un'equazione differenziale lineare omogenea che ammetta le seguenti soluzioni $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$.

(9) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$(x^2 - x)y' = y^2 + y,$

$y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2},$

$xy' = y - x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right),$

$y' = \dfrac{2x + 16y - 18}{9x + 2y + 19},$

$x^2\dfrac{y'}{y} + 2x\log|y| = 0,$

$(x^2 + 1)y' + 2y^2 - 3xy = 0.$

(10) Trovare un fattore integrante del tipo $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(x+y)$ o $\mu = \mu(xy)$ per le seguenti equazioni ed integrarle:

$(x + y)\,dx + dy = 0,$

$y^2dx + (xy + 1)dy = 0,$

$(3x^5y^8 - y^3)dx + (5x^6y^7 + x^3)dy = 0.$

(11) Risolvere l'equazione differenziale

$$y = xy' + g(y')$$

quando $g(t) = t^3$, oppure $g(t) = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}$, $a > 0$.

(12) Risolvere la seguente equazione integrale

$$y = x^2 + \int_1^x \frac{y(t)}{t}dt.$$

(13) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - (y - x)(y - x - 2) \\ \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

al variare el parametro reale λ. Determinare per quali valori di λ il problema ammette soluzione definita in tutto $\mathbb{R}$. Stabilire poi se esistono valori di λ per i quali il problema ammette soluzione limitata.