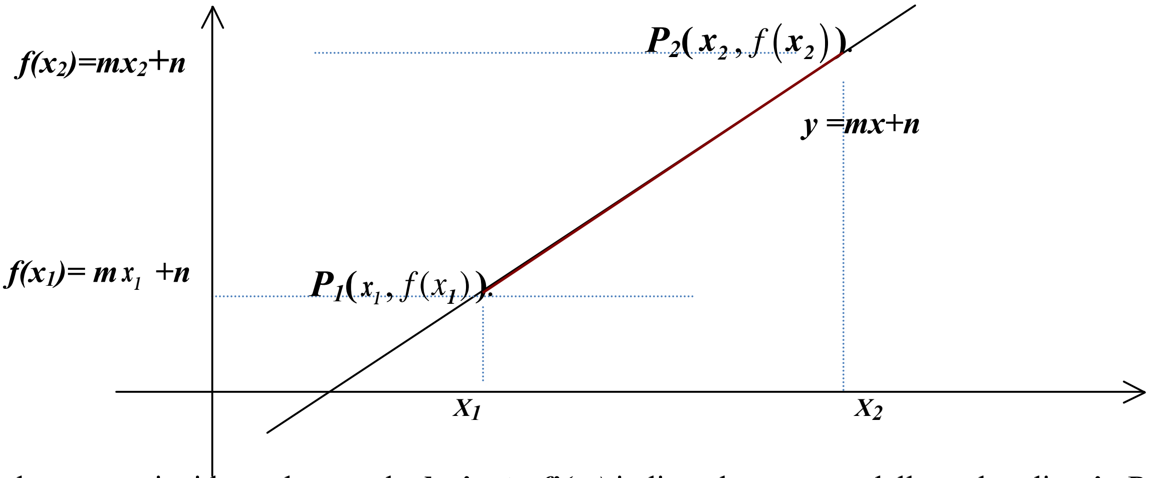
SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA IN UN PUNTO x_0 E DEFINIZIONE DI RETTA TANGENTE IN $P_0(x_0, f(x_0))$

PREMESSA

Sia ***f*: $x \in R \rightarrow f(x) = mx+q$** una ***funzione affine.*** Il grafico di ***f*** è la retta ***y = mx+q*** e il coefficiente ***m*** della ***x*** rappresenta la pendenza della retta sull'asse *x* delle ascisse, cioè la tangente dell'angolo non negativo che la retta forma con l'asse delle ascisse; è allora ***m= tag θ***, con θ misura in radianti di tale angolo: risulta: ***m= 0 se θ=0 (retta orizzontale), m > 0 se θ∈]0, π/2[(grafico "crescente" e tanto più ripido quanto più θ è vicino a π/2) e m<0 se θ∈]π/2, π[(grafico "decrescente" e tanto più ripido quanto più θ è vicino a π/2).***

La pendenza ***m*** della retta coincide con il **rapporto incrementale** di ***f***, relativo al passaggio della variabile indipendente da un valore x_1 a un valore x_2, indipendentemente dalla scelta di x_1 e x_2 in *R con* $x_1 \neq x_2$.:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = m \quad \forall x_1, x_2 \in R : x_1 \neq x_2 . \qquad \textbf{(1)}$$



La pendenza ***m*** coincide anche con la **derivata *f'(x₀)*** indipendentemente dalla scelta di ***x₀* in** R

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} m = m \quad \forall x_0 \in R \qquad \textbf{(2)}$$

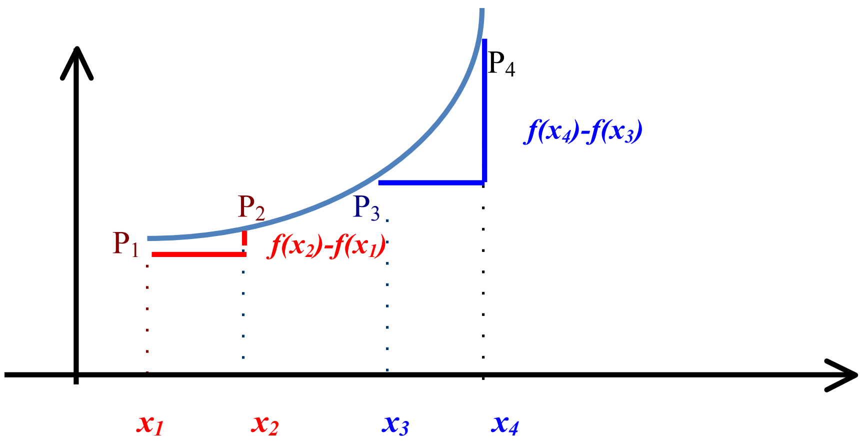
La costanza del rapporto incrementale e della derivata è una caratteristica della funzione affine non presente nelle altre funzioni.

Per una funzione non affine *il rapporto incrementale* (1) *non è costante ma dipende dalla scelta dei valori distinti* x_1 e x_2 *della variabile indipendente e la derivata* (2) *dipende dal punto* x_0 *considerato.*

$x_4 - x_3 = x_2 - x_1$
ma

$f(x_4)-f(x_3) > f(x_2)-f(x_1)$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$$

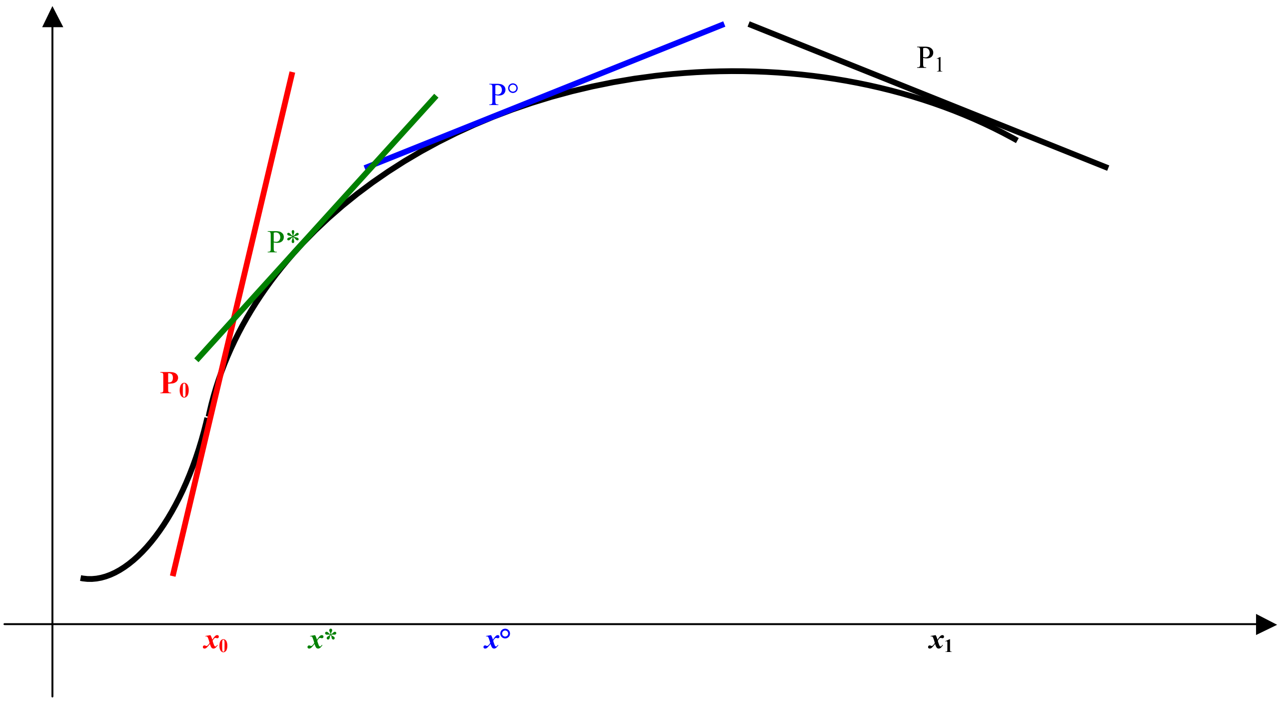


Pertanto, se ha senso sparlare di pendenza del grafico di una funzione affine, non ha senso in generale parlare di "***pendenza" (***globale) del grafico di una funzione qualsiasi: il grafico si può presentare in alcuni tratti più *ripido* in altri più "*adagiato*". Si deve pertanto pensare a una "***pendenza locale"***, cioè a una *pendenza della curva in un punto del grafico*, pendenza che varia da punto a punto se il grafico non è una retta; la domanda allora è**:**

come definire la pendenza in un punto $\mathbf{P_0}(x_0, f(x_0))$***?***

L'idea è quella di scegliere tra le rette che passano per un punto $\mathbf{P_0}(x_0, f(x_0))$ del grafico quella che più "***aderisce***" nelle immediate vicinanze di $\mathbf{P_0}$ alla curva – grafico e di assegnare come pendenza alla curva nel punto quella della retta suddetta; la domanda allora diviene:

come individuare la retta che più aderisce al grafico intorno a $\mathbf{P_0}$***?***



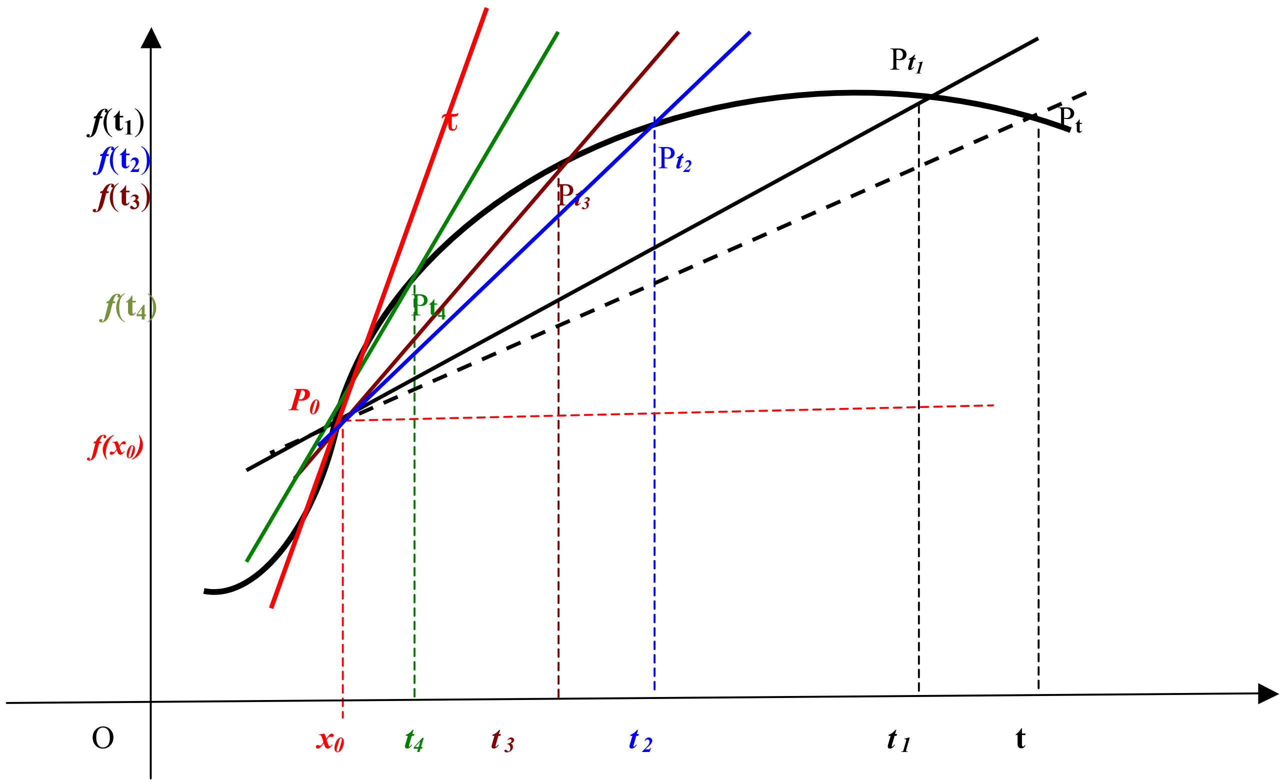
Per individuare tale retta, che deve passare per $\mathbf{P_0}(x_0, f(x_0))$**,** è sufficiente determinare la sua pendenza m_0.
Operiamo la ricerca di m_0, nel caso in cui la funzione sia continua in x_0 e quindi il grafico non si rompa in nel punto $\mathbf{P_0}(x_0, f(x_0))$**.** Chiameremo tale retta, se esiste, ***retta tangente*** al grafico di f nel punto $\mathbf{P_0}(x_0, f(x_0))$ e la sua pendenza "***pendenza della curva y=f(x) ne punto*** $\mathbf{P_0}$**.**

Vedremo di seguito un approccio abbastanza intuitivo alla determinazione della retta scopo della nostra ricerca.

1. PENDENZA DELLA CURVA *y=f(x)* in $P_0(x_0, f(x_0))$ E RETTA TANGENTE IN P_0

Sia ***f: x∈X → f(x)*** ***<u>continua</u> in*** x_0.

Si vuole determinare tra le rette per $P_0(x_0,f(x_0))$ la retta che **"*più aderisce* " alla curva grafico intorno a** P_0 e misurare attraverso essa ***la pendenza*** in tal punto della curva ***y=f(x).***



A tal fine si considera la generica retta per P_0 che incontra la curva in un altro punto P_t **(t, *f*(t)) (**retta secante la curva in P_0 e P_t**):** indichiamo tale retta con " r_t ".
La retta secante r_t ha pendenza

$$m(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \qquad \textbf{(3)}$$

ed equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(t) - f(x)}{t - x_0}(x - x_0) \qquad \textbf{(4)}$$

Man mano che il punto P_t si muove sulla curva avvicinandosi a P_0, cioè t si avvicina a x_0, il segmento $P_0\,P_t$ sulla secante si avvicina sempre di più all'arco di estremi P_0 **e** P_t sulla curva e tende a confondersi con esso quando P_t è estremamente vicino a P_0. Perciò:

la retta cercata è la retta **τ** *individuata dalla posizione limite a cui tende la retta secante* r_t *,* *quando il punto di intersezione* P_t *tende a* P_0*, cioè* ***t*** *tende a* x_0. ***Quale pendenza ha la retta*** **τ*?***

Al variare di ***t*** varia solo la pendenza ***m(t)*** della retta secante *e al tendere di **t a*** x_0*, per la (3),* ***m(t)*** *tende al seguente limite:*

$$\lim_{t\to x_0} m(t) = \lim_{t\to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = f'(x_0) \qquad \textbf{(5)}$$

Perciò la retta cercata è la retta **τ per $P_0(x_0,f(x_0))$ di pendenza $m_0 = f'(x_0)$.**

Allora, nelle ipotesi che ***f sia <u>continua</u> in*** x_0 ***ed <u>esista la derivata</u> di f in*** x_0 definiamo:

- **retta tangente in $P_0(x_0,f(x_0))$ alla curva $y= f(x)$,** la retta τ **per $P_0(x_0,f(x_0))$ di pendenza $f'(x_0)$;**
- **pendenza *in* $P_0(x_0,f(x_0))$ della curva $y= f(x)$ la derivata $f'(x_0)$** .

L'equazione della retta tangente dipende dal valore finito o infinito di $f'(x_0)$. Consideriamo i due casi

I) $f'(x_0) \in R$, cioè ***f derivabile in*** x_0.

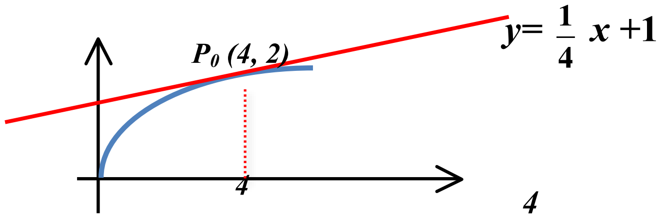
La retta tangente τ, retta per $P_0(x_0,f(x_0))$ di coefficiente angolare $m_0 = f'(x_0) \in R$, ha equazione

$$\tau) \quad y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) \qquad (6)$$

e la *curva grafico ha pendenza finita* $f'(x_0)$ in $P_0(x_0,f(x_0))$.

L'equazione **(6)** della retta tangente si ottiene dall'equazione (**4**) della retta secante sostituendo il coefficiente angolare $m(t)= \dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$ con il suo valore limite $f'(x_0)$.

Esempio 1. Sia $f: x\in[0, +\infty[\;\to f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$



La funzione f è continua in ogni punto, in particolare in $x_0= 4$. Consideriamo il punto $P_0(4, \sqrt{4}) = (4,2)$ e determiniamo la pendenza al grafico di f in tal punto e la retta tangente.

La pendenza è data dalla ***derivata in*** $x_0= 4$ della funzione:

$$f'(4) = \lim_{t\to 4}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{4}}{t-4} = \lim_{t\to 4}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{4}}{\left(\sqrt{t}\right)^2-\left(\sqrt{4}\right)^2} = \lim_{t\to 4}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{4}}{\left(\sqrt{t}-\sqrt{4}\right)\cdot\left(\sqrt{t}+\sqrt{4}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 4}\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{4}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Pertanto:

- $\frac{1}{4}$ **pendenza** di $y=\sqrt{x}$ **in** $P_0 = (4,2)$.

Poiché *la pendenza in* **in** P_0 *è un numero reale*, la retta tangente in $P_0 = (4,2)$ è, per la **(6)**, la retta di equazione

$$y = f(4) + f'(4)\,(x-4) \qquad \text{cioè:} \quad y = 2 + \frac{1}{4}(x-4),$$

quindi

- $y= \frac{1}{4}x+1$ **retta tangente in** $P_0 = (4,2)$.

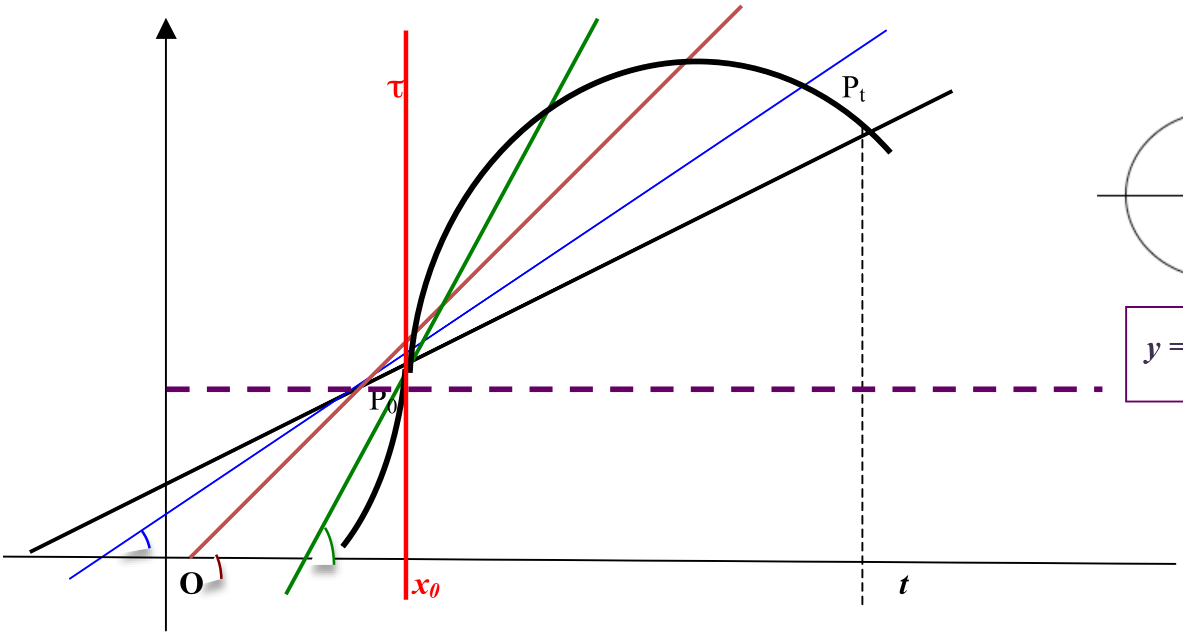
II) *f continua in x_0 e $f'(x_0) = \pm\propto$*

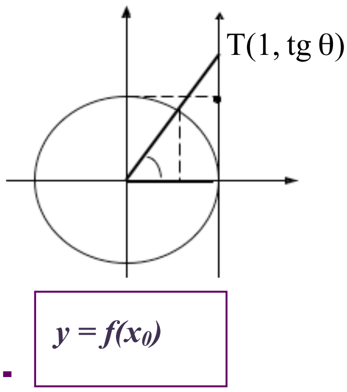
La pendenza della retta secante si può scrivere in termini di tangente dell'angolo di pendenza: ***m(t)*** $= \dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} = tag\,\theta(t)$ dove $\boldsymbol{\theta(t)} \in$ **[0, π/2[∪]π/2, π]** è la misura la dell'angolo positivo che la retta secante per $\boldsymbol{P_0(x_0, f(x_0))}$ e $\boldsymbol{P_t}$ **(t, *f*(t))** forma con l'asse delle ascisse**.** Allora

$$f'(x_0) = \lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} = \lim_{t\to x_0} tag\,\theta(t)$$

-- II₁) Sia $f'(x_0) = \lim_{t\to x_0} tag\,\theta(t) = +\propto$,

*Per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno **$I(x_0)$ di x_0** tale che **$tg\theta(t) > 0$ per ogni $t \in X\cap I(x_0) - \{x_0\}$;*** per tali ***t*** *è allora* ***θ(t)*** ∈ **]0, π/2[** ed è ovvio che: "***m(t) = tg θ(t) tende a +∝ per t che tende a x_0*" se e solo se "θ(t)*** in **]0, π/2[** ***tende a π/2 per t che tende a x_0***"

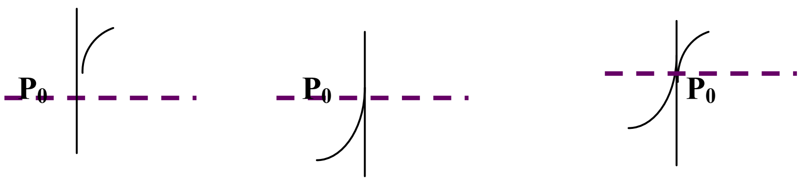




In altre parole ***al tendere di t a x_0, la retta secante forma un angolo acuto con l'asse delle x, e ruotando in senso antiorario, tende a divenire verticale*** **.** Pertanto la retta **τ** cui tende la retta secante è la retta di equazione $x = x_0$. La **retta tangente *τ*** ha perciò equazione

τ) $x = x_0$ e **la curva *y= f(x)* ha pendenza +∝ in P_0.**

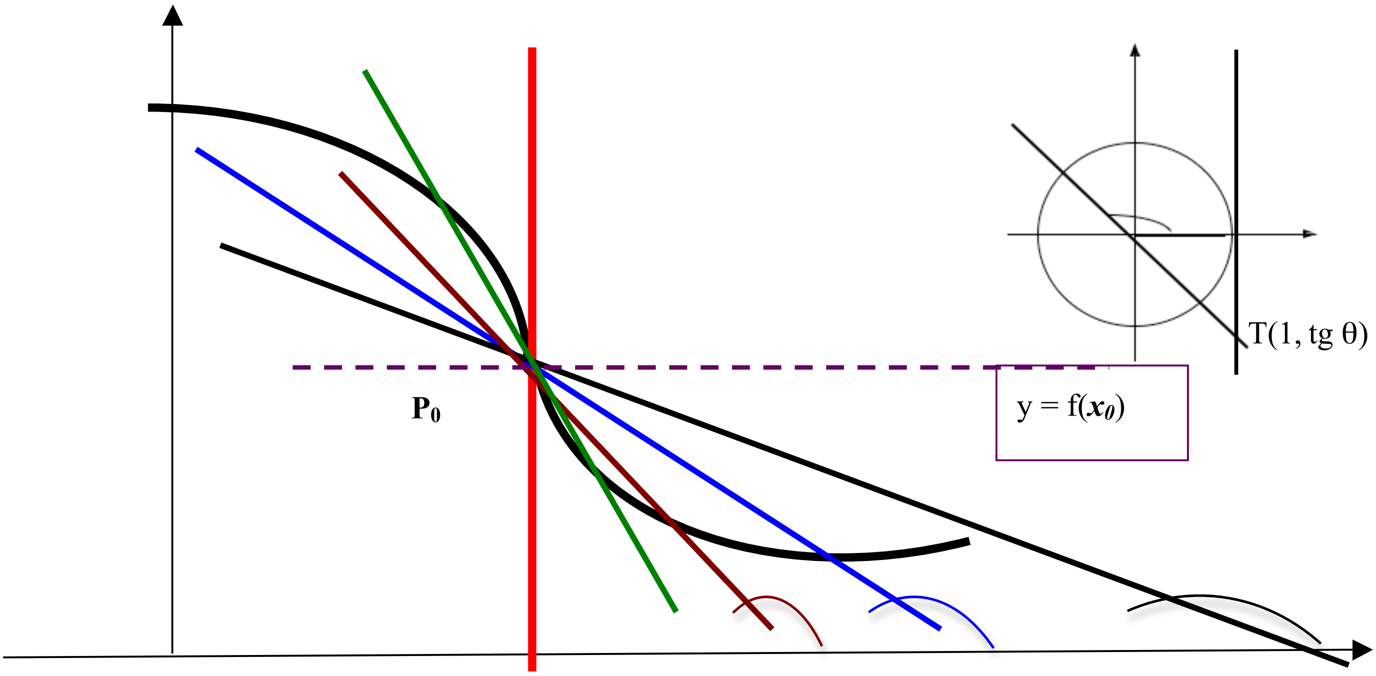
Comportamento del grafico intorno a P_0 - Sia $f'(x_0) = +\propto$. Per il teorema della permanenza del segno è $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) > 0$ in un opportuno intorno $I(x_0)$ di x_0 ; perciò se esiste $x > x_0$ in $X\cap I(x_0)$ è anche $f(x) > f(x_0)$, mentre se esiste $x < x_0$ in $X\cap I(x_0)$ è anche $f(x) < f(x_0)$; pertanto: ***se f è definita a destra di x_0, la curva in un intorno destro*** di x_0 ***è al di sopra*** della retta **y= *f*(x_0)** ***e giunge in*** P_0 ***dall'alto, mentre, se f è definita a sinistra di x_0, in un intorno sinistro*** di x_0 ***la curva è al di sotto*** della retta **y= *f*(x_0)** ***e giunge in*** P_0 ***dal basso***; se inoltre x_0 ***è un punto di accumulazione a destra e a sinistra il grafico attraversa la retta tangente e si flette in*** P_0**: allora P_0 è detto punto di flesso a tangente verticale**



$f'(x_0) = +\propto$

-- II$_2$) Sia $f'(x_0) = \lim_{t \to x_0} tag\,\theta(t) = -\infty$.

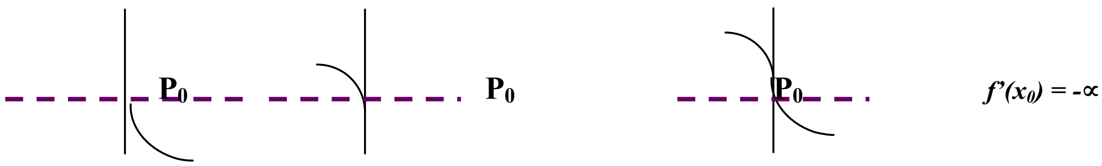
Per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno $I(x_0)$ ***di*** x_0 *tale che* $tg\theta(t) < 0$ ***per ogni*** $t \in X \cap I(x_0) - \{x_0\}$**:** per tali t *è allora* $\theta(t) \in]\pi/2, \pi]$ ed è ovvio che: "$m(t) = tg\ \theta(t)$ ***tende a*** $-\infty$ ***per t che tende a*** x_0" **se e solo se** "$\theta(t) \in]\pi/2, \pi]$ ***tende a*** $\pi/2$ per ***t che tende a*** x_0".



In altre parole ***al tendere di t a*** x_0***, la retta secante forma un angolo ottuso con l'asse delle x e ruotando in senso orario e tende a divenire verticale.*** Pertanto la retta τ **tangente in** P_0 ***ha equazione:***

τ) $x = x_0$ ***e la curva*** $y = f(x)$ ***ha pendenza*** $-\infty$ ***in*** P_0

Comportamento del grafico intorno a P_0. Sia $f'(x_0) = -\infty$. Per il teorema della permanenza del segno è $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) < 0$ in un opportuno intorno $I(x_0)$ di x_0 ; perciò se esiste $x > x_0$ in $X \cap I(x_0)$ è $f(x) < f(x_0)$, mentre se esiste $x < x_0$ in $X \cap I(x_0)$ è $f(x) > f(x_0)$; pertanto, ***se f è definita a destra di*** x_0***, la curva in un opportuno intorno destro*** di x_0 ***è al di sotto*** della retta $y = f(x_0)$ ***e giunge in*** P_0 ***dal basso, mentre, se f è definita a sinistra di*** x_0***, in un opportuno intorno sinistro*** di x_0 ***è al disopra della retta*** $y = f(x_0)$) ***e giunge in*** P_0 ***dall'alto***; se x_0 ***è un punto di accumulazione a destra e a sinistra il grafico attraversa la retta tangente e si flette in*** P_0: P_0 **è detto punto di flesso a tangente verticale**



IN CONCLUSIONE

Se " ***f continua in x_0 ed esiste f'(x_0)"*** si parla di **retta tangente in *$P_0(x_0,f(x_0))$* alla curva *$y= f(x)$*** e di **pendenza** della curva in ***$P_0(x_0,f(x_0))$*.**

- La **retta tangente**, per definizione**, è la retta τ per *$P_0(x_0,f(x_0))$* di pendenza *$f'(x_0)$*.**
- La **pendenza** della curva in ***$P_0(x_0,f(x_0))$* è la derivata *$f'(x_0)$* in *x_0*.**

(*significato geometrico della derivata in un punto***)**

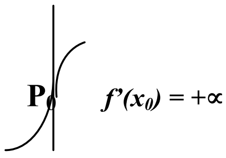
Nel caso **I)** in cui ***$f'(x_0)$* è un numero reale, la retta tangente è la retta di equazione**

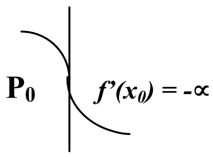
$$y= f(x_0) +f'(x_0)\ (x-x_0);$$

Nel caso **II)** in cui ***$f'(x_0) = +\infty$ o $f'(x_0) = -\infty$*, la retta tangente in $P_0(x_0, f(x_0))$ alla curva $y =f(x)$, è la retta verticale di equazione**

$$x= x_0$$

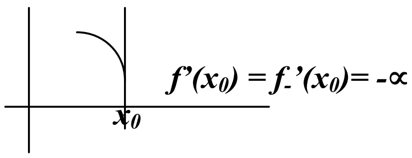
In quest'ultimo caso, si può osservare che: **se *x_0* *<u>è un punto di accumulazione a destra e a sinistra il grafico della funzione si flette</u> in*** **$P_0(x_0, f(x_0))$;**

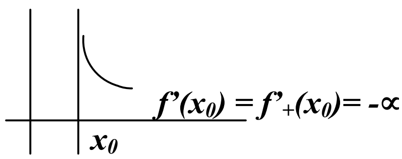


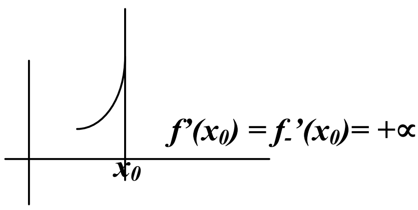


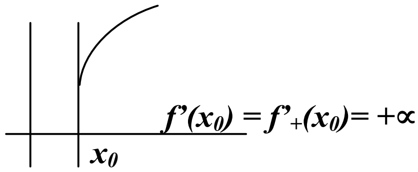
allora **$P(x_0, f(x_0))$** è detto **punto di flesso a tangente verticale.**

Se invece x_0 è di accumulazione solo a sinistra o solo a destra si presentano le situazioni di seguito illustrate









2. PUNTI ANGOLOSI E CUSPIDI ($f_-'(x_0) \neq f_+'(x_0)$)

$f : x \in X \to f(x)$, $\quad$ ***$x_0 \in X$ punto di accumulazione a destra e a sinistra***

Sia $f_-'(x_0) \neq f_+'(x_0)$ **.** Allora <u>non c'è retta tangente</u> in **P_0 ($x_0, f(x_0)$).**

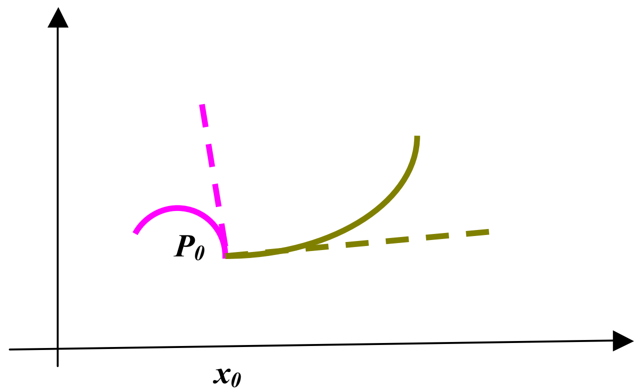
Come si presenta il grafico intorno a* P_0*?
Vediamo prima che significato hanno ***$f_-'(x_0)$ e $f_+'(x_0)$*** per il grafico.
Consideriamo le restrizioni ***h*** e ***g*** di ***f*** agli insiemi *parte di* X *a sinistra di* ***x_0*** *e parte di X a destra di* ***x_0.***

$$X_{x_0^-} = X \cap \left]-\infty, x_0\right] \qquad e \qquad X_{x_0^+} = X \cap \left]x_0, +\infty\right]$$

$$\boxed{h : x \in X_{x_0^-} \to f(x)} \qquad\qquad \boxed{g : x \in X_{x_0^-} \to f(x)}$$

Il grafico di f è l'unione dei grafici di h e g e ovviamente risulta

$$f_-'(x_0) = h'(x_0) \qquad e \qquad f_+'(x_0) = g'(x_0)$$



Allora derivata destra e derivata sinistra individuano rispettivamente una retta tangente in ***P_0 ($x_0, f(x_0)$)*** al grafico di ***h*** (in rosa) e una retta tangente in ***P_0 ($x_0, f(x_0)$)*** al grafico di ***g*** **(**in verde).

Se *$f_-'(x_0) \neq f_+'(x_0)$*, le semirette a cui effettivamente aderiscono il grafico di **h** e quello di **g** sono dette **semirette tangenti, o "semitangenti***"*, al grafico della funzione nel punto ***P_0 ($x_0, f(x_0)$).***
(*ma non si parla di retta tangente in P_0 alla curva y= f(x)***))**

Per il comportamento del grafico intorno a P_0, consideriamo due situazioni**.**

I^a SITUAZIONE: ***almeno una delle derivate $f_-'(x_0) = h'(x_0)$ e $f_+'(x_0) = g'(x_0)$ è finita.***

Le due semi tangenti hanno direzioni diverse e quindi formano un angolo (vedi figura sopra**).**

P_0 (*$x_0, f(x_0)$*) è detto pertanto <u>punto angoloso</u>

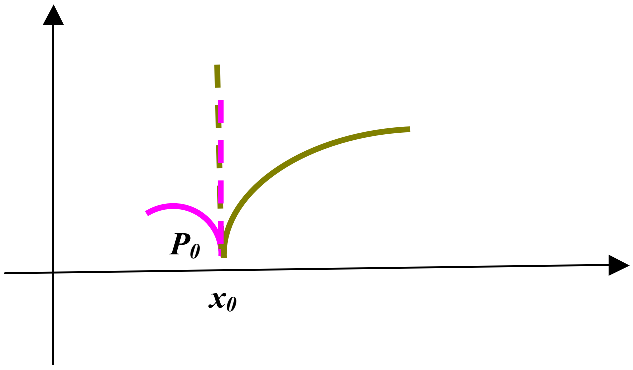
II[a] SITUAZIONE: ***le derivate $f_-'(x_0) = h'(x_0)$ e $f_+'(x_0) = g'(x_0)$ sono entrambe infinite ma di segno diverso.***

Le due semitangenti hanno la stessa direzione *perché sono entrambe parti della retta* $x = x_0$: vedremo che esse coincidono. Consideriamo due casi.

Caso 1): $f_-'(x_0) = -\infty$ e $f_+'(x_0) = +\infty$

$f_-'(x_0) = -\infty \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_{0\,(<0)}} < 0$ *in un intorno sinistro di x_0: quindi $f(x)>f(x_0)$ a sinistra di x_0.*

$f_+'(x_0) = +\infty \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_{0\,(>0)}} > 0$ *in un intorno destro di x_0: quindi $f(x)>f(x_0)$ a destra di x_0.*

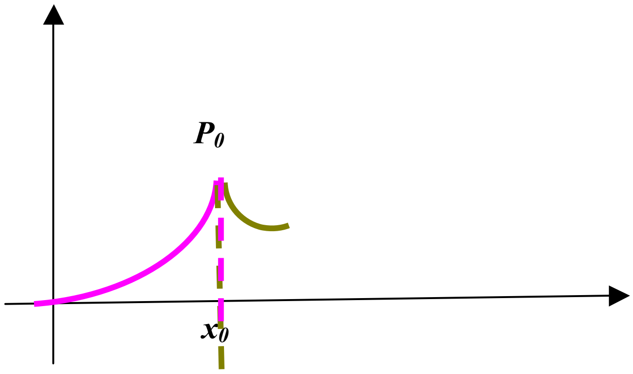


il grafico giunge in P_0, sia da destra che da sinistra, dall'alto e, aderendo alla semiretta tangente verticale, forma una cuspide: passando da sinistra a destra attraverso il punto, il grafico ritorna indietro risalendo verso l'alto

Caso 2): $f_-'(x_0) = +\infty$ e $f_+'(x_0) = -\infty$

$f_-'(x_0) = +\infty \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_{0\,(<0)}} > 0$ *in un intorno sinistro di x_0: quindi $f(x)<f(x_0)$ a sinistra di x_0.*

$f_+'(x_0) = -\infty \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_{0\,(>0)}} < 0$ *in un intorno destro di x_0: quindi $f(x) <f(x_0)$ a destra di x_0.*



il grafico giunge in P_0, sia da destra che da sinistra, dal basso e, aderendo alla semiretta tangente verticale, forma una cuspide: passando da sinistra a destra attraverso il punto, il grafico ritorna indietro ridiscendendo verso il basso

In entrambi i casi **P_0 (x_0, $f(x_0)$) è detto allora <u>cuspide o punto di regresso</u>**

ESERCIZIO.
Sono assegnati i seguenti grafici nei quali sono messi in evidenza i punti x_0

di non derivabilità:

a) cosa sai dire sulla derivata in x_0 o sulla derivata destra e sinistra in x_0 nei tre casi considerati?

b) per le tre funzioni rappresentate, ci sono punti in cui in cui la derivata è 0? Se si indicarli

c) indicare per ogni funzione rappresentata almeno un punto con derivata positiva e un punto con derivata negativa.