DINAMICA DEI FLUIDI

C. ALTUCCI

Dinamica dei Fluidi

Studia il moto delle particelle di fluido* sotto l'azione di tre tipi di forze:

Forze di superficie: forze esercitate attraverso una superficie (pressione)

Forze di volume : forze esercitate su tutto il volume di liquido (forza peso)

Forze d'attrito: forze che si oppongono al moto e si esercitano tra i vari elementi di volume

Moto stazionario

In generale la velocità $\vec{v}$ di una particella di fluido dipende dalla posizione (x,y,z) in cui si trova e dal tempo t :

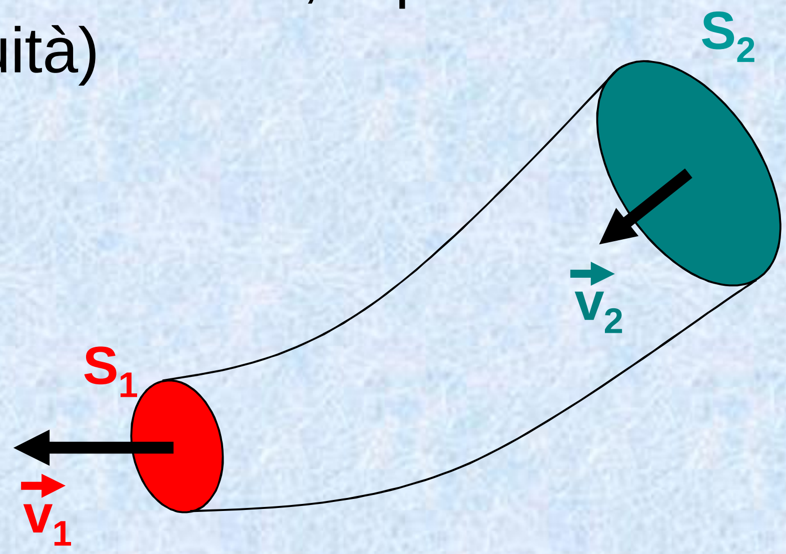
$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

Il moto è stazionario quando:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, \cancel{t})$$

* Le particelle di fluido non sono le molecole del fluido, ma sono elementi di volume di fluido, sufficientemente grandi affinché le fluttuazioni del numero di molecole contenute in esso sia costante.

Legge della portata (legge di Leonardo, equazione di continuità)



Ipotesi

Densità indipendente dal tempo
Moto stazionario
Condotto a pareti rigide
Assenza di “sorgenti” e di “pozzi”
Liquido incompressibile ed indilatabile

ΔV_1 = volume di liquido che attraversa S_1 nel tempo Δt

ΔV_2 = volume di liquido che attraversa S_2 nel tempo Δt

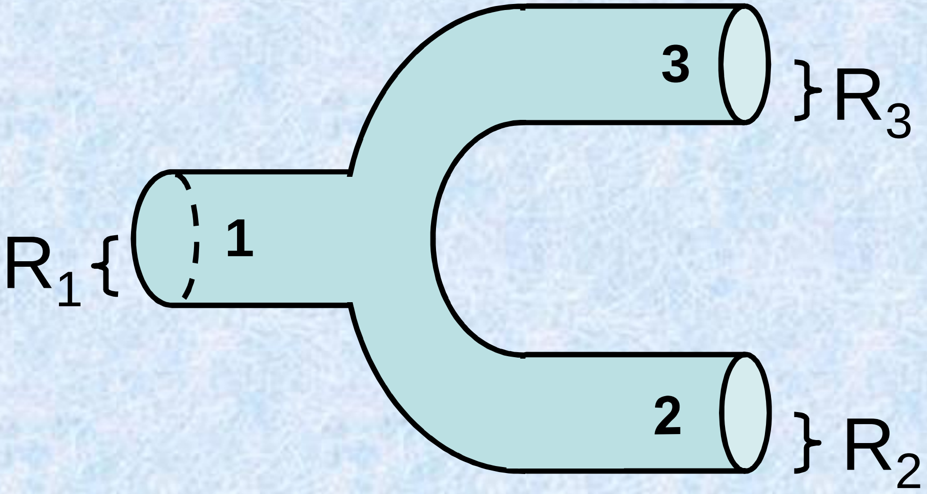
$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \Rightarrow Q_1 = Q_2$$

$\boxed{\boldsymbol{Q = DV / Dt} \textbf{ = Portata}}$

$\boxed{Q = cost \text{ (al variare della sezione)}}$ Legge di Leonardo

Si dimostra che $Q = S\,v \Rightarrow \boxed{S\,v = cost}$ Legge di Leonardo

Legge di Leonardo per una diramazione



Per la legge della portata

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$\pi R_1^2 \ v_1 = \pi R_2^2 \ v_2 + \pi R_3^2 \ v_3$$

$$\text{Se } R_2 = R_3 = R$$

$$v_2 = v_3 = v$$

$$\cancel{\pi} R_1^2 v_1 = 2 \cancel{\pi} R^2 v$$

$v = v_1 / 2$ $\quad$ $R_1 = R$ $\quad \Leftarrow \quad$ $v = (R_1 / R)^2 v_1 / 2$

Un condotto di raggio 3 cm si divide in tre rami, ciascuno di raggio 1 cm. Se la velocità del liquido nel condotto principale è di 5 m/s, quale è la velocità in ciascuno dei condotti secondari?

condotto principale = condotto 1 $r_1 = 3$ cm $v_1 = 5$ m/s

condotti secondari = condotto 2, condotto 3, condotto 4 $r_2 = r_3 = r_4 = r = 1$ cm

Per la legge della conservazione della portata:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Per simmetria $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$

$$Q_1 = 3\,Q$$

$Q_1 = S_1\, v_1 = \pi\, r_1^2\, v_1$ $Q = S\, v = \pi\, r^2\, v$

$$Q_1 = \pi\, r_1^2\, v_1 = 3\, \pi\, r^2\, v = 3\,Q$$

$$v = r_1^2\, v_1 / 3\, r^2 = (9\ cm^2 \times 5\ m/s) / 3\ cm^2 = 15\ m/s$$

Un'arteria con la portata di 0.5 cm^3/s si suddivide in n arteriole, ciascuna di raggio 100 μm. Sapendo che la velocità media del sangue in ciascuna arteriola è di 1.6 cm/s, dire quanto vale n.

$$Q_{arteria} = \text{portata dell'arteria}$$

$$Q_{arteriola} = \text{portata dell'arteriola} = v_m S = v_m \pi r^2$$

Per la legge della portata

$$Q_{arteria} = n\, Q_{arteriola}$$

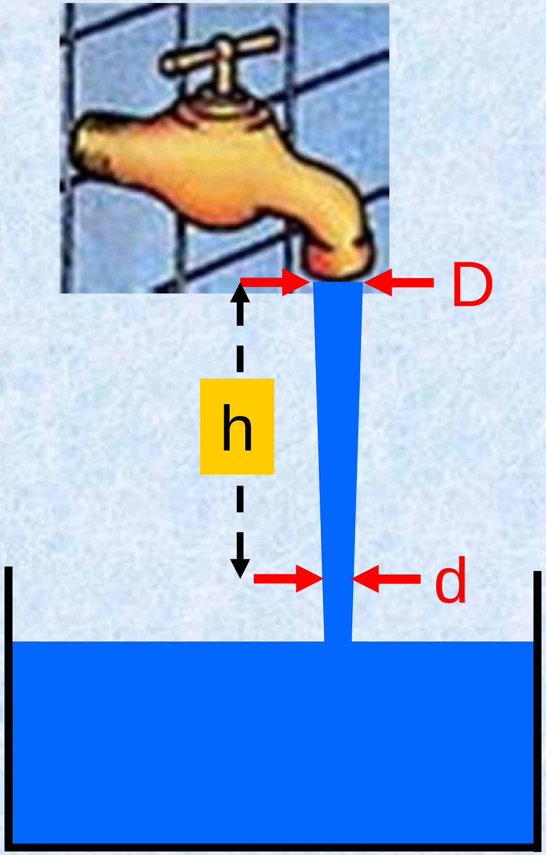
$$n = Q_{arteria} / Q_{arteriola} = Q_{arteria} / \pi v_m r^2 = 0.5\ cm^3/s\ /\ 3.14 \times 1.6\ cm/s \times (10^2\ 10^{-4}\ cm)^2 =$$

$$= 0.5\ cm^3/s\ /\ (3.14 \times 1.6\ cm/s \times 10^{-4}\ cm^2) = 0.5\ cm^3/s\ /\ (5.02\ cm/s \times 10^{-4}\ cm^2) =$$

$$\cong 10^{-1}\ cm^3/s\ /\ 10^{-4}\ cm^3/s = 10^3$$

$$n \cong 1000$$

Un rubinetto con diametro di 1 cm ha la portata di 30 l / min. Il getto d'acqua a 50 cm dal condotto di uscita ha il diametro di



$Q_{rubinetto}$ = 30 l /min = 30 dm^3 / 60 s = 30 10^{-3} m^3/60 s =
= 0.5 10^{-3} m^3/s

La velocità di uscita dell'acqua dal rubinetto è

$$v_{rubinetto} = Q_{rubinetto} / S = Q_{rubinetto} / \pi r^2 = Q_{rubinetto} / \pi (D/2)^2$$

$$v_{rubinetto} = 0.5\ 10^{-3}\ m^3/s\ /\ 3.14 \times (0.5\ 10^{-2})^2\ m^2 =$$
$$= 1 / (3.14 \times 0.5\ 10^{-1})\ m/s = 20 / 3.14\ m/s = 6.4\ m/s$$

Detta v la velocità dell'acqua nella sezione di diametro d per la legge della portata

$$Q_{rubinetto} = s\ v = \pi (d/2)^2 v = \pi (d^2/4)\ v$$

$$d^2 = 4Q_{rubinetto} / \pi v \Rightarrow d = 2 \sqrt{Q_{rubinetto} / \pi v}$$

L'acqua cade con moto uniformemente accelerato e la sua velocità v dopo che è caduta da un'altezza h è

$$v = \sqrt{v^2_{rubinetto} + 2 g h} = \sqrt{6.4^2 + 2 \times 9.8 \times 0.5\ m/s} \cong \sqrt{41 + 10}\ \ m/s = \sqrt{51}\ m/s = 7.14\ m/s$$

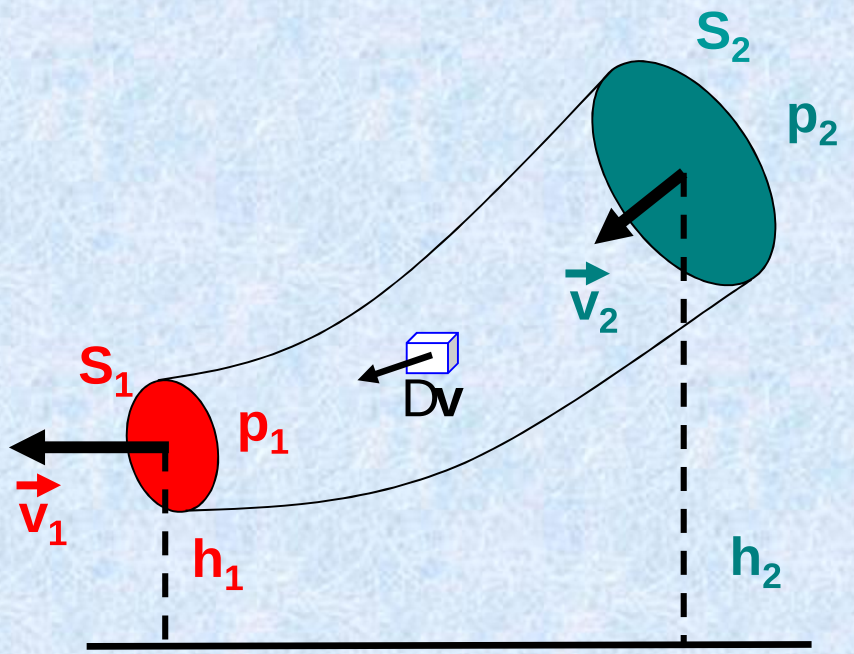
$$d = 2 \sqrt{Q_{rubinetto} / \pi v} = 2 \sqrt{0.5\ 10^{-3}\ m^3/s / 3.14 \times 7.14\ m/s} = 0.94\ cm$$

Teorema di Bernoulli

Ipotesi : liquido ideale

⇓

Si applica il principio di conservazione dell’energia meccanica al volume Δv



1) $DE_g = DV\, d\, g\, (h_2 - h_1)$ — Variazione di energia potenziale

2) $DE_c = DV\, d\, (v_2^2 - v_1^2)/2$ — Variazione di energia cinetica

3) $L = DV\, (p_1 - p_2)$ — Lavoro della pressione

4) $L = DE_g + DE_c$ — Conservazione dell’energia meccanica

p = pressione	v = velocità
S = sezione	h = altezza

Sostituendo le eq. 1, 2, 3 nell’eq. 4

$$DV\,(p_1 - p_2) + DV\, d\, g\,(h_1 - h_2) + DV\, d\,(v_1^2 - v_2^2) = 0$$

$$p_1 + d\, g\, h_1 + d\, v_1^2/2 = p_2 + d\, g\, h_2 + d\, v_2^2/2$$

Teorema di Bernoulli

$$\boxed{p + d\, g\, h + d\, v^2/2 = cost}$$

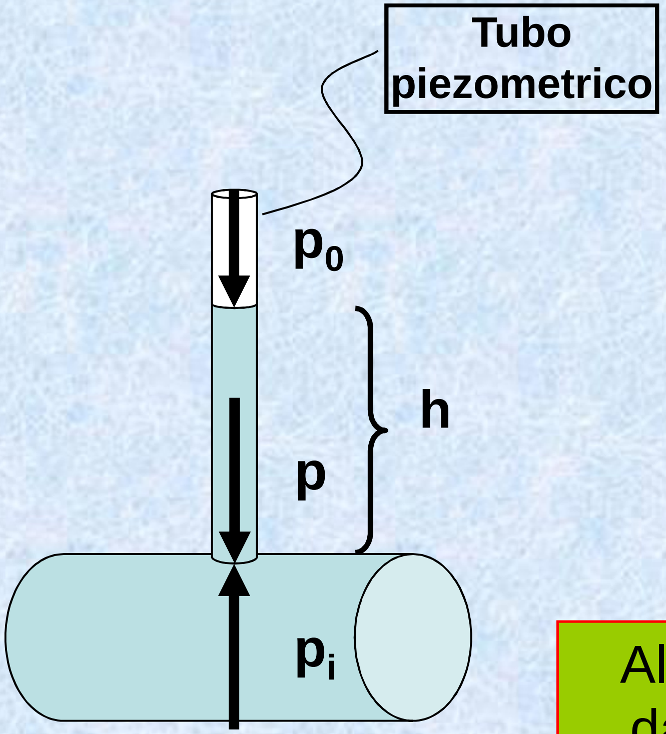
Il termine ***dv²/2*** prende il nome di “pressione cinetica”

Applicazioni del teorema di Bernoulli

$$\boxed{p + d\,g\,h + d\,v^2/2 = cost}$$

Dividendo tutti i termini dell'equazione precedente per *d g*

$$\boxed{p/dg + h + v^2/2g = cost}$$



p/dg = altezza piezometrica

$$\begin{cases} p_i = p & \text{Equilibrio nel tubo piezometrico} \\ p = p_0 + dgh & \text{Legge di Stevino} \end{cases}$$

$$p_i = p_0 + dgh$$

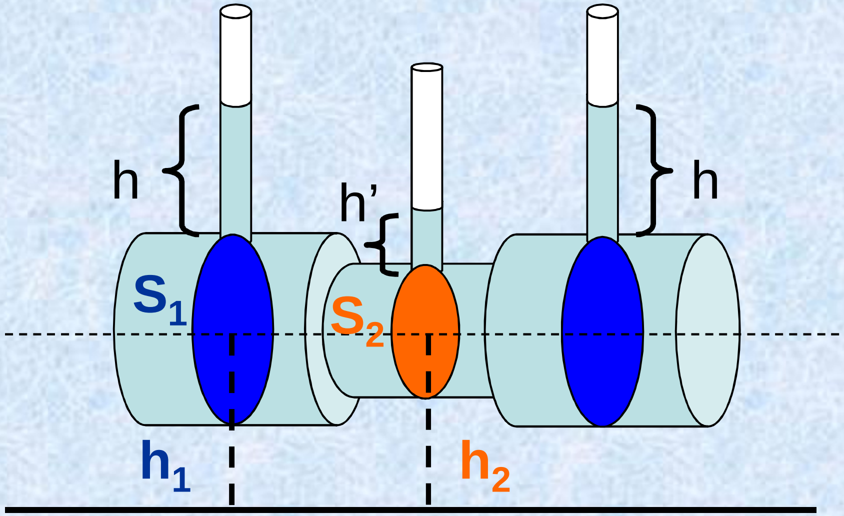
Pressione relativa interna = $p_i - p_0 = dgh$

$v^2/2g$ = altezza d'arresto

Altezza d'arresto = altezza massima raggiunta da un corpo lanciato verso l'alto con velocità v

Applicazioni del teorema di Bernoulli

Strozzatura di un tubo



$$p + d\,g\,h + d\,v^2 / 2 = cost$$

Consideriamo le due sezioni S_1 e S_2

$$p_1 + dgh_1 + dv_1^2/2 = p_2 + dgh_2 + dv_2^2/2$$

$$h_1 = h_2$$

$$p_1 + \cancel{dgh_1} + dv_1^2/2 = p_2 + \cancel{dgh_2} + dv_2^2/2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Legge della portata

$$p_2 - p_1 = d\,(v_1^2 - v_2^2)\,/\,2 < 0$$

$$v_1 = v_2\,(S_2 / S_1) < v_2 \qquad \text{poiché } S_2/S_1 < 1$$

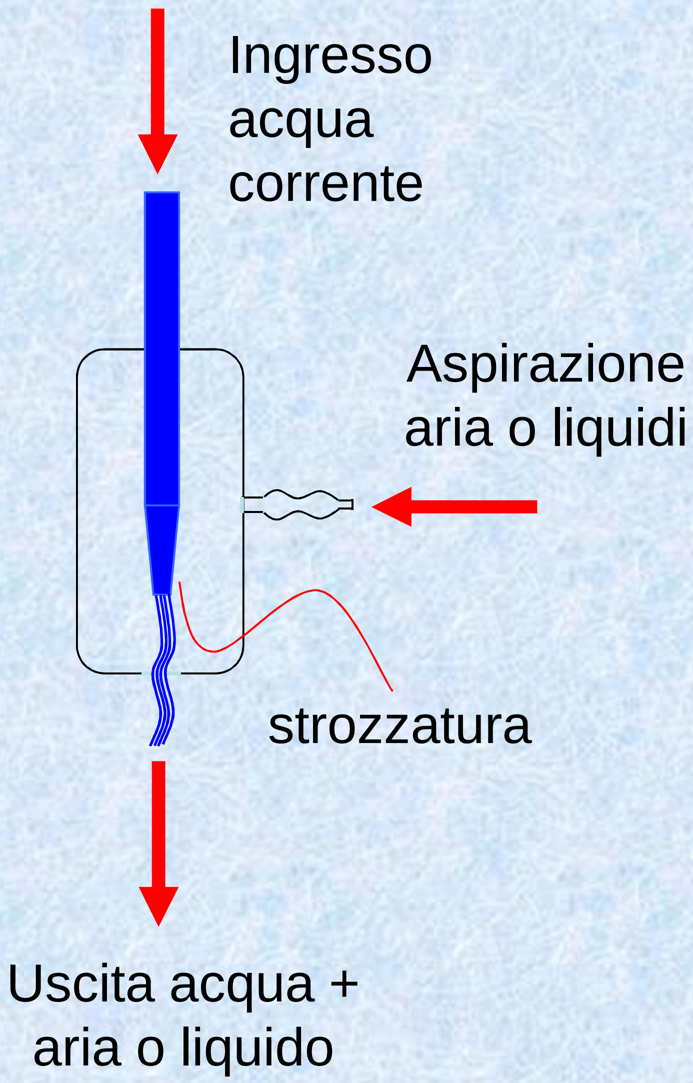
$$p_2 - p_1 < 0$$

$$v_1^2 < v_2^2 \Rightarrow v_1^2 - v_2^2 < 0$$

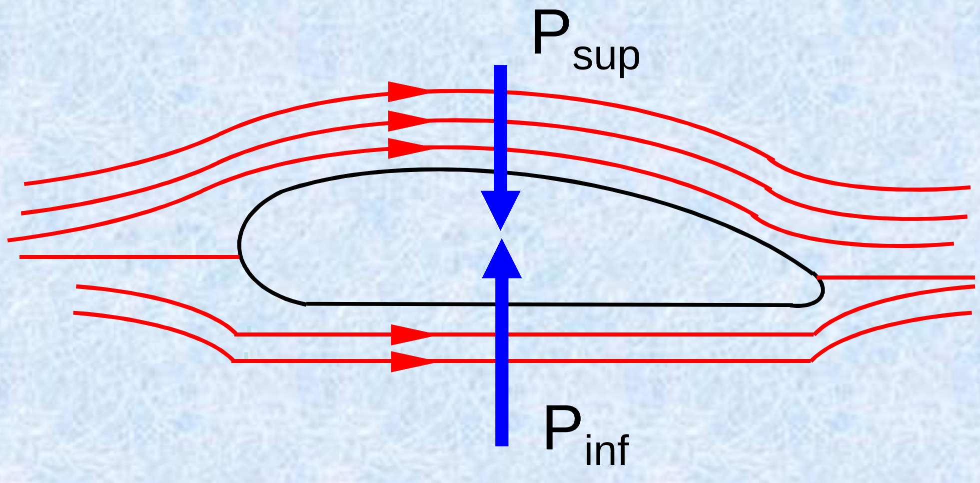
$$p_2 < p_1$$

Applicazioni del teorema di Bernoulli

Aspiratore ad acqua corrente



Forza su un'ala d'aereo



L'aria che scorre lungo la superficie superiore dell'ala, dovendo percorrere un percorso più lungo, ha una velocità maggiore di quella dell'aria sulla superficie inferiore: quindi la pressione sulla superficie superiore, P_{sup} è minore di quella sulla superficie inferiore P_{inf}

Un signore sta bevendo una bibita con una cannuccia di sezione 5 mm². Trascurando l'altezza della colonna di liquido contenuto nella cannuccia, quale pressione relativa deve esercitare sulla estremità della cannuccia per ottenere una portata di 10 ml/s?

Applichiamo il teorema di Bernoulli alla sezione del liquido nel recipiente (1) e alla sezione distale della cannuccia (2).

$$\boldsymbol{p_1+dgh_1+dv_1^2/2 = p_2+dgh_2+dv_2^2/2}$$

Ponendo l'origine delle altezze nella posizione della sezione 1 : $h_1 = 0$

Trascurando l'altezza della colonna di liquido contenuto nella cannuccia: $h_2 = 0$

Poiché la sezione 1 è molto maggiore della sezione 2, dalla legge della portata

$v_2 >> v_1$

Poiché $p_1 = p_0$

$$\boldsymbol{p_0+\cancel{dgh_1}+\cancel{dv_1}^2/2 = p_2+\cancel{dgh_2}+dv_2^2/2}$$

$$\boldsymbol{p_0 - p_2 = dv_2^2/2}$$

D'altra parte $Q_2 = S_2\, v_2$ $\Rightarrow$ $v_2 = Q_2 / S_2$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{p_0 - p_2 = dQ_2^2/2S_2^2}$

$$p_0 - p_2 = dQ_2^2/2S_2 = 10^3\ kg/m^3\ (10\ 10^{-3}\ l/s)^2 / 2 \times (5\ mm^2)^2 =$$
$$= 10^3\ kg/m^3\ (10^{-2}\ 10^{-3}\ m^3/s)^2/2(5\ 10^{-6} m^2)^2 = 10^{-7}/(2x25\ 10^{-12})\ N/m^2 = 10^{-7}/\ 5\ 10^{-11} N/m^2 =$$
$$= (1/5)\ 10^4\ N/m^2 = 0.2\ 10^4\ N/m^2 = 0.2\ 10^4\ N/m^2 / 10^5 = 2\ 10^{-2}\ atm = 15\ mm_{Hg}$$

Una fontanella a zampillo verticale ha il beccuccio di uscita la cui sezione è un cerchio di raggio 0.5 cm. Se la fontana è alimentata da un condotto di portata 1 l / s, a quale altezza arriverà il getto, se si trascurano le dissipazioni?

Poichè la portata Q è data da

$$Q = S\, v$$

la velocità con cui l'acqua esce dal beccuccio è

$$v = Q / s = (1\ l / s) / (\pi\ (5\ 10^{-3}\ m)^2 = (1\ dm^3/s) / (\pi\ 25\ 10^{-6}\ m^2) =$$

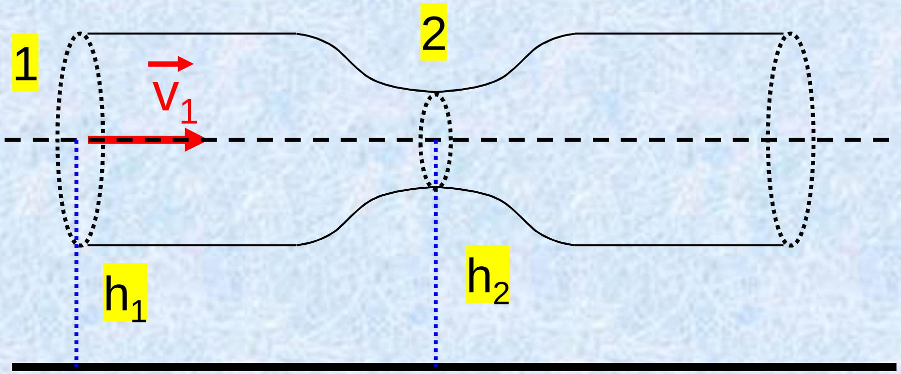
$$= (10^{-3}\ m^3 / s) / (\pi\ 25\ 10^{-6}\ m^2) = 10^3 / (\pi\ 25) = (40 / \pi)\ m/s$$

In assenza di dissipazioni l'energia cinetica con cui l'acqua esce dal beccuccio si trasforma, nel punto più alto della traiettoria, completamente in energia potenziale:

$$mv^2 / 2 = d\, g\, h \quad \Longrightarrow \quad h = v^2 / 2g$$

$$h = v^2 / 2g = (40 / \pi)^2 / (2 \times 9.8\ m/s^2) \cong 1600 / (\pi^2\ 20)\ m = 80 / 9.86\ m = 8.11\ m \cong 8\ m$$

In un condotto cilindrico, sufficientemente largo in modo che gli effetti degli attriti interni siano trascurabili, scorre dell'acqua in moto stazionario con la velocità di 10 m/s. Quanto vale al variazione di pressione che si verifica in una strozzatura che riduce alla metà la sezione del condotto?



E' possibile applicare il teorema di Bernoulli alla sezione 1 (sezione senza strozzatura) e alla sezione 2 (sezione con strozzatura):

$$p_1 + d\, g\, h_1 + d\, v_1^2/2 =$$
$$= p_2 + d\, g\, h_2 + d\, v_2^2/2$$

Condotto orizzontale: $h_1 = h_2$

Applicando la legge della portata alle due sezioni 1 e 2:

$$S_1\ v_1 = S_2\ v_2$$

$$v_2 = (S_2 / S_1)\ v_1 = 2\ v_1$$

$$p_1 + d\, v_1^2/2 = p_2 + d\, v_2^2/2$$

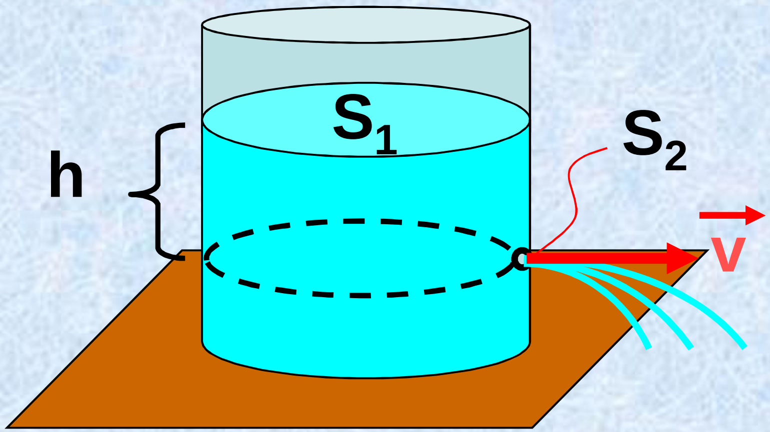
$$p_1 - p_2 = d\, (v_2^2 - v_1^2)/2$$

$$p_1 - p_2 = d\, (4v_1^2 - v_1^2)/2$$

$$p_1 - p_2 =$$
$$= 10^3\ kg/m^3\ (400\ m^2/s^2 - 100\ m^2/s^2)/2 =$$
$$= 150\ 10^3\ Pa = 1.5\ 10^5\ Pa = 1.5\ atm$$

Formula di Torricelli

Efflusso di un liquido da un foro



Applichiamo il Teorema di Bernoulli

$$p_1+dgh_1+dv_1^2/2 = p_2+dgh_2+dv_2^2/2$$

alle due sezioni

S_1 = sezione del recipiente

S_2 = sezione del foro << S_1

Prendendo come piano di riferimento il piano orizzontale passante per il foro:

$$1)\ \begin{cases} h_1 = h \\ v_1 << v_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} h_2 = 0 \\ v_2 = v \end{matrix} \qquad \begin{matrix} p_1 = p_0 \\ p_2 = p_0 \end{matrix}$$

Infatti, applicando il teorema della portata alle sezioni S_1 ed S_2

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$v_1 = v_2 \,(S_2 / S_1) << v_2$$

Inserendo le eq. 1

$$\cancel{p_0}+dgh+\cancel{dv_1^2/2} = \cancel{p_0}+\cancel{dgh_2}+dv_2^2/2$$

$$dgh = dv_2^2/2 = dv^2/2$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Un recipiente sulla cui parete è stato praticato un foro di di raggio 1.5 cm è riempito d'acqua tramite un rubinetto con la portata di 90 l/min. A quale altezza, rispetto al foro, si porterà, in condizioni stazionarie, il livello dell'acqua nel recipiente?

In condizioni stazionarie

$$\left.\begin{array}{l} Q_{foro} = S_{foro}\, v_{foro} \\ V_{foro} = \sqrt{2\,g\,h} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Q_{rubinetto} = Q_{foro} \\ Q_{foro} = S_{foro} V_{foro} = S_{foro} \sqrt{2\,g\,h} \end{array}\right\} \quad Q_{rubinetto} = S_{foro} \sqrt{2\,g\,h}$$

$$h = Q^2_{rubinetto} / (2\, S^2_{foro}\, g)$$

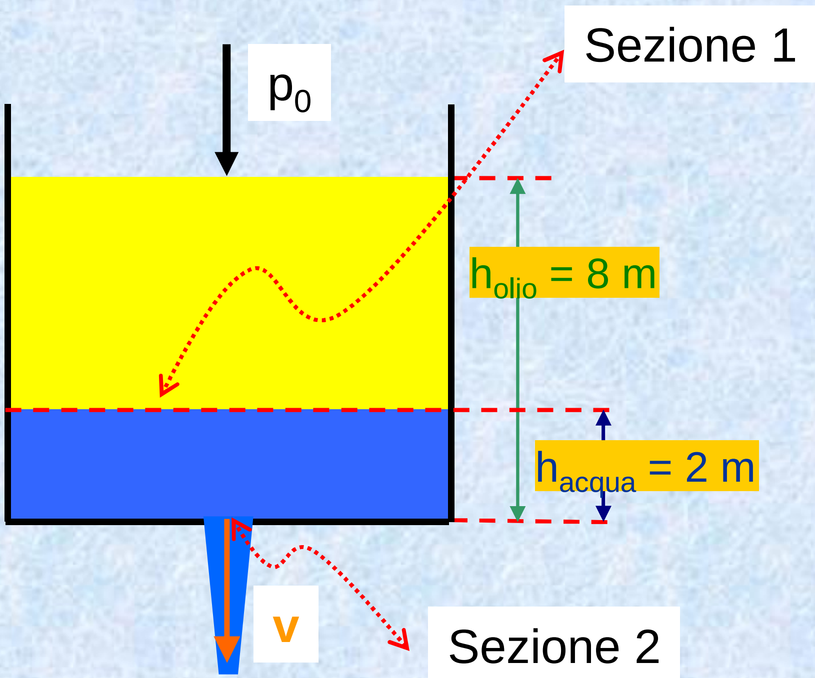
$$Q_{rubinetto} = 90 \text{ l /min} = 90 \text{ dm}^3/60 \text{ s} = 90\ 10^{-3} \text{ m}^3/ 60 \text{ s} = 3/2\ 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 1.5\ 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$S_{foro} = \pi\, r^2 = \pi\,(1.5\ 10^{-2} \text{ m})^2 = 2.\,25\,\pi\ 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$h = Q^2_{rubinetto} / (2\, S^2_{foro}\, g) = (1.5\ 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})^2 / 2 \times (2.25\,\pi\ 10^{-4} \text{ m}^2)^2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 =$$

$$= 2.25\ 10^{-6} \text{ m}^6/\text{s}^2 / 2 \times (2.25)^2\, 10^{-8} \text{ m}^4 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \cong 1 / (2 \times 2.25 \times \pi^2 \times 10^{-1}) \text{ m} =$$

$$= 10 /(5 \times 9.87) \text{ m} = 2 / 9.87 \text{ m} = 0.20 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$



Una cisterna è riempita di acqua ed olio (densità 0.9 g/cm^3) come in figura. Quale sarà la velocità di efflusso dell'acqua da un foro praticato sul fondo della cisterna?

Possiamo applicare il teorema di Bernoulli al moto dell'acqua. Consideriamo la sezione del recipiente (1) e del foro (2).

$$\boldsymbol{p_1+dgh_1+dv_1^2/2 = p_2+dgh_2+dv_2^2/2}$$

Misurando le altezze dal fondo della cisterna $\quad \boldsymbol{h_1 = h_{acqua}\,; \qquad h_2 = 0}$

Utilizzando la legge di Stevino $\quad p_1 = p_0 + d_{olio}\, g(h_{olio} - h_{acqua})$

Dalla legge della portata, poiché la sezione 1 è molto maggiore della sezione 2

$$v_2 >> v_1$$

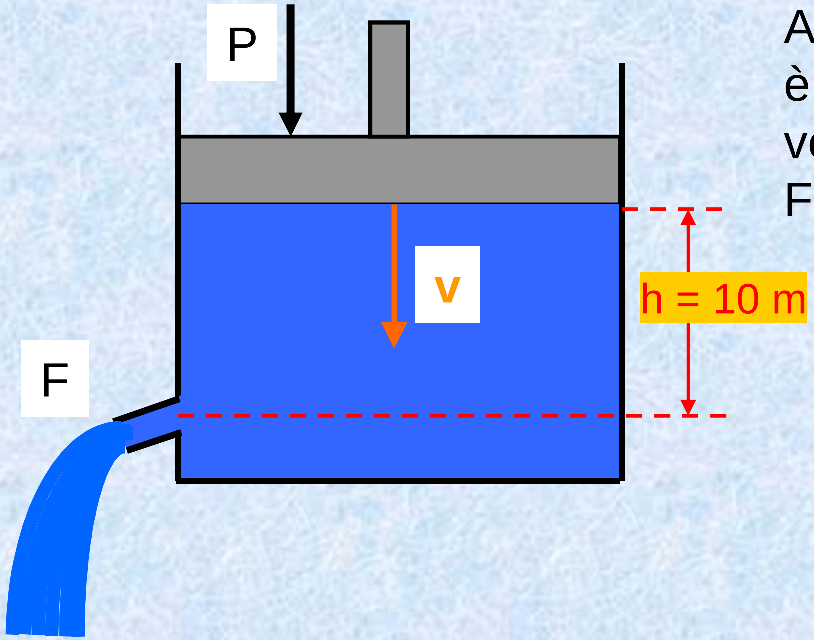
Poiché $p_2 = p_0$

$$p_1+dgh_1+\cancel{dv_1^2/2} = p_2+\cancel{dgh_2}+dv_2^2/2$$

$$\cancel{p_0}+d_{olio}g(h_{olio} - h_{acqua})+dgh_{acqua} = \cancel{p_0}+dv_2^2/2$$

$$v_2^2 = 2d_{olio}g(h_{olio} - h_{acqua})/d+2gh_{acqua} = 2 \times 0.9 \times 9.8\ m/s^2 \times 6\ m + 2 \times 9.8\ m/s^2 \times 2\ m =$$
$$= 18\ m/s^2 \times 6\ m + 40\ m^2/s^2 = 148\ m^2/s^2$$

$$v_2 = v = 12.2\ m/s$$



Al pistone che si muove alla velocità v = 20 m/s è applicata al pressione P = 6 atm. A quale velocità esce il liquido, supposto ideale, dal foro F ?

Poiché il liquido è un liquido ideale possiamo applicare il teorema di Bernoulli alla sezione 1 (sezione del recipiente, S) e alla sezione 2 (sezione del foro, s).

$$p_1 + d\,g\,h_1 + d\,v_1^2/2 =$$
$$= p_2 + d\,g\,h_2 + d\,v_2^2/2$$

Misurando le altezze dal livello del foro $\quad h_1 = h\,; \qquad h_2 = 0$

$$p_1 = P = 6\text{ atm};\ p_2 = p_0 = 1\text{ atm};\ v_1 = 20\text{ m/s};\ v_2 = v = \text{velocità di efflusso}$$

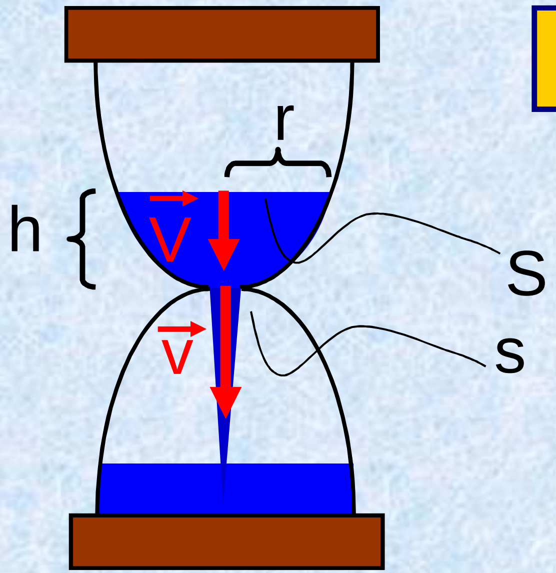
$$p_1 + d\,g\,h_1 + d\,v_1^2/2 = p_2 + d\,v_2^2/2 \Rightarrow p_1 + d\,g\,h_1 + d\,v_1^2/2 = p_2 + d\,v_2^2/2$$

$$d\,v_2^2/2 = p_1 - p_2 + d\,g\,h_1 + d\,v_1^2/2 \Rightarrow v_2^2 = 2(p_1 - p_2)/d + 2\,g\,h_1 + v_1^2$$

$$v_2^2 = 2(p_1 - p_2)/d + 2\,g\,h_1 + v_1^2 = 2(6 - 1)\text{ atm}/10^3\text{ kg/m}^3 + 2 \times 9.8\text{ m/s}^2\ 10\text{ m} + 400\text{ m}^2/\text{s}^2\ ]$$

$$= 2 \times 5\ 10^5\text{ N/m}^2/10^3\text{ kg/m}^3 + 200\text{ m}^2/\text{s}^2 + 400\text{ m}^2/\text{s}^2 = 10^3\text{ m}^2/\text{s}^2 + 600\text{ m}^2/\text{s}^2 = 1600\text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_2 = v = 40\text{ m/s}$$



La clessidra ad acqua

Nella clessidra il livello del liquido deve abbassarsi a velocità costante, cioè

$$V = \text{cost}$$

Applichiamo la legge della portata alle sezioni s ed S:

per la formula di Torricelli

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

$$S\,V = s\,v$$

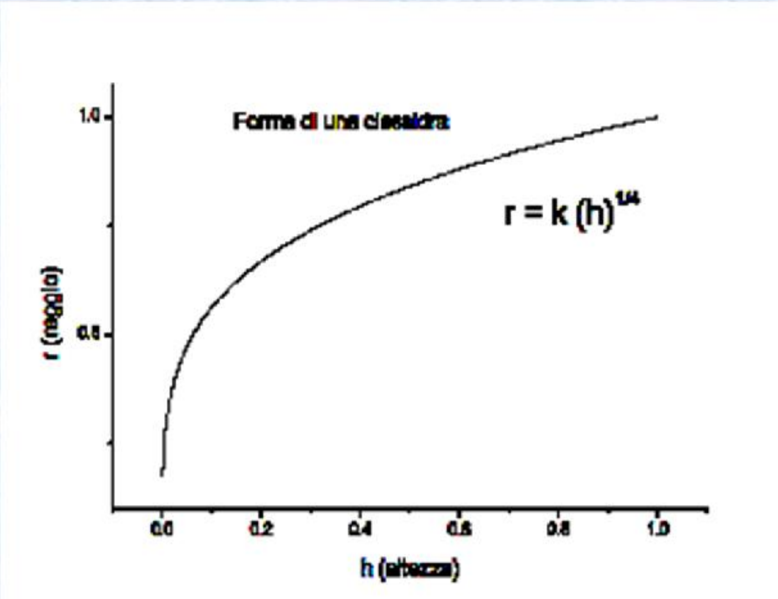
$$\pi\,r^2\,V = s\,\sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2\,g\,s^2\,h}$$

$$r^2 = \sqrt{2\,g\,s^2\,h\,/\,\pi^2\,V^2}$$

$$r = \left(\sqrt[4]{2\,g\,s^2\,/\,\pi^2\,V^2}\right)\sqrt[4]{h}$$

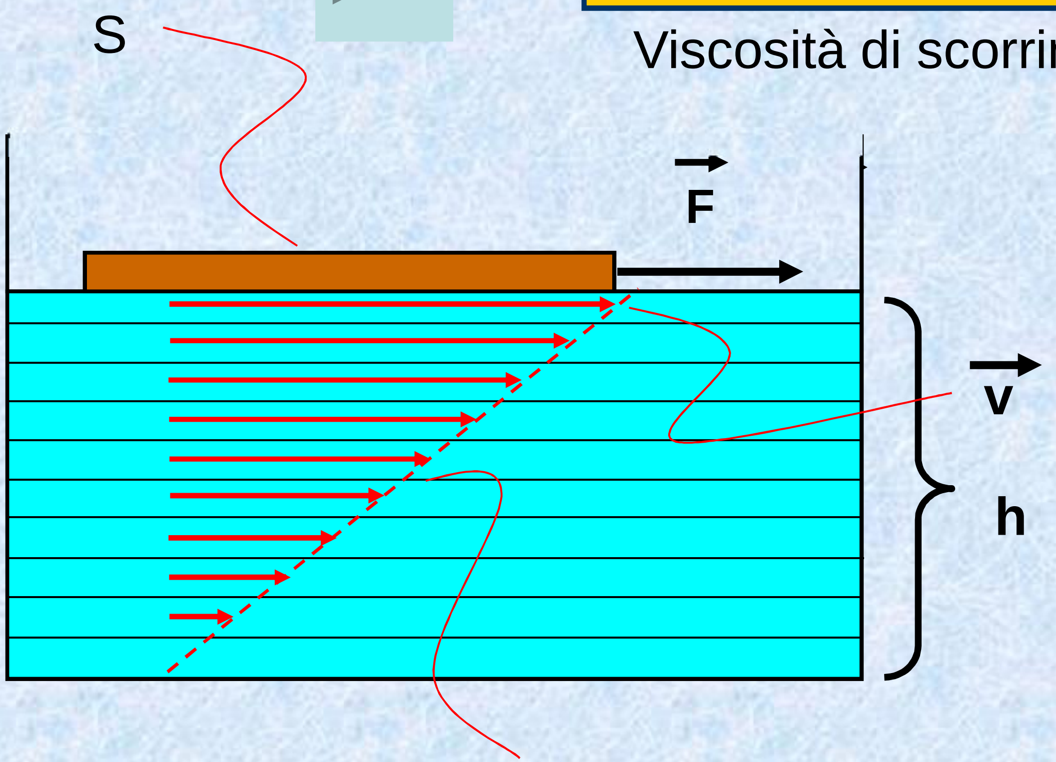
$$r = \text{cost}\,\sqrt[4]{h}$$

La forma della clessidra dipende da s e V.



Legge di Newton

Viscosità di scorrimento



Profilo di velocità

S = strato di materiale di densità minore di quella del liquido

$\vec{F}$ = forza applicata tangenzialmente alla superficie del liquido

A = Superficie di contatto strato S - liquido

τ = F/A = sforzo tangenziale

$\vec{v}_0$ = velocità dello strato di liquido sul fondo del recipiente = 0

$\vec{v}$ = velocità dello strato di liquido che aderisce ad S

G = gradiente di velocità = $(v - v_0) / h = v / h$

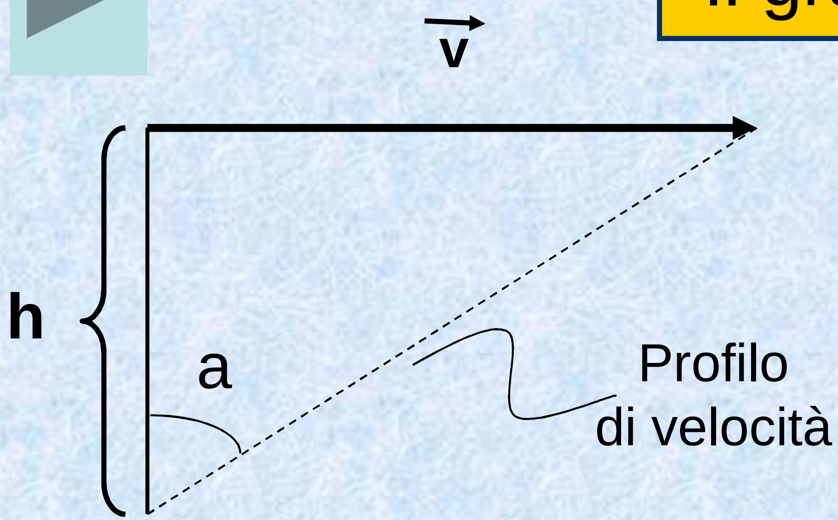
$\boxed{\tau = \eta\, G}$ **Legge di Newton**

η = coefficiente di viscosità di scorrimento (più brevemente "viscosità") del liquido

η dipende dal tipo di fluido e dalle sue condizioni fisiche

Il gradiente

$G = v / h = tg(a)$

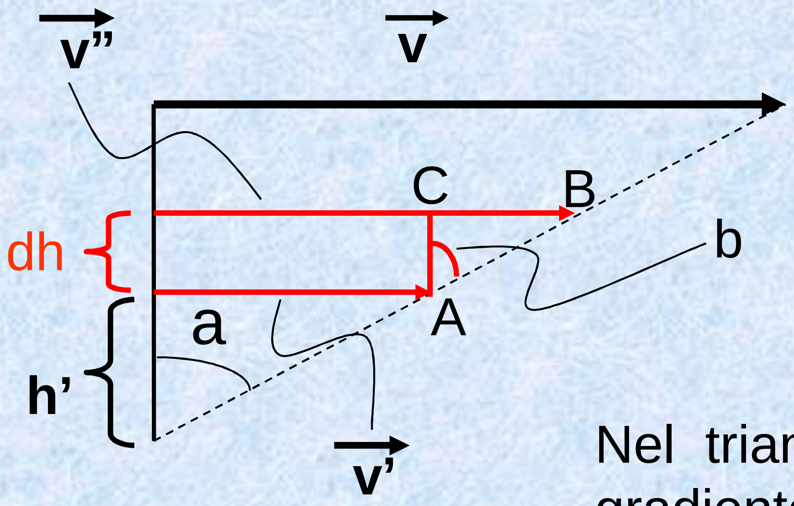


G è il gradiente medio di velocità tra lo strato più alto e lo strato più basso di liquido.

Posso trovare il gradiente di velocità di uno strato, per es. lo strato ad altezza h’ con velocità $\vec{v'}$

1) Considero il vettore velocità $\vec{v''}$ ad un’altezza h’ + dh

2) Il rapporto (v” – v’) / dh è il gradiente all’altezza h’



Nel triangolo ABC, AC = dh, CB = v”– v’ e il gradiente all’altezza h’ è uguale a tg(b). Poiché a = b, in questo caso gradiente medio e gradiente all’altezza h’ coincidono.

Dimensioni e unità di misura della viscosità

$$h = \tau / G$$

$$[\tau] = [F] / [S] = M\ L\ T^{-2} / L^{2} = M\ L^{-1}\ T^{-2}$$

$$[G] = [\Delta v] / [\Delta x] = L\ T^{-1} / L = T^{-1}$$

$$[\eta] = [\tau] / [G] = M\ L^{-1}\ T^{-2} / \ T^{-1} = M\ L^{-1}\ T^{-1}$$

τ	si misura in	$N / m^{2} = Pa$	(S. I.)
G	si misura in	s^{-1}	(S. I.)
h	si misura in	$Pa / s^{-1} = Pa\ s$	(S. I.)

h si misura in dine / $cm^{2}\ s^{-1}$ = Poise (P) (c.g.s.)

Viscosità dell’acqua a 20 °C ≈ 1 cP

REGIME LAMINARE

h funzione della temperatura

t (°C) h (poise)

H_2O .... 0°C 0.0178

10°C 0.0130

20°C .... $\boxed{0.0100}$ ù=plasma

alcool .... 20°C 0.0125

etere .... 20°C 0.0023

mercurio .. 20°C 0.0157

glicerina ... 15°C 2.340

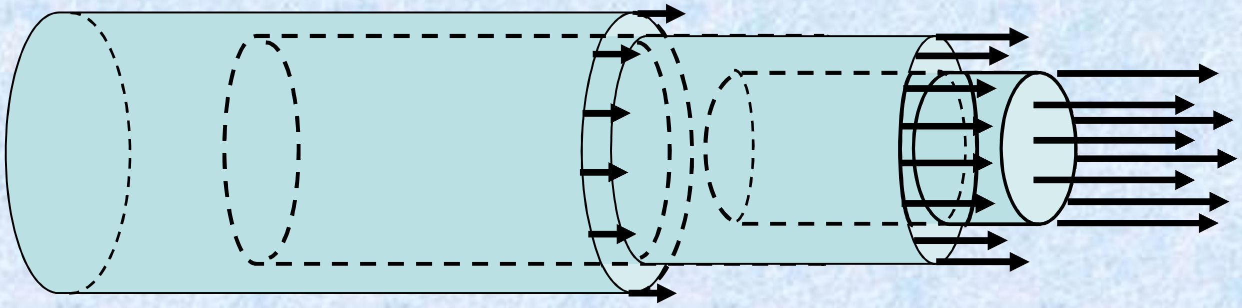
aria .... 15°C 0.00018

sangue 0.0400

(valore ematocrito 40%)

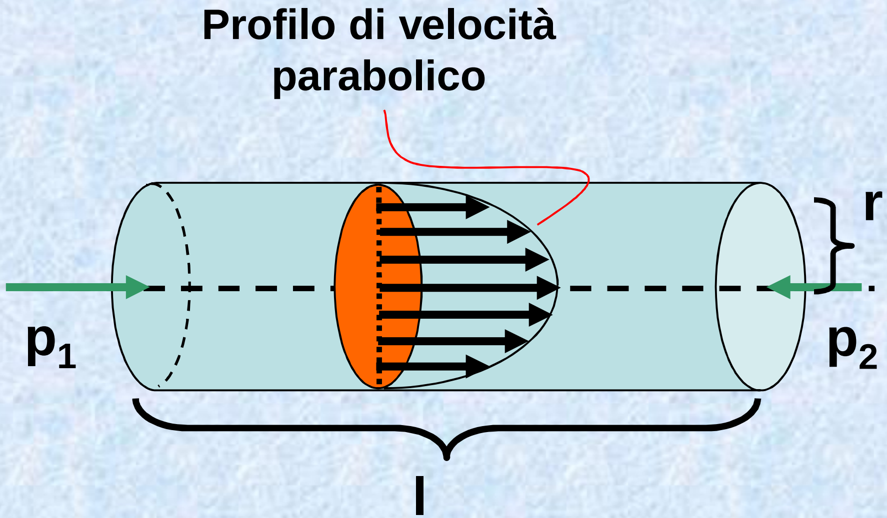
1 P = 10^{-1} Pa s

Legge di Poiseuille



Ipotesi:
Moto stazionario
Liquido newtoniano
Condotto cilindrico

Gli strati di liquido sono cilindri coassiali che scorrono gli uni sugli altri con attrito interno.

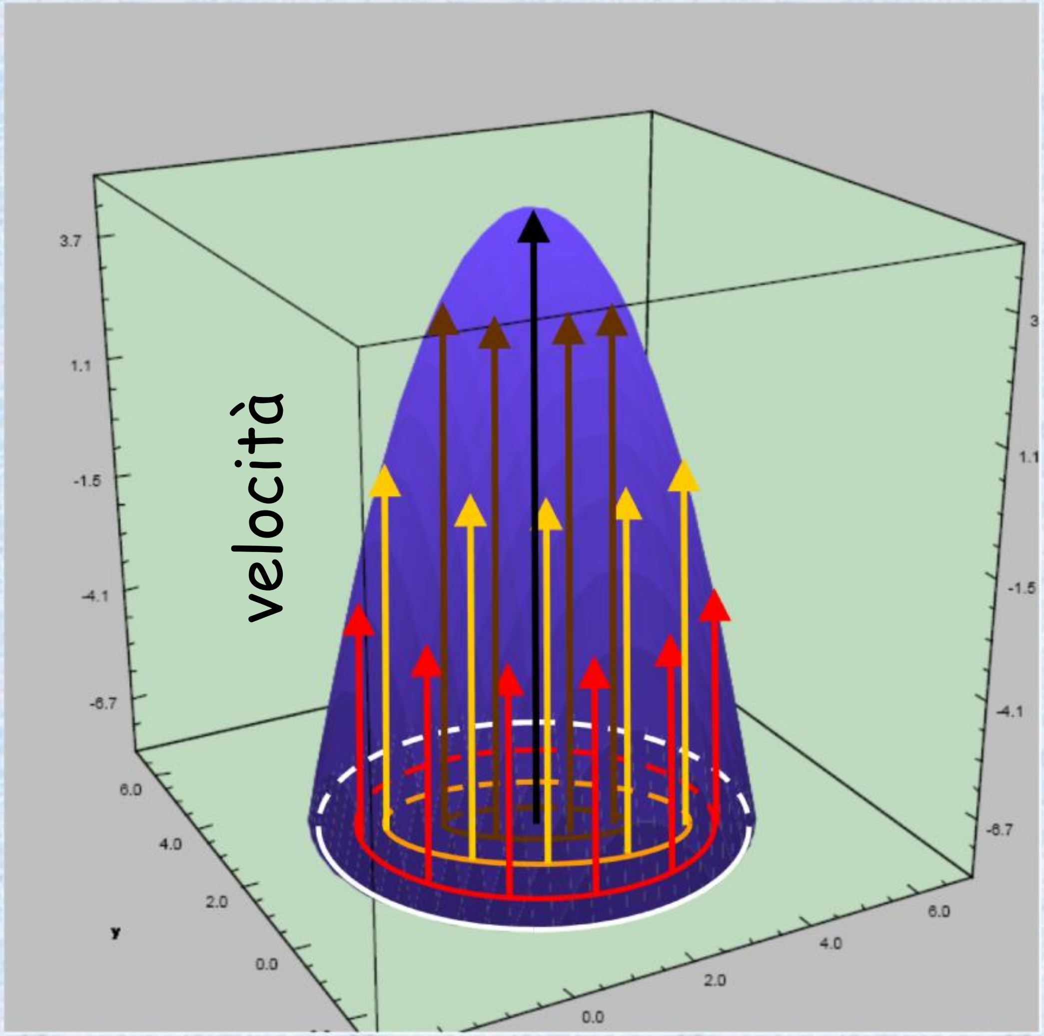


$p_2 < p_1$

Lungo un qualunque diametro di una sezione del cilindro l'andamento del profilo di velocità è parabolico con velocità nulla sulle pareti e massima sull'asse del cilindro.

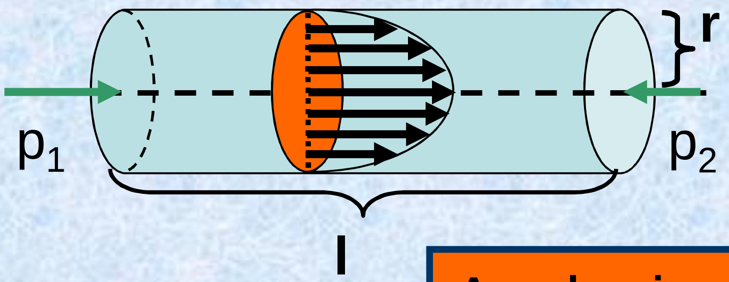
La pressione decresce linearmente nella direzione di scorrimento del fluido (caduta di pressione).

La caduta di pressione fornisce il lavoro che compensa la perdita di energia per attrito interno.



Rappresentazione 3-D del profilo di velocità nel moto di un liquido newtoniano in un condotto (Legge di Poiseuille).

Legge di Poiseuille



$$Q = (p_1 - p_2)\, \pi\, r^4 / 8\eta\, l$$

η = viscosità del liquido

Analogia con la legge di Ohm

$Q = \Delta p\, \pi\, r^4 / 8\eta\, l$ ⟺ $I = \Delta\mathcal{V} / R$

$Q = \Delta V / \Delta t$ ⟺ $I = \Delta q / \Delta t$

Δp ⟺ $\Delta\mathcal{V}$

Resistenza idraulica = $\mathcal{R}$ = = $\Delta p / Q = 8\, \eta\, l / \pi\, r^4$ ⟺ Resistenza elettrica = R = = $\Delta\mathcal{V} / I = \rho\, l / S$

Resistenze idrauliche in serie: $\mathcal{R}_{tot} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots\dots + \mathcal{R}_n$

$R_{tot} = R_1 + R_2 + \dots\dots + R_n$ Resistenze elettriche in serie

Resistenze idrauliche in parallelo: $1/\mathcal{R}_{tot} = 1/\mathcal{R}_1 + 1/\mathcal{R}_2 + \dots\dots + 1/\mathcal{R}_n$

$1/R_{tot} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots\dots + 1/R_n$ Resistenze elettriche in parallelo

Potenza dissipata = $Q\, \Delta p$

Potenza dissipata = $I\, \Delta\mathcal{V}$

Quale (o quali) delle seguenti è un'unità di misura della resistenza idraulica?

a) $N\ s / m^2$ b) $\boxed{N\ s / m^5}$ c) $Pa\ s / m^2$ d) $\boxed{kg\ s / m^4}$

La legge di Poiseuille può essere espressa nella forma:

$$R = \Delta p / Q$$

Δp = differenza di pressione

Unità di misura (SI) : $Pa = N / m^2 = (kg\ m / s^2)\ m^2 = kg / (m\ s^2)$

Q = portata = $\Delta V / \Delta t$

Unità di misura (SI) : m^3 / s

R = resistenza idraulica = $8\ \eta\ l / \pi\ r^4$

Unità di misura (SI) : $Pa\ s / m^3 = N\ s / m^5 = (kg / m\ s^2)\ (s / m^3) = kg\ s / m^4$

Quale potenza deve avere una pompa affinché sotto la differenza di pressione di 0.5 atm fornisca un flusso di 0.6 m^3 / min?

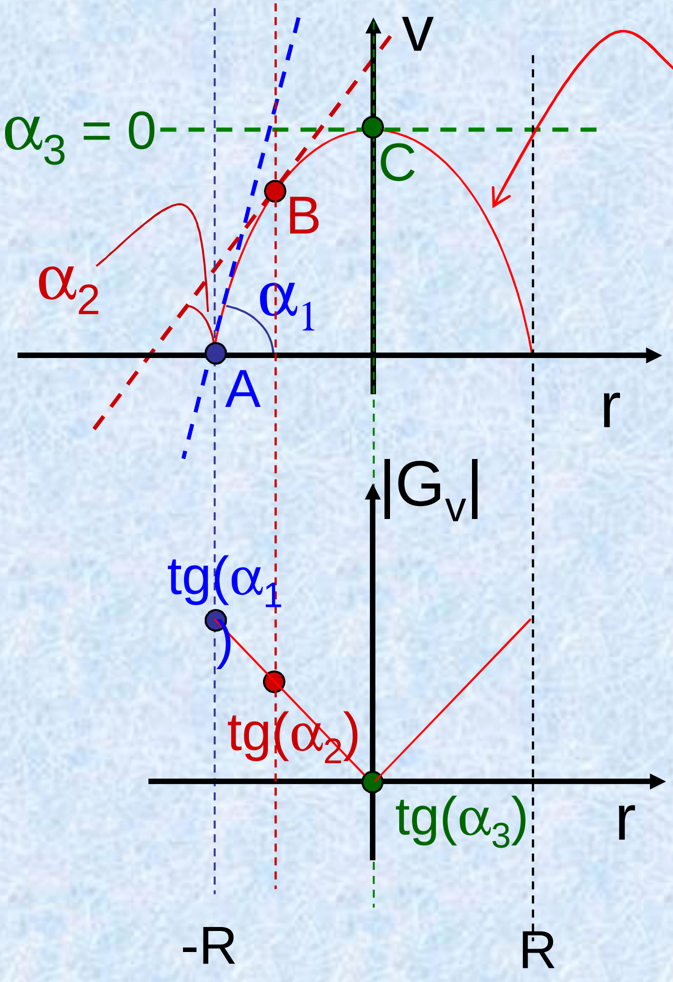
Per confronto con la potenza dissipata in un circuito elettrico ($W = I \Delta V$)

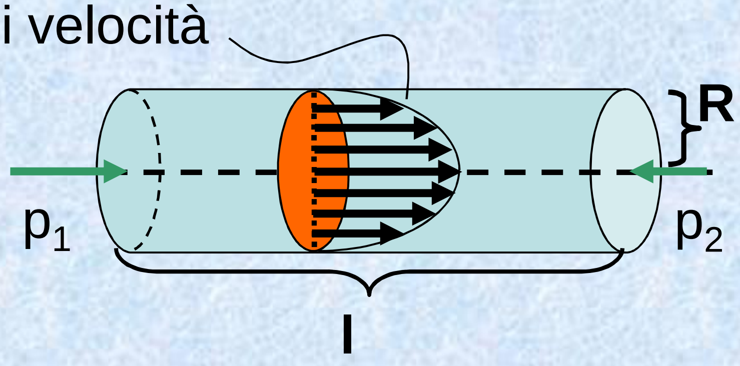
$$W = Q \Delta p$$

$$W = (0.6\ m^3 / min)\ 0.5\ atm = (0.6\ m^3 / 60\ s)\ (0.5\ 10^5\ Pa)$$
$$= 10^{-2}\ m^3/s \times 0.5\ 10^5\ Pa = 0.5\ 10^3\ w = 500\ w$$

Legge di Poiseuille

Gradiente di velocità



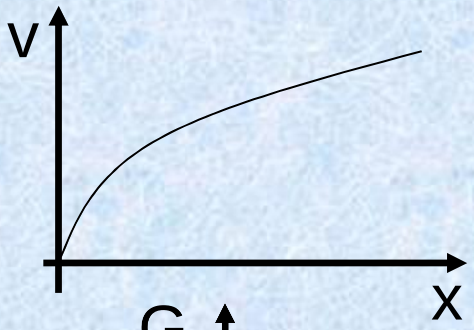


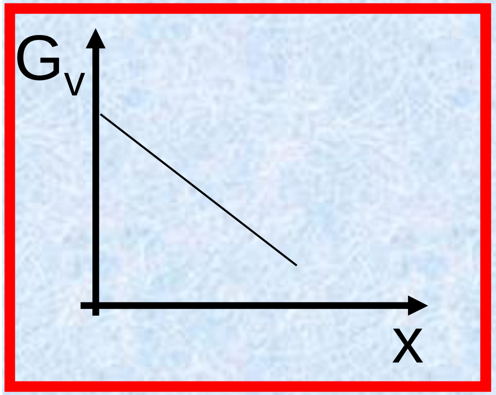
Il gradiente di velocità G_v rappresenta la ***pendenza*** del profilo parabolico di velocità.

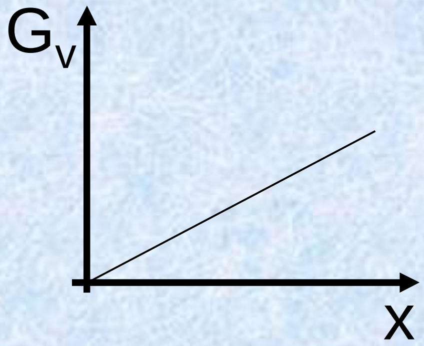
La pendenza in un punto P del profilo di velocità è data dalla ***tangente trigonome_ trica*** dell'angolo α formato tra la ***tangente geometrica*** alla parabola in P e l'asse orizzontale.

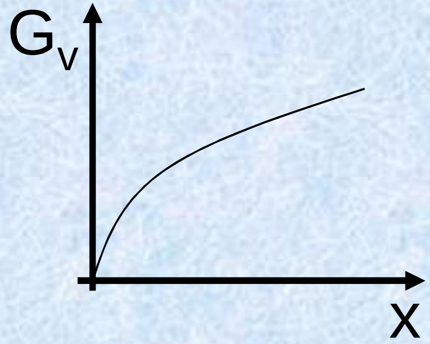
$$G_v = tg\,(\alpha)$$

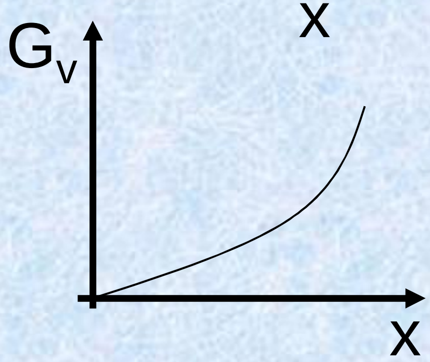
Il profilo della velocità lungo il raggio di un condotto cilindrico in cui scorre un fluido viscoso è rappresentato in figura. Quale dei sottostanti grafici può rappresentare il gradiente di velocità?

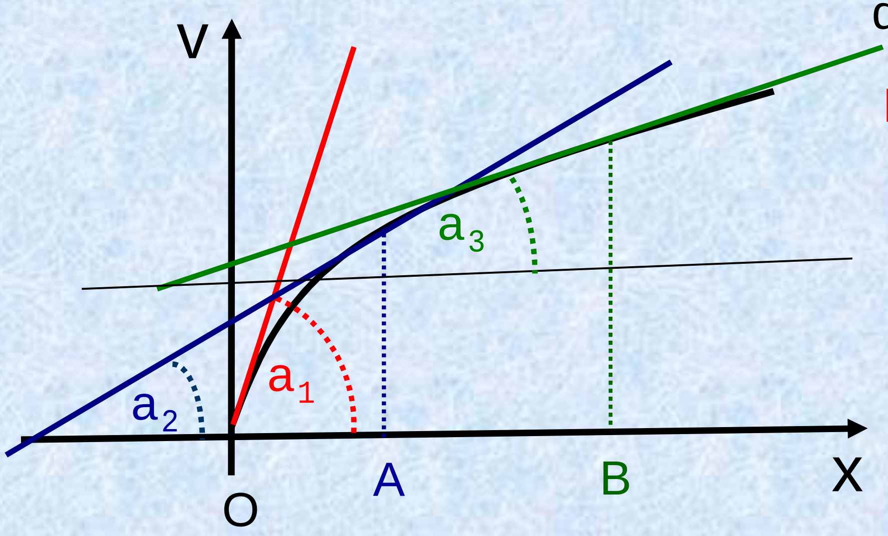












Il gradiente di velocità è la pendenza del profilo di velocità, cioè della funzione v(x).

Pendenza nel punto O (origine) = tang (α_1)

Pendenza nel punto A = tang (α_2)

Pendenza nel punto B = tang (α_3)

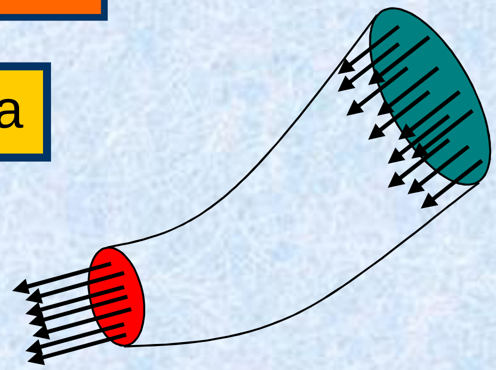
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

$$tg(\alpha_1\ ) < tg(\alpha_2) < tg(\alpha_3)$$

Moto alla Poiseuille

Legge della portata

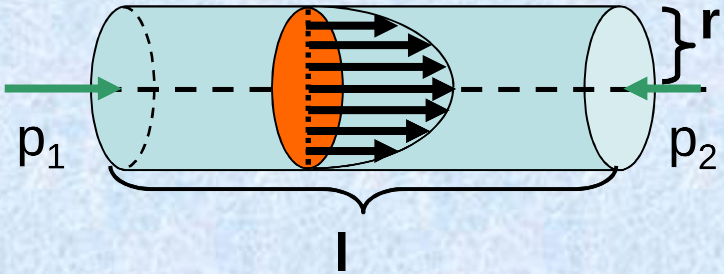
Nel moto di un ***liquido perfetto*** il liquido ha la stessa velocità in tutti i punti di una stessa sezione.



Portata $Q = S\,v$

v = velocità comune di tutti i punti della sezione

Nel moto di un ***liquido newtoniano*** la velocità del liquido lungo ogni diametro di una sezione ha un profilo parabolico.



Portata $Q = S\,v_m$

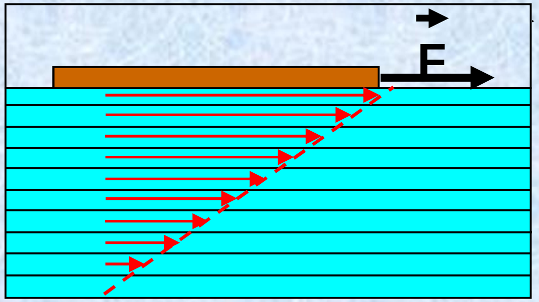
v_m= velocità media su tutti i punti della sezione

Per un profilo di velocità parabolico $v_m = v_{max} / 2$

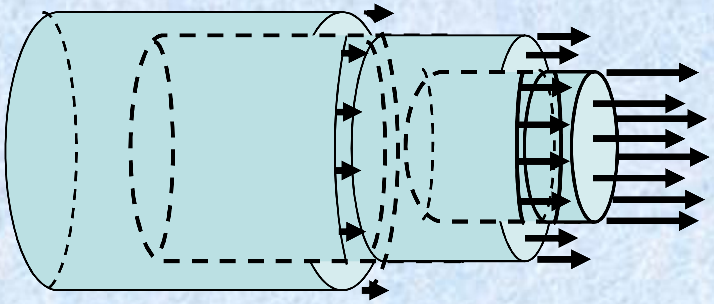
v_{max} è la velocità massima sulla sezione, cioè la velocità sull'asse del condotto.

Moto turbolento

Moto laminare: le velocità di tutti gli strati di liquidi si mantengono parallele. Gli strati di liquido mantengono la loro identità.



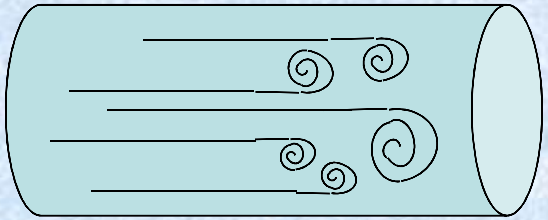
Scorrimento semplice



Moto alla Poiseuille

Moto turbolento: le velocità degli strati non si mantengono parallele. Si formano vortici. Gli strati si mescolano.

Per decidere se in una sezione di un condotto il moto è laminare o vorticoso si calcola il numero di Reynolds, R_e



$$R_e = 2\, r\, v\, d / \eta$$

$R_e \leq 2000 \Rightarrow$ Moto laminare

$R_e > 2000 \Rightarrow$ Moto turbolento

Un condotto di raggio r si ramifica in tre condotti, ciascuno ancora di raggio r/3. Sapendo che nel condotto principale il numero di Reynolds vale 800, quanto vale in ciascuno di quelli secondari?

Numero di Reynolds nel condotto principale = $Re = 2\, r\, v\, d / \eta$

Numero di Reynolds in uno dei condotti secondari = $Re' = 2\, r'\, v'\, d / \eta$

$$r' = r/3$$

Dalla legge della portata

Portata nel condotto principale = 3 x Portata in un condotto secondario

$$\pi\, r^2\, v = 3\, \pi\, (r/3)^2\, v' = 3\, \pi\, (r^2/9)\, v' = \pi\, (r^2/3)\, v' = \pi\, r^2\, v' /3$$

$$v' = 3\, v$$

$$Re' = 2\, r'\, v'\, d / \eta = 2\, (r/3)\, (3v)\, d/ \eta = Re = 800$$

Variazioni del numero di Reynolds nel sistema circolatorio

Variazione con il raggio del vaso

r↓ $R_e = 2\,r\,v\,d\,/\,\eta$ ↓ ??? v ↑ per la legge della portata r v ????

Dalla legge della portata: $\pi\,r^2\,v = Q$ = portata = costante $\longrightarrow$ $v = Q\,/\,\pi\,r^2$ (1)

Sostituendo l'eq. 1 nella formula del numero di Reynolds:

$R_e = 2\,r\,(Q\,/\,\pi\,r^2)\,d\,/\,\eta = 2\,(Q\,d\,/\pi\,\eta)\,1/r$ = cost / r $\Rightarrow$ r↓ $\longrightarrow$ R_e ↑

Variazione con la composizione del sangue

Concentrazione dei globuli rossi ↓ $\longrightarrow$ η ↓ $\Rightarrow$ $R_e = 2\,r\,v\,d\,/\,\eta$ ↑

Anche d ↓ ma l'effetto predominante è la diminuzione di η .

Variazione con la temperatura corporea

Temperatura corporea ↑ $\longrightarrow$ η ↓ $\Rightarrow$ $R_e = 2\,r\,v\,d\,/\,\eta$ ↑

Anche in questo caso d ↓ ma l'effetto predominante è la diminuzione di η .

Portata del sistema circolatorio

Grande circolazione: dal ventricolo sinistro all'atrio destro

Il volume di sangue espulso dal cuore in una sistole è circa uguale al

volume del ventricolo sinistro (circa 70 cm^3).

$$\text{Portata del sistema circolatorio} = \frac{\text{Volume di sangue espulso}}{\text{sistole}} \; \frac{\text{n° di sistoli}}{\text{secondo}}$$

Il numero di sistoli / secondo è la frequenza cardiaca f = 80 battiti / min = 1.33 battiti / sec = 1.33 Hz.

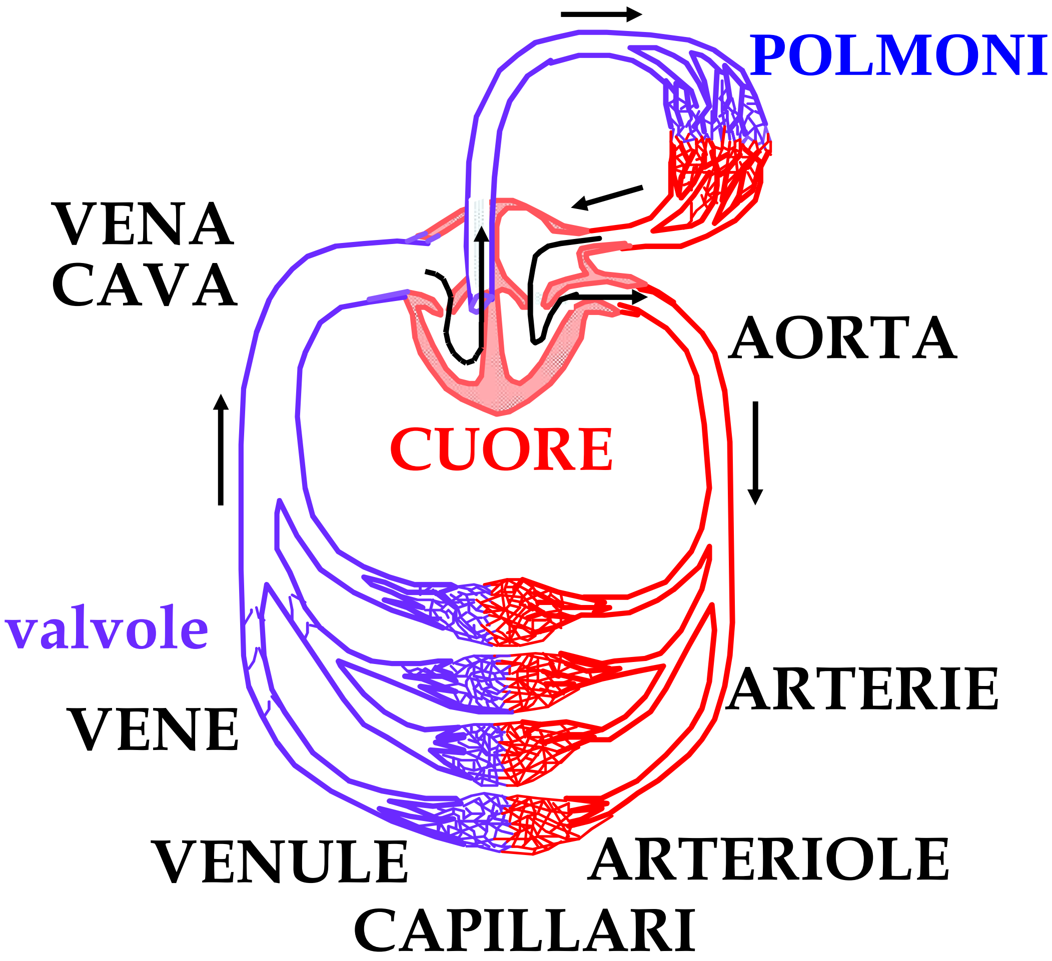
Portata del sistema circolatorio = (volume ventricolo) (frequenza cardiaca) =

= 70 cm^3 1.33 Hz = 93 cm^3/s =

= (93 cm^3/s) (60 s / min) = 5580 cm^3/ min =

= 5.6 dm^3 / min ≈ 5.6 l / min

SISTEMA CIRCOLATORIO

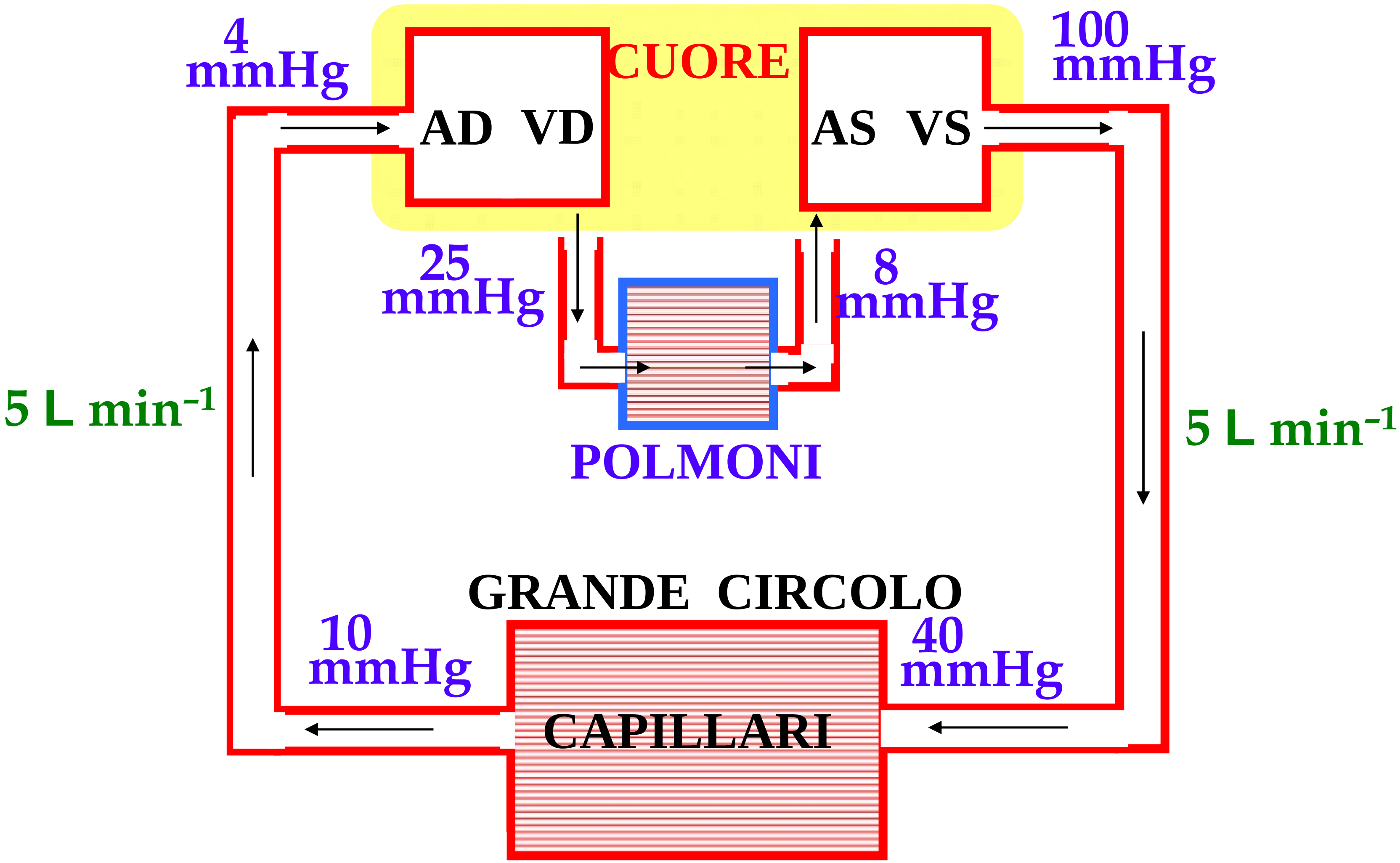


- **pressione media** (nel tempo)
- **velocità media** (nel tempo)

AORTA
ARTERIE
ARTERIOLE
CAPILLARI
VENULE
VENE
VENA CAVA

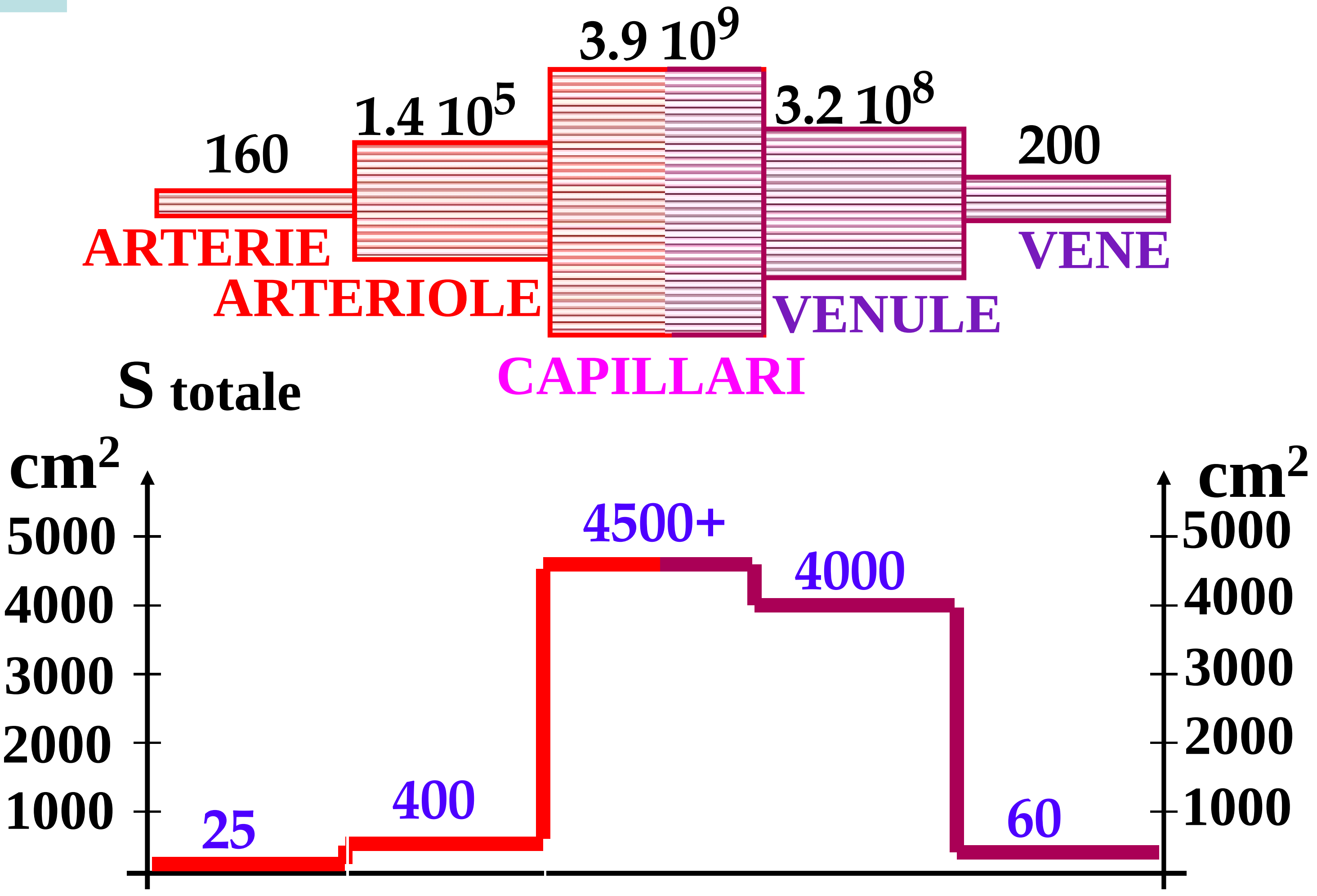
SISTEMA CIRCOLATORIO

schema del circuito chiuso :



NUMERO, SEZIONE, VELOCITA'

G. Roberti



EQUAZIONE di CONTINUITA'

valori medi

Legge della portata $S\ v_m = \text{cost}$

v_m=velocità media nella sezione
$v_m = v_{max}/2$ nel moto alla Poiseuille

Q ù=5 litri min^{-1} ù 85 cm^3 s^{-1}

AORTA $r = 0.8$ cm $\longrightarrow$ $S = pr^2 = 2.5$ cm^2

$v_m = Q/S = 85/2.5$ cm s^{-1} ù 42.5 cm s^{-1}

ARTERIOLE $S = 400$ cm^2

$v_m = 85/400$ cm s^{-1} ù 0.2 cm s^{-1} = 2 mm s^{-1}

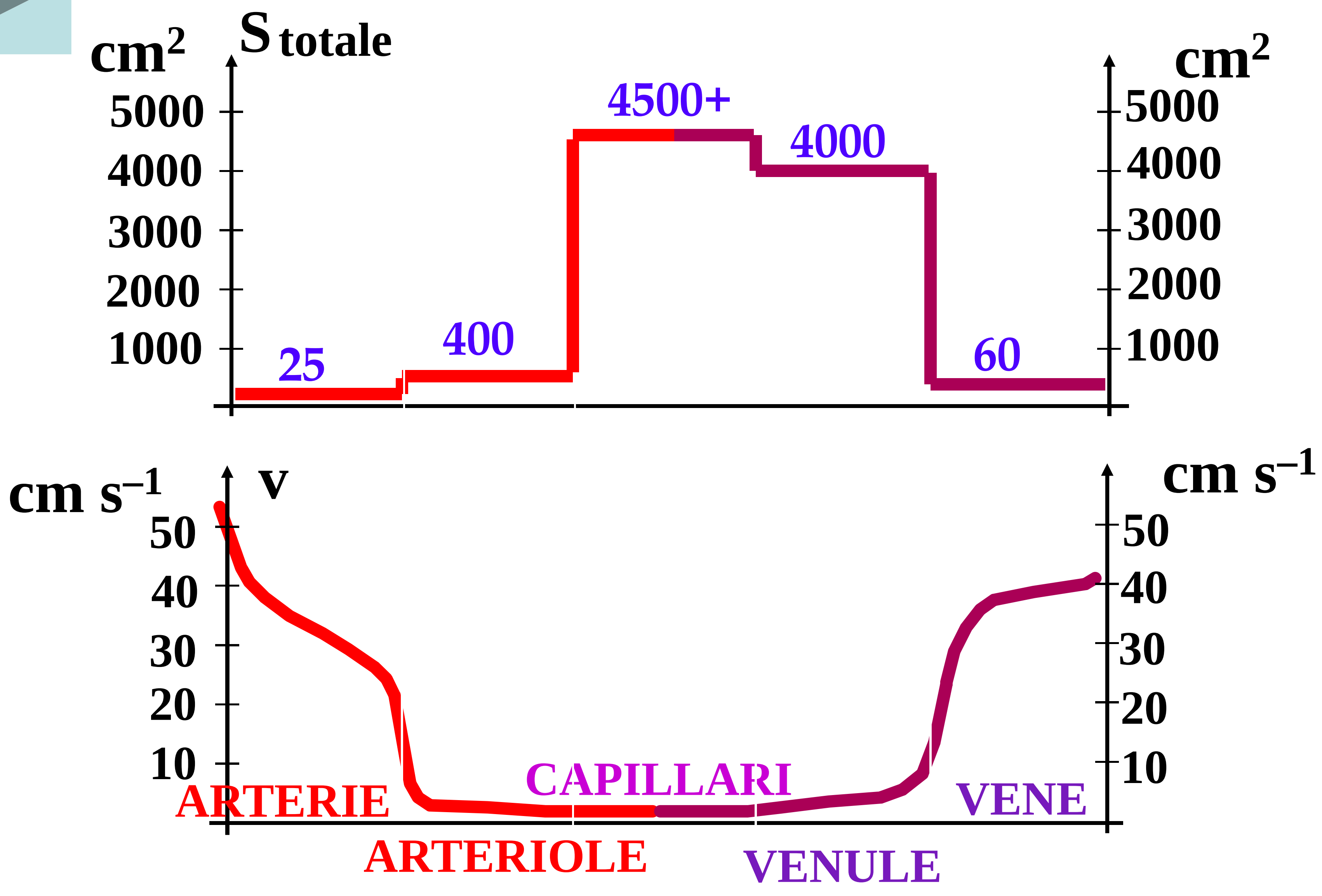
CAPILLARI $S = 4500$ cm^2

$v_m = 85/4500$ cm s^{-1} ù 0.02 cm s^{-1} = 0.2 mm s^{-1}

VENA CAVA $S = 4$ cm^2

$v_m = 85/4$ cm s^{-1} ù 21 cm s^{-1}

NUMERO, SEZIONE, VELOCITA'



Caduta di pressione nell'aorta

Legge di POISEUILLE $\Delta p = R\,Q$

Δp = Differenza di pressione tra le due estremità dell'aorta

Q = portata dell'aorta = $90\ cm^3/s = 90\ 10^{-6}\ m^3/s$

R = resistenza idraulica dell'aorta = $8\,\eta\,l\,/\,\pi\,r^4$

η = viscosità del sangue = $4\ 10^{-2}\ P = 4\ 10^{-3}\ Pa\ s$

l = lunghezza dell'aorta = 0. 2 m

r = raggio dell'aorta = $0.9\ 10^{-2}\ m$

$$R = 8\,\eta\,l\,/\,\pi\,r^4 \approx 2\ 10^5\ Pa\ s\,/\,m^3$$

$$\Delta p = R\,Q = (2\ 10^5\ Pa\ s/\ m^3)\ (90\ 10^{-6}\ m^3/s) = 18\ Pa = \boxed{0.06\ mm_{Hg}}$$

Memento: Torr = mm_{Hg} = 133 Pa

Caduta di pressione in un capillare

Legge di POISEUILLE $\Delta p = R\,Q$

Δp = Differenza di pressione tra le due estremità del capillare

Q = portata del capillare = $S\,v_m = \pi\, r^2\, v_m$

r = raggio del capillare = $2\ 10^{-6}$ m

v_m = 0.3 mm/s = $3\ 10^{-4}$ m/s

$\Rightarrow Q \approx 4\ 10^{-15}\ m^3/s$

η = viscosità del sangue = $4\ 10^{-2}$ P = $4\ 10^{-3}$ Pa s

l = lunghezza del capillare = 10^{-3} m

R=resistenza idraulica del capillare = $8\,\eta\, l / \pi\, r^4 \approx 0.6\ 10^{18}$ Pa s/m^3

$\Delta p = R\,Q = (0.6\ 10^{18}\ \text{Pa s/ m}^3)\ (4\ 10^{-15}\ \text{m}^3\text{/s}) = 2.4\ 10^3\ \text{Pa} =$

$= 18\ mm_{Hg}$

SISTEMA CIRCOLATORIO

- pressione media (nel tempo)
- velocità media (nel tempo)

CUORE

	velocità media ($cm\ s^{-1}$)	pressione media (mmHg)
AORTA	50ö40	100
ARTERIE	40ö10	100ö40
ARTERIOLE	10ö0.1	40ö25
CAPILLARI	<0.1	25ö12
VENULE	<0.3	12ö8
VENE	0.3ö5	8ö3
VENA CAVA	5ö25	2

CUORE

Misura della pressione aortica

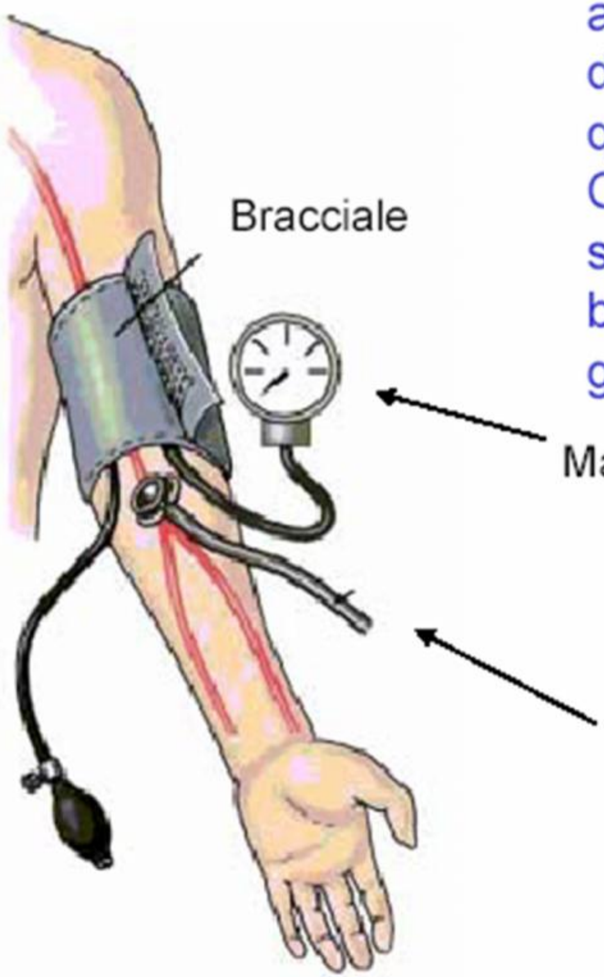
Gli strumenti di misura

Sfigmomanometro

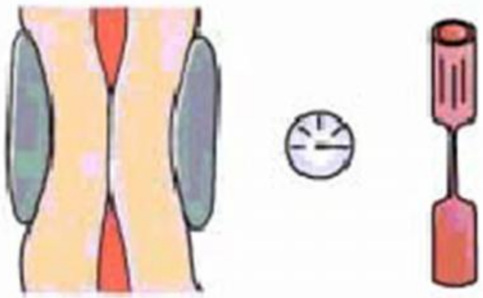
Fonendoscopio

Misura della pressione aortica : fase 1

Si gonfia il bracciale, posto intorno al braccio sinistro, con una pressione certamente superiore al valore della pressione sistolica. La pressione del bracciale letta sul manometro è uguale a quella che si trasmette all'arteria, occludendola. Contemporaneamente si posa un fonendoscopio sul decorso dell'arteria omerale, a valle del bracciale, in corrispondenza della piega del gomito.

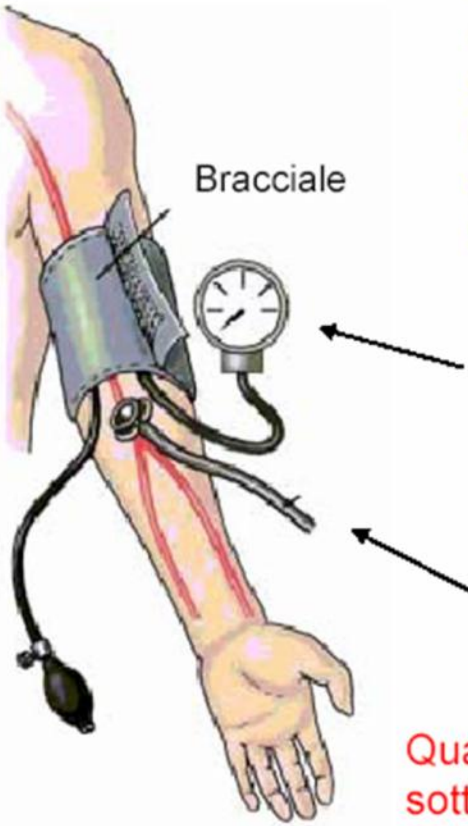


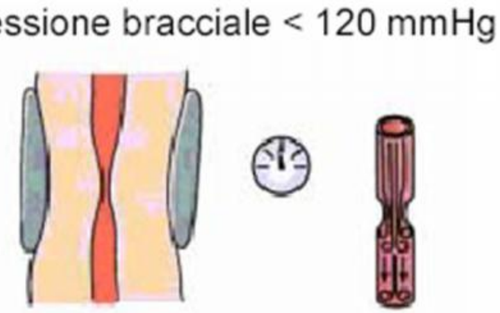
Pressione bracciale > 120 mmHg



Misura della pressione aortica : fase 2

Si sgonfia quindi lentamente il bracciale, controllando la pressione sul manometro. All'improvviso si sentirà un primo rumore breve e schioccante, in coincidenza con ogni battito cardiaco (rumore di Korotkow). La pressione letta sul manometro in questo momento è il valore sistolico.

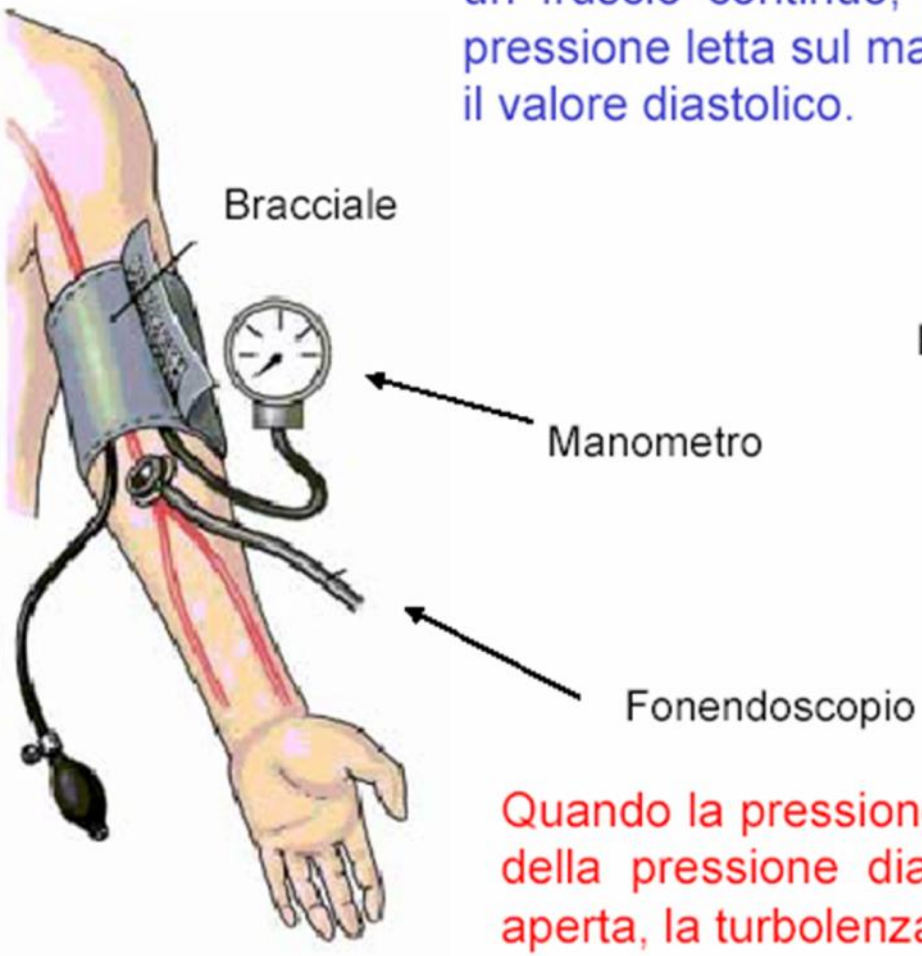




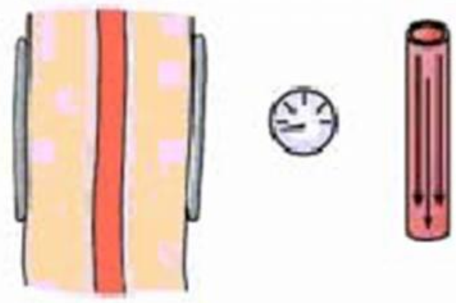
Quando la pressione del bracciale scende appena al di sotto di quella sistolica, il vaso si apre di poco e per un istante. Il flusso del sangue che attraversa il vaso ristretto diventa turbolento, generando il rumore udibile con il fonendoscopio. La turbolenza continua fino a quando il bracciale chiude il vaso per una parte del ciclo cardiaco.

Misura della pressione aortica : fase 3

Continuando a ridurre la pressione nel bracciale, il rumore diventa più prolungato, fino a trasformarsi in un fruscio continuo, prima di sparire del tutto: La pressione letta sul manometro in questo momento è il valore diastolico.

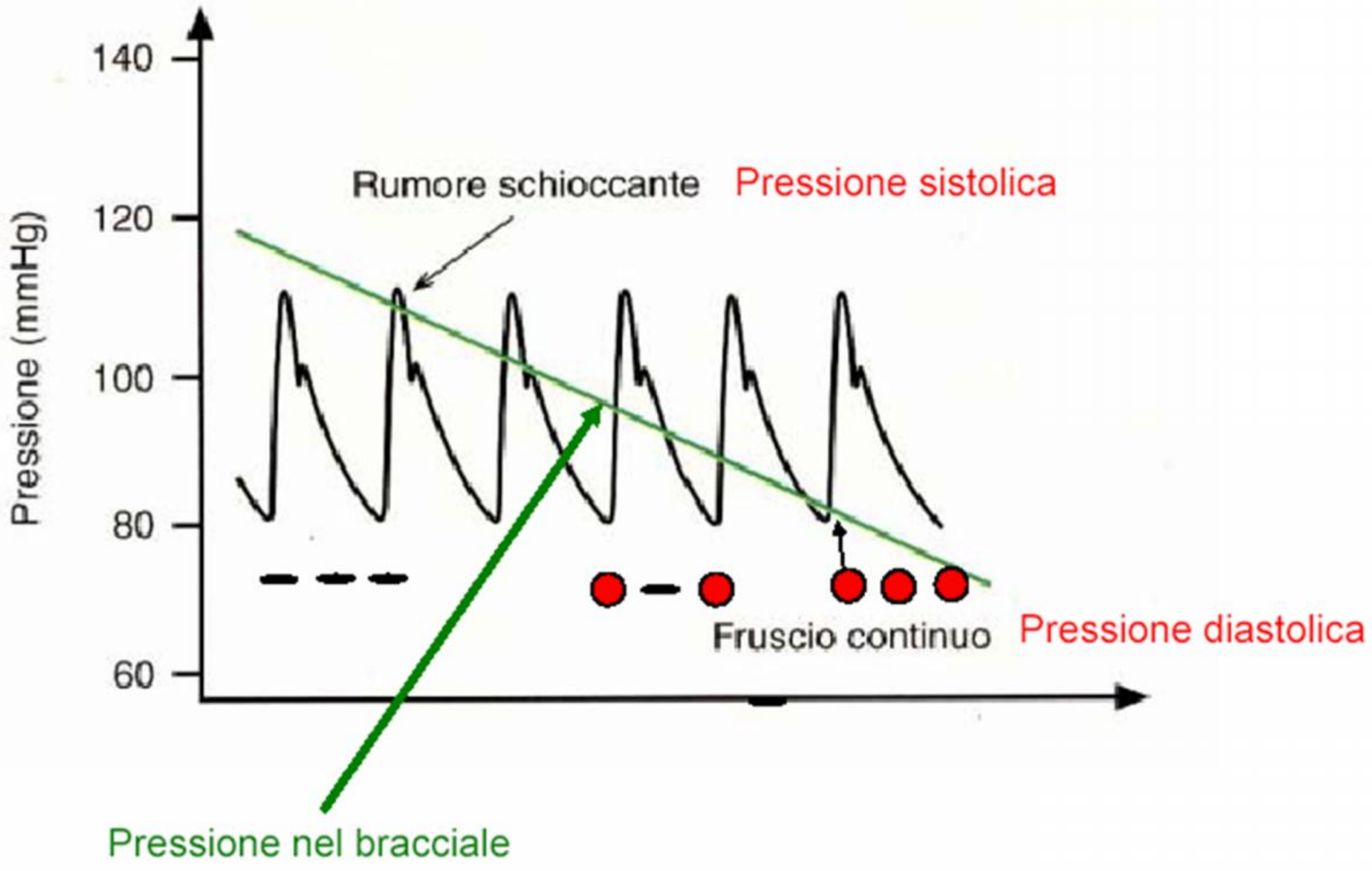


Pressione bracciale < 80 mmHg



Quando la pressione del bracciale scende al di sotto della pressione diastolica, l'arteria rimane sempre aperta, la turbolenza cessa e i rumori scompaiono.

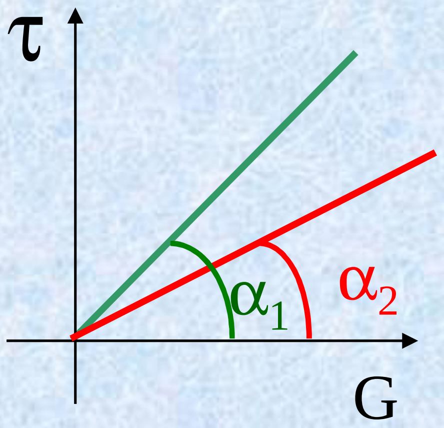
Misura della pressione aortica



Liquidi non newtoniani

Liquidi newtoniani

$\tau = \eta\, G$
$\eta = \text{cost}$



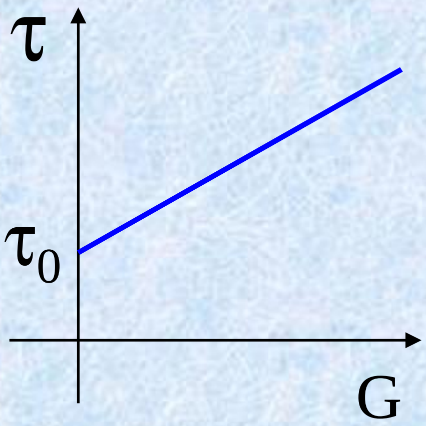
1) $\tau = \eta_1\, G$ $\quad \eta_1 = tg\,(\alpha_1)$

2) $\tau = \eta_2 G$ $\quad \eta_2 = tg\,(\alpha_2)$

$\eta_1 > \eta_2$

La viscosità rappresenta una pendenza nel piano (G, τ).

Liquidi non newtoniani: liquidi viscoplastici



τ_0 = limite plastico

$\eta \downarrow$ quando $G \uparrow$

Fluido di Bingham

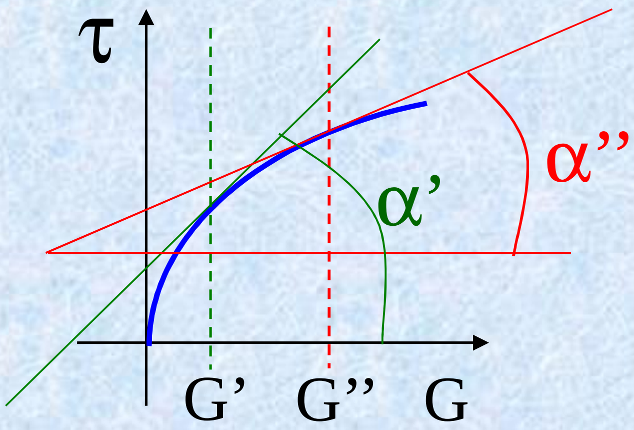
$\tau < \tau_o \qquad \eta \rightarrow \infty$

Il fluido si comporta come un solido

$\tau > \tau_o \qquad \tau = \tau_0 + \eta\, G$

Il fluido ha un comportamento newtoniano

Liquidi non newtoniani: liquidi pseudoplastici



$\eta \downarrow$ quando $G \uparrow$

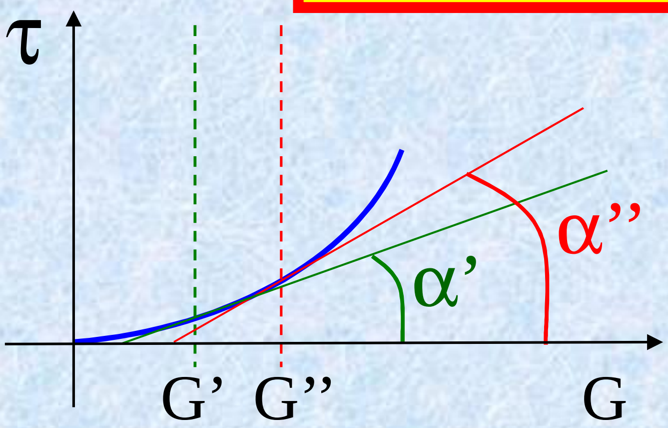
$$\left.\begin{aligned} \eta\,(G') &= tg\,(\alpha') \\ \eta\,(G'') &= tg\,(\alpha'') \end{aligned}\right\}$$ (viscosità differenziale)

$G'' > G' \Rightarrow \alpha'' < \alpha'$

$\Downarrow$

$\eta\,(G'') < \eta\,(G') \Leftarrow tg(\alpha'') < tg(\alpha')$

Liquidi non newtoniani: liquidi dilatanti



$\eta \uparrow$ quando $G \uparrow$

$\eta\,(G') = tg\,(\alpha')$

$\eta\,(G'') = tg\,(\alpha'')$

$G'' > G' \Rightarrow \alpha'' > \alpha'$

$\Downarrow$

$\eta\,(G'') > \eta\,(G') \Leftarrow tg(\alpha'') > tg(\alpha')$

Esempi di fluidi pseudoplastici

Succo concentrato di arancia

Purea di banana o di mela

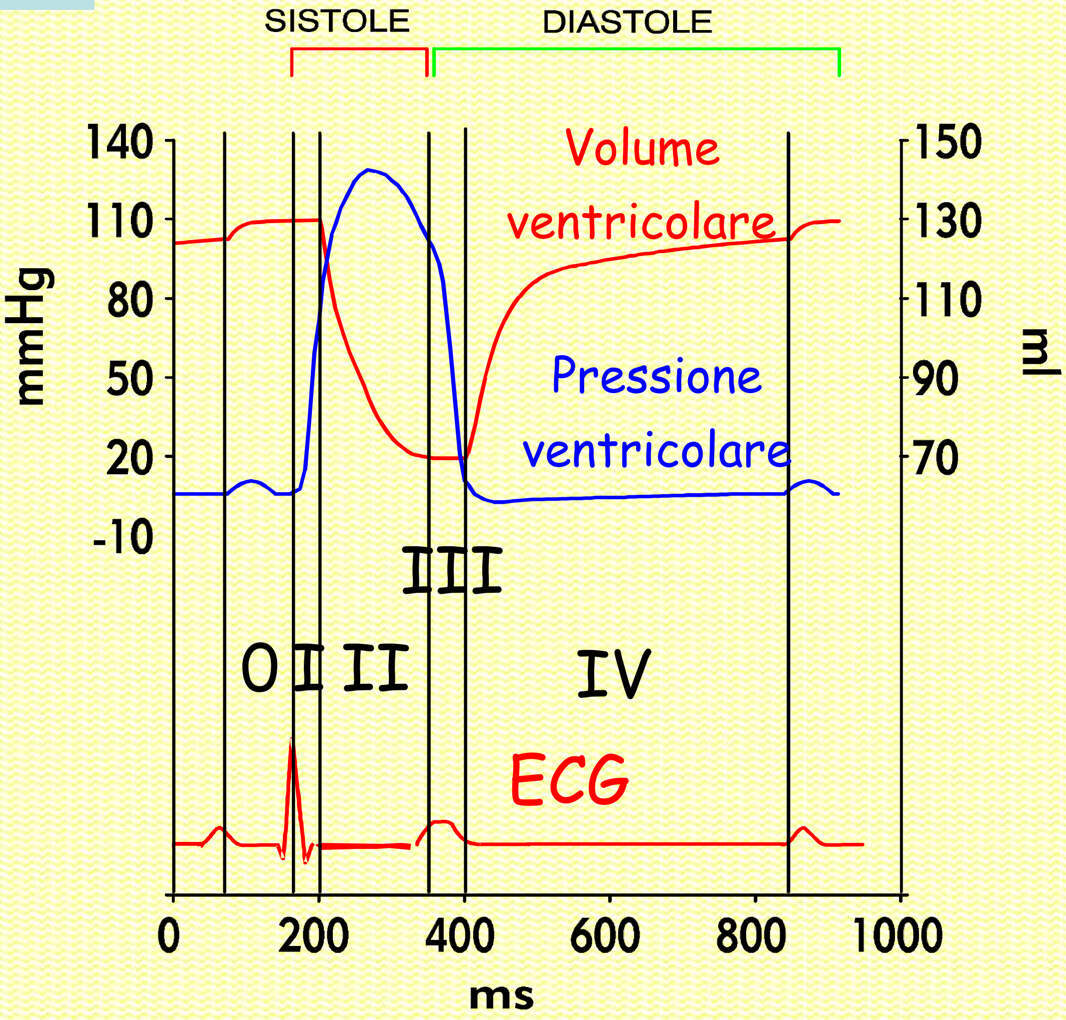
Esempi di fluidi dilatanti

Cioccolata liquida

Dispersioni di solidi in soventi : sabbia bagnata, vernici

Miscela di acqua e amido

IL CICLO CARDIACO



0: Sistole atriale

I: compressione del sangue nel ventricolo a volume costante

II : svuotamento del ventricolo

III: rilassamento del ventricolo a volume costante

IV: riempimento del ventricolo (p ≈ 0)

Lavoro cardiaco

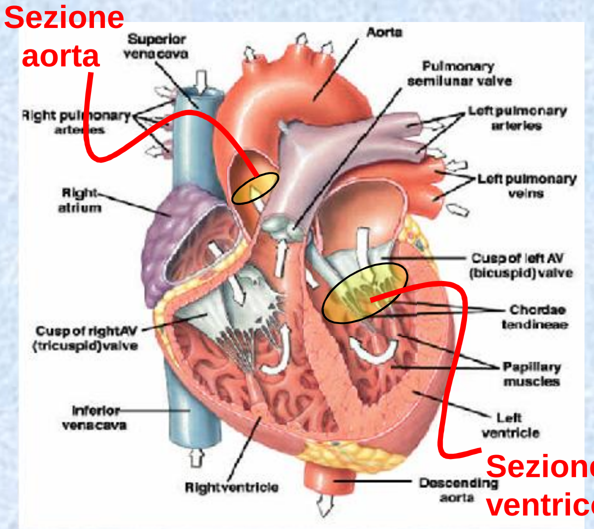
$L_{\text{card}} \approx L_{\text{cuore sinistro}}$ $\qquad$ $L_{\text{cuore sinistro}} = L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV}$

$L_I \approx 0;\ L_{III} \approx 0$ perchè $V = \text{cost}$ $\qquad$ $L_{IV} \approx 0$ perchè $p \approx 0$

$L_{\text{cuore sinistro}} \approx L_{II} = p_v\,\Delta V$

p_v = pressione ventricolare

ΔV = variazione di volume del ventricolo



Applichiamo il teorema di Bernoulli ad una sezione del ventricolo e ad una sezione dell'aorta:

$$p_a + d\,\cancel{g}\,h_a + d\,v_a^2/2 = p_v + d\,\cancel{g}\,h_v + d\,\cancel{v_v}^2/2$$

$h_a \approx h_v \qquad v_v \approx 0 \qquad p_v = p_a + d\,v_a^2/2$

$$L_{\text{cuore sinistro}} \approx L_{II} = p_v\,\Delta V = p_a\,\Delta V + d\,\Delta V\,v_a^2/2$$

$p_a\,\Delta V$ = lavoro di compressione = $8\ 10^{-1}$ J

$d\,\Delta V\,v_a^2/2$ = lavoro di accelerazione = $7.5\ 10^{-3}$ J

$\Bigg\}\quad L_{\text{card}} \approx 8\ 10^{-1}$ J

$W_{\text{card}} = L_{\text{card}}\,f_{\text{card}} \approx 1$ w