

ESERCITAZIONE SU PROBABILITÀ E PROCESSI STOCASTICI DEL 06/12/2017

ESERCIZIO 1

Vado a giocare alla roulette francese. Sapendo che le caselle sono numerate da 0 a 36 e ci sono 18 caselle nere e 18 caselle rosse. Qual è la probabilità:

- a) Che esca un numero tra 9 e 12 inclusi gli estremi;
- b) Che non esca una casella rossa;
- c) Che esca 0 o un multiplo di 3;
- d) Che esca un numero pari e maggiore di 15.

SVOLGIMENTO

La roulette francese è definita dallo spazio degli eventi delle caselle da 0 a 36:

$$\Omega = \{0,1,2,3, \dots, 36\}$$

a) Per calcolare la probabilità che esca una casella tra 9 e 12 inclusi gli estremi, definiamo il relativo evento:

$$E_{9-12} = \{9,10,11,12\}$$

Quindi calcoliamo la probabilità come numero di successi sul totale degli eventi:

$$P(E_{9-12}) = \frac{4}{37} = 0,108$$

b) Per calcolare la probabilità che non esca una casella rossa possiamo far riferimento alle regole dell'algebra booleana, secondo cui la probabilità della negazione di un evento è uguale al suo complemento a uno

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Quindi la probabilità che non esca una casella rossa è data dal complemento a uno della probabilità che esca una casella rossa:

$$P(\overline{\text{rosso}}) = 1 - P(\text{rosso})$$

Sapendo che nella roulette francese ci sono 18 caselle rosse otteniamo:

$$P(\text{rosso}) = \frac{18}{37} = 0,486$$

E quindi:

$$P(\overline{\text{rosso}}) = 1 - 0,486 = 0,514$$

In alternativa, possiamo calcolare la probabilità dell'evento che non esca una casella rossa come la probabilità che esca una casella nera o una casella verde:

$$P(\overline{\text{rosso}}) = P(\text{nero} \cup \text{verde})$$

Sapendo che l'evento che esca una casella nera e l'evento che esca una casella verde tra loro indipendenti, si ha che:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dato che le caselle nere sono 18 e la casella verde solo una si ottiene:

$$P(\overline{\text{rosso}}) = P(\text{nero}) + P(\text{verde}) = \frac{18}{37} + \frac{1}{37} = \frac{19}{37} = 0,514$$

c) Per calcolare la probabilità che esca 0 o un multiplo di 3 si ricorre alla probabilità dell'unione degli eventi. Sapendo che si tratta di eventi indipendenti si ha che:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definiamo quindi l'evento che esca zero e l'evento che esca un multiplo di 3:

$$E_0 = \{0\} \quad E_{\text{multiplo } 3} = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36\}$$

Si ottiene, quindi, la seguente probabilità:

$$P(E_0 \cup E_{\text{multiplo } 3}) = P(E_0) + P(E_{\text{multiplo } 3}) = \frac{1}{37} + \frac{12}{37} = \frac{13}{37} = 0,351$$

d) Per calcolare la probabilità che esca un numero pari e maggiore di 15, si ricorre alla probabilità dell'intersezione di due eventi, data da:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A) = P(B) * P(A|B)$$

Si definiscono, quindi, gli insiemi degli eventi pari e maggiore di 15:

$$E_{\text{pari}} = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\}$$

$$E_{\text{maggiore } 15} = \{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36\}$$

$$P(E_{\text{pari}} \cap E_{\text{maggiore } 15}) = P(E_{\text{maggiore } 15}) * P(E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15})$$

La probabilità di ottenere una casella maggiore di 15 è la seguente:

$$P(E_{\text{maggiore } 15}) = \frac{21}{37} = 0,567$$

L'insieme dell'evento $E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15}$ è il seguente:

$$E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15} = \{16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\}$$

Essendo $E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15}$ definito nello spazio degli eventi di $E_{\text{maggiore } 15}$ la probabilità dell'evento è la seguente:

$$P(E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15}) = \frac{11}{21} = 0,524$$

Si ottiene, quindi:

$$P(E_{\text{pari}} \cap E_{\text{maggiore } 15}) = 0,567 * 0,524 = 0,297$$

In modo equivalente, si può calcolare la probabilità di una casella pari e maggiore di 15 come segue:

$$P(E_{\text{pari}} \cap E_{\text{maggiore } 15}) = P(E_{\text{pari}}) * P(E_{\text{maggiore } 15} | E_{\text{pari}})$$

La probabilità di ottenere una casella pari è la seguente:

$$P(E_{\text{pari}}) = \frac{19}{37} = 0,514$$

L'insieme dell'evento $E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15}$ è il seguente:

$$E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15} = \{16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\}$$

Essendo $E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15}$ definito nello spazio degli eventi di E_{pari} la probabilità dell'evento è la seguente:

$$P(E_{\text{pari}} | E_{\text{maggiore } 15}) = \frac{11}{19} = 0,578$$

Si ottiene, quindi:

$$P(E_{\text{pari}} \cap E_{\text{maggiore } 15}) = 0,514 * 0,578 = 0,297$$

ESERCIZIO 2

Un produttore di automobili utilizza batterie da tre fornitori diversi. Sapendo che le probabilità che una batteria sia difettosa è di 0,13 per il primo fornitore, 0,11 per il secondo e 0,07 per il terzo. Considerato un lotto di 85 pezzi, 40 del primo fornitore, 15 del secondo fornitore e 30 del terzo, calcolare:

- a) La probabilità che un pezzo sia difettoso, indipendentemente dal fornitore;
- b) La probabilità che la batteria sia del secondo fornitore, sapendo che è difettoso.

SVOLGIMENTO

a) Per determinare la probabilità che la batteria sia difettosa, si fa riferimento alle regole della probabilità condizionale:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A|B_i) * P(B_i)$$

Si calcolano dapprima le probabilità che le batterie provengano dal primo, dal secondo o dal terzo fornitore, come rapporto tra il numero di batterie del fornitore e il totale delle batterie:

$$P(F_1) = \frac{40}{85} = 0,471$$

$$P(F_2) = \frac{15}{85} = 0,176$$

$$P(F_3) = \frac{30}{85} = 0,353$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|F_1) * P(F_1) + P(D|F_2) * P(F_2) + P(D|F_3) * P(F_3) = \\ &= 0,13 * 0,471 + 0,11 * 0,176 + 0,07 * 0,353 = 0,105 \end{aligned}$$

b) Per calcolare la probabilità che il pezzo sia del secondo fornitore dato che sia difettoso si utilizza il teorema di Bayes:

$$P(B_i | A) = \frac{P(A|B_i) * P(B_i)}{P(A)}$$

Si ottiene, quindi:

$$P(F_1 | D) = \frac{P(D|F_2) * P(F_2)}{P(D)} = \frac{0,11 * 0,176}{0,105} = 0,184$$

ESERCIZIO 3

L'esame di biologia molecolare consiste in dieci domande a risposta multipla, ognuna delle quali ha quattro possibili risposte. Decidi di rispondere casualmente alle domande. Determinare:

- Il numero medio di risposte esatte;
- La probabilità di dare un numero di risposte esatte maggiore della media;
- La probabilità di dare meno di cinque risposte esatte.

SVOLGIMENTO

Il numero di risposte esatte ottenute rispondendo in modo casuale è una variabile casuale binomiale con parametri $n = 10$ e $p = 0,25$, dal momento che corrispondono a 10 prove indipendenti la cui probabilità di successo è 0,25:

$$X \sim \text{Bin}(10; 0,25)$$

- Il numero medio di risposte esatte è dato dal valore atteso della variabile casuale binomiale:

$$E[X] = np = 10 * 0,25 = 2,5$$

- Per calcolare la probabilità di dare un numero di risposte esatte superiore alla media si fa riferimento all'intero successivo, quindi alla probabilità di dare almeno 3 risposte esatte:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

Sapendo che la funzione di probabilità è data da:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Si ottiene:

$$P(X = 3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} * 0,25^3 * (1-0,25)^{10-3} = 0,25028$$

$$P(X = 4) = \frac{10!}{4!(10-4)!} * 0,25^4 * (1-0,25)^{10-4} = 0,145998$$

$$P(X = 5) = \frac{10!}{5!(10-5)!} * 0,25^5 * (1 - 0,25)^{10-5} = 0,058399$$

$$P(X = 6) = \frac{10!}{6!(10-6)!} * 0,25^6 * (1 - 0,25)^{10-6} = 0,0162$$

$$P(X = 7) = \frac{10!}{7!(10-7)!} * 0,25^7 * (1 - 0,25)^{10-7} = 0,0031$$

$$P(X = 8) = \frac{10!}{8!(10-8)!} * 0,25^8 * (1 - 0,25)^{10-8} = 0,00036$$

$$P(X = 9) = \frac{10!}{9!(10-9)!} * 0,25^9 * (1 - 0,25)^{10-9} = 0,000028$$

$$P(X = 10) = \frac{10!}{10!(10-10)!} * 0,25^{10} * (1 - 0,25)^{10-10} = 0,00000071$$

$$P(X \geq 3) = 0,25028 + 0,145998 + 0,058399 + 0,0162 + 0,0031 + 0,00036 + 0,000028 + 0,00000071 = 0,47437$$

c) Per calcolare la probabilità di ottenere meno di cinque risposte esatte, possiamo sfruttare i calcoli del punto precedente e ottenerla come complemento a uno della probabilità di ottenere più di cinque risposte esatte. Dalle regole di algebra booleana sappiamo che:

$$P(X < 5) = 1 - P(X \geq 5)$$

Quindi:

$$P(X \geq 5) = 0,058399 + 0,0162 + 0,0031 + 0,00036 + 0,000028 + 0,00000071 = 0,07088$$

Da cui:

$$P(X < 5) = 1 - 0,07088 = 0,92912$$

ESERCIZIO 4

Il numero medio di passeggeri che arrivano all'Aeroporto Internazionale di Napoli è di 4 ogni minuto. Determinare la probabilità che:

- a) Arrivino almeno due passeggeri in trenta secondi;
- b) Il numero di passeggeri arrivati in un minuto sia compreso tra 1 e 3.

SVOLGIMENTO

Il numero medio di passeggeri al minuto segue una variabile casuale di Poisson con parametro $\lambda = 4$.

$$X \sim \text{Po}(4)$$

a) Per calcolare la probabilità che arrivino almeno due passeggeri in trenta secondi bisogna scalare il parametro λ per ottenere il numero di passeggeri ogni trenta secondi. In questo caso $\lambda = 2$. Inoltre, dal momento che non è possibile calcolare le probabilità per tutti i valori da 2 a infinito, anche in questo caso si fa riferimento all'evento complementare:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

La funzione di probabilità è la seguente:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{(-\lambda)}$$

Quindi, sapendo che $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$:

$$P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{(-2)} = 0,13534$$

$$P(X = 1) = \frac{2^1}{1!} e^{(-2)} = 0,27067$$

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,13534 + 0,27067 = 0,40601$$

E il complemento a 1:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0,40601 = 0,59399$$

b) In questo caso, trattandosi del numero di passeggeri al minuto, $\lambda = 4$. Quindi, calcoliamo le probabilità di 1, 2 e 3 passeggeri e le sommiamo:

$$P(X = 1) = \frac{4^1}{1!} e^{(-4)} = 0,07326$$

$$P(X = 2) = \frac{4^2}{2!} e^{(-4)} = 0,14653$$

$$P(X = 3) = \frac{4^3}{3!} e^{(-4)} = 0,53106$$

Quindi:

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,07326 + 0,14653 + 0,53106 \\ = 0,75085$$

ESERCIZIO 5

Un esperimento consiste nel lanciare una moneta per 100 volte consecutive. Determinare:

- a) La probabilità di ottenere meno di 38 teste;
- b) La probabilità di ottenere tra le 45 e le 60 teste.

SVOLGIMENTO

Per calcolare le probabilità di una variabile casuale binomiale, per n sufficientemente grande si può fare riferimento al teorema del limite centrale, approssimandolo a una variabile casuale normale. Quindi, dal momento che il lancio di una moneta non truccata ha probabilità 0,5 e il numero di lanci è 100, ricaviamo una variabile casuale normale i cui parametri corrispondono a quelli della variabile casuale binomiale:

$$E[X] = np = 100 * 0,5 = 50$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 100 * 0,5 * 0,5 = 25$$

- a) Per calcolare la probabilità di ottenere meno di 38 teste, standardizziamo la variabile:

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{VAR(X)}} = \frac{38 - 50}{\sqrt{25}} = -2,4$$

Per calcolare la probabilità si utilizzano le tavole della variabile casuale normale:

$$P(X < 38) = P(Z < -2,4) = 0,0082$$

b) Per calcolare la probabilità di ottenere tra le 45 e le 60 teste, dobbiamo tener conto che la variabile casuale binomiale è una variabile casuale discreta, mentre la variabile casuale normale continua. Quindi, bisogna applicare la correzione di continuità in modo tale che i valori 45 e 60 siano effettivamente inclusi nel calcolo della probabilità. La correzione di continuità consiste nell'aggiungere o sottrarre un valore arbitrario agli estremi dell'intervallo, generalmente $\frac{1}{2}$:

$$P(45 - \frac{1}{2} \leq X \leq 60 + \frac{1}{2})$$

Standardizziamo gli estremi dell'intervallo

$$Z_1 = \frac{X - E[X]}{\sqrt{VAR(X)}} = \frac{44,5 - 50}{\sqrt{25}} = -1,1$$

$$Z_2 = \frac{X - E[X]}{\sqrt{VAR(X)}} = \frac{60,5 - 50}{\sqrt{25}} = 2,1$$

E calcoliamo la probabilità utilizzando le tavole della variabile casuale normale:

$$P(45 - \frac{1}{2} \leq X \leq 60 + \frac{1}{2}) = P(-1,1 \leq Z \leq 2,1) = 0,8464$$