

## Applicazioni lineari, seconda parte

1. Sia dato lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$ , e indichiamo con  $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  la sua base canonica.

1. Provare che i vettori  $v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, -1)$  e  $v_3 = (0, 0, 2)$  formano una base  $\mathcal{R}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

2. dato l'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$f(v_1) = (3, 1, 0), \quad f(v_2) = (-1, 0, 2), \quad f(v_3) = (0, 2, 0),$$

determinare la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{R}$  e rispetto a  $\mathcal{E}$ .

2. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  definito nel modo seguente

$$f(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z, y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \right).$$

1. Provare che  $f$  è un isomorfismo e trovare  $f^{-1}$ .

2. Trovare  $f(W)$  dove  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ .

3. Sia  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ , l'applicazione di  $\mathbb{R}_3[x]$  in sé definita nel modo seguente

$$p(x) \mapsto xp'(x),$$

( $p'(x)$  è la derivata prima della funzione polinomiale  $p : x \mapsto p(x)$ ).

1. Provare che  $f$  è lineare. Esplicitare l'endomorfismo  $f$ .

2. Trovare  $f(V)$ , dove  $V = \{ax^2 + bx - b : a, b \in \mathbb{R}\}$ .

4. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , l'applicazione lineare di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^2$  la cui matrice associata rispetto ai riferimenti canonici, rispettivamente di  $\mathbb{R}^3$  e di  $\mathbb{R}^2$ , è  $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Trovare  $f(1, 2, 3)$ .

2. Trovare  $\ker f$ , dire se  $f$  è iniettiva e suriettiva.

3. Trovare  $f^{-1}(1, 2)$ .

5. Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche, rispettivamente di  $\mathbb{R}^4$  e di  $\mathbb{R}^3$ , è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dire se  $f$  è iniettiva o suriettiva.

2. Trovare  $f^{-1}(L(u))$ , dove  $u = (1, 2, 3)$ .

3. Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $(3, -1, 2, 2)$  e  $(1, 1, 1, 3)$  ( $L((3, -1, 2, 2), (1, 1, 1, 3))$ ). Determinare una base di  $f(U)$ .

4. Siano  $\mathcal{R} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{F} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 1)\}$  riferimenti rispettivamente di  $\mathbb{R}^4$  e di  $\mathbb{R}^3$ : Scrivere la matrice rappresentativa  $A_{\mathcal{R}, \mathcal{F}}(f)$  dell'applicazione  $f$  rispetto a questi due riferimenti.

6. Si considerino i polinomi  $p_1(t) = t^2 - 2t$ ,  $p_2(t) = 1 + 2t$ ,  $p_3(t) = 2 - t^2$ ,  $q_1(t) = -1 + t$ ,  $q_2(t) = -1 + t - t^2$ , e  $q_3(t) = 2t + 2t^2$ .

1. Dimostrare che  $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$  e  $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3\}$  sono due basi di  $\mathbb{R}_2[t]$ .
2. Trovare la matrice di cambiamento di riferimento da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$

7. Siano  $v_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  e  $v_3 = (0, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ . Dimostrare che non esiste una applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F(v_1) = (1, 0, 0), \quad F(v_2) = (0, 1, 0), \quad F(v_3) = (0, 0, 1).$$

8. Dimostrare che gli unici endomorfismi di uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}^1(\mathbb{K})$  di dimensioine 1 su un campo  $\mathbb{K}$  sono le *omotetie* (cioè, le applicazioni lineari del tipo  $\omega_a : v \in \mathbb{V}^1 \mapsto av_1 \in \mathbb{V}^1$ , dove  $a \in \mathbb{K}$ ).

9. Provare che esiste una applicazione lineare di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^4$ , che trasforma i vettori  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, -1, 1)$  rispettivamente nei vettori  $(0, 0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1, 1)$ , e costruire una tale applicazione.

10. Dire se è possibile:

1. costruire una applicazione lineare suriettiva  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\ker f = L(1, 0, 1)$ ;
2. costruire una applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\text{Im } f = L((1, 0, 1), (2, 2, 2))$ ;
3. costruire una applicazione lineare iniettiva  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\text{Im } f = L((1, 0, 1), (2, 2, 2))$ ;
4. costruire una applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\text{Im } f = L((1, 0, 1), (2, 2, 2))$ ; e  $\ker f = L(1, 0, 1)$ .

Nei casi in cui la risposta è affermativa, dire se le applicazioni sono una sola oppure ne esiste più di una e, in questo caso, esibirne due distinte.

11. Dire se è sempre vero che data una applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora

1.  $\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = n$ ;
2.  $\mathbb{R}^n = \ker f \oplus \text{Im } f$ .