Richiami su O.A.

Oscillatore armonico, energia meccanica
Oscillatore smorzato
Oscillatore forzato. Risonanza. Fattore di qualita`
Analogie meccaniche - elettriche

Oscillatore armonico

- Abbiamo visto diversi sistemi che si muovono di moto armonico
  - Un punto sotto l’azione di una molla, il pendolo, il pendolo di torsione
- Altri sistemi fisici presentano grandezze che seguono la stessa legge oraria
  - Solidi elastici, fluidi, circuiti elettrici, campi elettromagnetici
  - Strutture meccaniche che si allontanano di poco dall’equilibrio, per cui le forze di richiamo sono <u>lineari rispetto agli spostamenti</u>

Oscillatore armonico

- Tutti questi fenomeni sono regolati da equazioni (in generale più d’una) del tipo

$$\frac{d^2\xi_k}{dt^2} = -\omega_k^2 \xi_k$$

- Ove le $\{\xi_k\}$ sono opportune grandezze che caratterizzano il sistema e le <u>pulsazioni</u> $\{\omega_k^2\}$ sono <u>costanti</u> che dipendono dai parametri del sistema
- ω_k^2 è la forza di richiamo per unità di spostamento e di massa

Oscillatore armonico

- Le soluzioni di queste equazioni sono

$$\xi_k(t) = A_k \sin(\omega_k t + \phi_k)$$

- Ove le <u>ampiezze</u> $\{A_k\}$ e le <u>fasi</u> $\{\phi_k\}$ sono <u>costanti</u> calcolabili conoscendo le <u>condizioni iniziali</u>

$$\xi_k(t=0)$$

$$\left(\frac{d\xi_k}{dt}\right)_{t=0}$$

Accelerazione come funzione della posizione

- Sia: *a = a(x)* cioè in funzione della posizione
- Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per la velocita`:

$$av = va = v\frac{dv}{dt}$$

- Integriamo ambo i membri rispetto a *t*:

$$\int_{t0}^{t} avdt = \int_{t0}^{t} v\frac{dv}{dt}dt$$

- Poichè

$$vdt = dx$$

$$\int_{t0}^{t} adx = \int_{t0}^{t} \frac{dv}{dt}dx = \int_{v0}^{v} \frac{dx}{dt}dv = \int_{v0}^{v} vdv =$$

Accelerazione come funzione della posizione

$$\int_{x0}^{x} a(x)dx = \int_{v0}^{v} v dv$$

- Risolvendo l'integrale si ha:

$$\int_{x0}^{x} a(x)dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2$$

- cioè

$$v = \sqrt{{v_0}^2 + 2\int_{x0}^{x} a(x)dx}$$

Un esempio importante

- Sia:

$$a(x) = -\omega^2 x$$

- Avremo allora:

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0{}^2\right) = \int_{x_0}^{x} a(x)dx = -\int_{x_0}^{x} \omega^2 x dx = -\frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 - x_0{}^2\right)$$

- Risolvendo rispetto a *v*:

$$v = \sqrt{\left(v_0{}^2 + \omega^2 x_0{}^2\right) - \omega^2 x^2} = \sqrt{\omega^2 A^2 - \omega^2 x^2} = \omega A\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

Un esempio importante

- Ma:

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \omega A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

- Risolvendo per separazione di variabili:

$$\frac{dx}{A\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}} = \omega dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{A\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\left(\frac{x}{A}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \omega \int_0^t dt$$

Un esempio importante

- Risolvendo avremo:

$$\omega \int_0^t dt = \omega t$$

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \arcsin \zeta - \phi = \arcsin \frac{x}{A} - \phi$$

$$\arcsin \frac{x}{A} - \phi = \omega t$$

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

Approfondimento

- Per definizione: $p = m\dot{q} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{q}$

- L'equazione del moto diviene $m\ddot{q} = -kq$

- Dividendo i membri per *m* e ponendo $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$
- Otteniamo

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

Approfondimento

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \Rightarrow q = q_0 \sin(\omega t)$$

$$\dot{q} = q_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$p = m\dot{q} = m q_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$\frac{p}{m\omega} = q_0 \cos(\omega t)$$

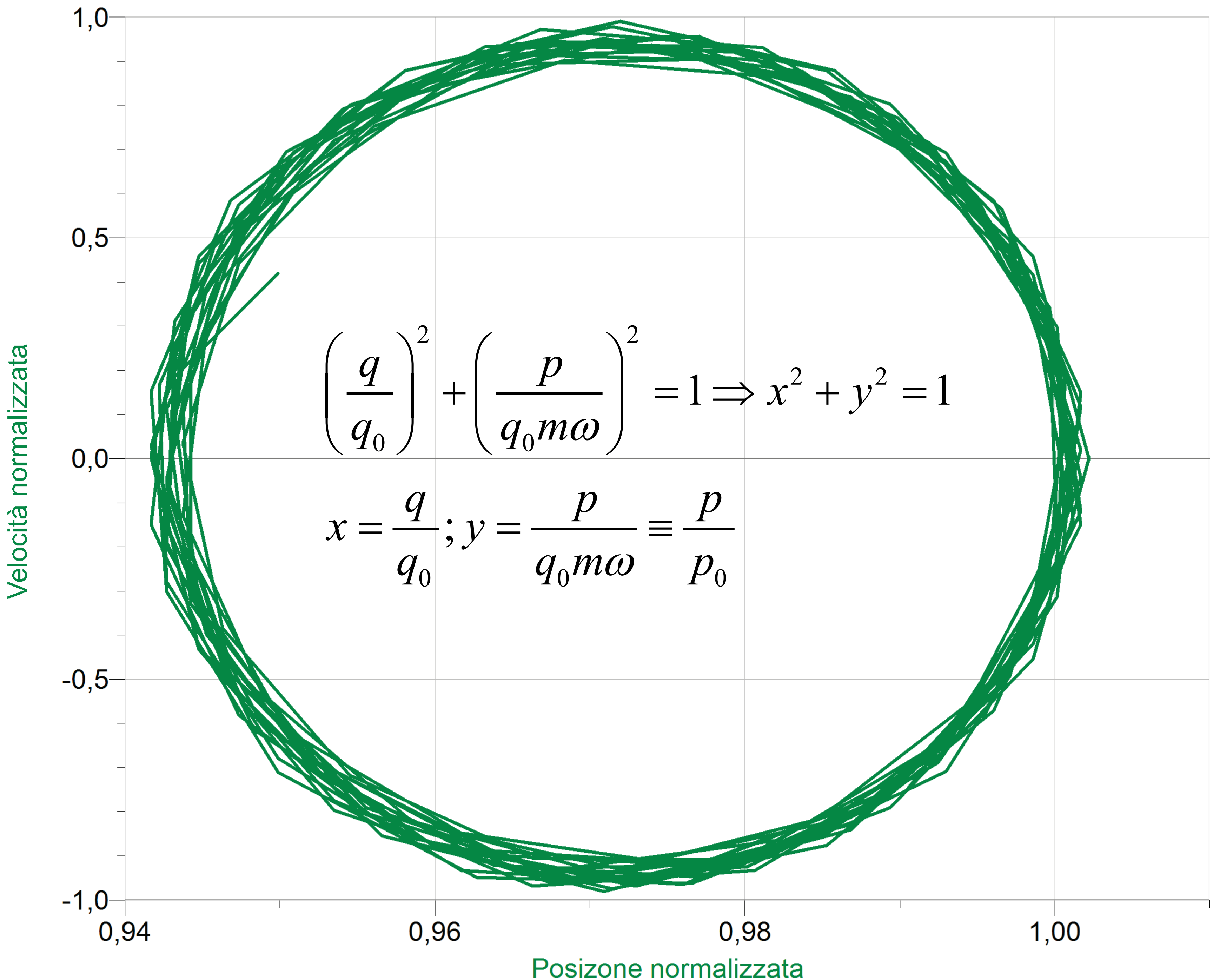
$$q^2 + \left(\frac{p}{m\omega}\right)^2 =$$

$$= \left(q_0 \sin(\omega t)\right)^2 + \left(q_0 \cos(\omega t)\right)^2 = q_0{}^2$$

$$\left(\frac{q}{q_0}\right)^2 + \left(\frac{p}{q_0 m\omega}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2} m q^2 \omega^2 + \frac{1}{2m} p^2 = \frac{1}{2} m q_0{}^2 \omega^2$$

= costante (vedi dopo)



1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
0,94
0,96
0,98
1,00
Velocità normalizzata
Posizone normalizzata
$\left(\frac{q}{q_0}\right)^2 + \left(\frac{p}{q_0 m\omega}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
$x = \frac{q}{q_0}; y = \frac{p}{q_0 m\omega} \equiv \frac{p}{p_0}$

Energia dell'oscillatore armonico

- Riferiamoci al caso particolare del punto materiale sotto l'azione della forza elastica $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{x}$
- Questa forza è conservativa, quindi l'energia meccanica si conserva. Verifica:

$$K(t)=\frac{1}{2}mv^2(t)=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$U(t)=\frac{1}{2}kx^2(t)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

$$E=K(t)+U(t)=\frac{1}{2}A^2\left(m\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)+k\sin^2(\omega t+\phi)\right)$$

Energia dell'oscillatore armonico

- Poiché $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$
- abbiamo $E = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \dfrac{1}{2} kA^2$
- che è costante nel tempo
- Possiamo riscrivere *K* e *U* in termini di *E*

$$K(t) = E\cos^2(\omega t + \phi) \qquad U(t) = E\sin^2(\omega t + \phi)$$

- I valori medi su un periodo sono

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)dt = \frac{1}{2}E \qquad \langle U \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt = \frac{1}{2}E$$

OA smorzato da forza viscosa

- L'oscillatore armonico sia smorzato da una forza viscosa, cioe` proporzionale e opposta alla velocita` $F = -\lambda v$
- L'equazione del moto e` <u>omogenea</u> e ha forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

<u>coefficiente di smorzamento</u>

$$\gamma = \lambda / 2m \quad [\gamma] = \frac{N}{kgms^{-1}} = \frac{kgms^{-2}}{kgms^{-1}} = s^{-1}$$

<u>pulsazione naturale</u>

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

OA smorzato da forza viscosa

- Per risolvere questa equazione, studiamo le soluzioni dell'eq. algebrica associata (EAA) $\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$
- Queste sono

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- Abbiamo tre casi, a seconda del valore del discriminante

OA smorzato da forza viscosa

- Caso $\gamma^2 > \omega_0^2$
- smorzamento forte, le soluzioni dell'EAA sono entrambe negative

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- La soluzione generale del'eq. differenziale e`

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

- *A* e *B* si determinano specificando le condizioni iniziali

OA smorzato da forza viscosa

- Caso $\gamma^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$
- smorzamento debole, le soluzioni dell'EAA sono complesse coniugate

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\Omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\Omega$$

- La soluzione generale del'eq. differenziale e`

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}\right)$$

OA smorzato da forza viscosa

- Usando la formula di Eulero e ridefinendo le costanti, abbiamo
$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin(\Omega t + \phi)$$
- Ove *C* e ϕ si determinano specificando le condizioni iniziali
- La soluzione e` una sinusoide smorzata esponenzialmente. Si definisce lo <u>pseudoperiodo</u> $T = 2\pi/\Omega$
- e in un tempo *T* l'ampiezza si riduce di
$$x(t+T)/x(t) = e^{-\gamma T}$$

OA smorzato da forza viscosa

- Caso $\gamma = \omega_0$
- smorzamento critico, le soluzioni dell'EAA sono negative e uguali

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

- La soluzione generale del'eq. differenziale e`

$$x(t) = Ate^{\alpha t} + Be^{\alpha t} = e^{-\gamma t}\left(At + B\right)$$

- *A* e *B* si determinano specificando le condizioni iniziali

Proprieta` asintotica $t \to \infty$

- In tutti e tre i casi la soluzione tende a zero per tempi sufficientemente grandi

$$\Delta > 0 \qquad x(t) = Ae^{-|\alpha_1|t} + Be^{-|\alpha_2|t}$$

$$\Delta < 0 \qquad x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin(\Omega t + \phi)$$

$$\Delta = 0 \qquad x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

- Cioe` la soluzione generale dell'eq. omogenea soddisfa

$$\lim_{t \to \infty} x_{omo}^{gen}(t) = 0$$

OA forzato

- Il moto di un OA si puo` rendere <u>persistente</u>, in presenza di attrito viscoso, applicando una forza esterna sinusoidale $F = F_0 \sin \omega t$
- L'equazione del moto diviene <u>non omogenea</u>

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

- La pulsazione della forza, ω, e` in generale diversa dalla pulsazione naturale

OA forzato

- Nella teoria delle eq. differenziali si dimostra che la soluzione generale dell'eq. non omogenea e` somma della soluzione generale dell'eq. omogenea e di una soluzione particolare dell'eq. non omogenea

$$x_{non-omo}^{gen} = x_{omo}^{gen} + x_{non-omo}^{part}$$

- Cerchiamo allora se esiste una soluzione particolare di forma sinusoidale con pulsazione uguale a quella della forza esterna e dipendente da due parametri da determinare *A* e ϕ

$$x_{non-omo}^{part} = A\sin(\omega t + \phi)$$

OA forzato

- Inserendo la soluzione di prova,

$$\frac{d}{dt^2}\left(A\sin\left(\omega t+\phi\right)\right)+2\gamma\frac{d}{dt}\left(A\sin\left(\omega t+\phi\right)\right)+\omega_0^2 A\sin\left(\omega t+\phi\right)=\frac{F_0}{m}\sin\left(\omega t\right)$$

$$\omega t+\phi\equiv f\left(t\right)\Rightarrow \omega t=f\left(t\right)-\phi$$

$$\frac{d}{dt^2}\left(A\sin f\left(t\right)\right)+2\gamma\frac{d}{dt}\left(A\sin f\left(t\right)\right)+\omega_0^2 A\sin f\left(t\right)=\frac{F_0}{m}\sin\left(f\left(t\right)-\varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(A\sin f\left(t\right)\right)=A\cos f\left(t\right)f\,'=A\omega\cos f\left(t\right)$$

OA forzato

$$\omega t + \phi \equiv f\left(t\right) \Rightarrow \omega t = f\left(t\right) - \phi$$

$$\frac{d}{dt^2}\left(A\sin f\left(t\right)\right) + 2\gamma\frac{d}{dt}\left(A\sin f\left(t\right)\right) + \omega_0^2 A\sin f\left(t\right) = \frac{F_0}{m}\sin\left(f\left(t\right) - \varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt^2}\left(A\sin f\left(t\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(A\omega\cos f\left(t\right)\right) = A\omega\left[-\sin f\left(t\right) f\,'\right] = -A\omega^2\sin f\left(t\right)$$

OA forzato

$$\frac{d}{dt^2}\left(A\sin f\left(t\right)\right)+2\gamma\frac{d}{dt}\left(A\sin f\left(t\right)\right)+\omega_0^2 A\sin f\left(t\right)=\frac{F_0}{m}\sin\left(f\left(t\right)-\varphi\right)$$

$$-A\omega^2\sin f\left(t\right) \quad +2\gamma A\omega\cos f\left(t\right) \qquad +\omega_0^2 A\sin f\left(t\right)=$$

$$=\frac{F_0}{m}\left[\sin f\left(t\right)\cos\varphi-\cos f\left(t\right)\sin\varphi\right]$$

$$-A\omega^2\sin f\left(t\right)+\omega_0^2 A\sin f\left(t\right)-\frac{F_0}{m}\sin f\left(t\right)\cos\varphi=\sin f\left(t\right)\left[\omega_0^2 A-A\omega^2-\frac{F_0}{m}\cos\varphi\right]=$$

$$=\frac{F_0}{m}\left[-\cos f\left(t\right)\sin\varphi\right]-2\gamma A\omega\cos f\left(t\right)=-\cos f\left(t\right)\left[2\gamma A\omega+\frac{F_0}{m}\sin\varphi\right]$$

$$\left[\omega_0^2 A-A\omega^2-\frac{F_0}{m}\cos\varphi\right]=\left[2\gamma A\omega+\frac{F_0}{m}\sin\varphi\right]=0$$

OA forzato

L'eguaglianza deve valere ad ogni tempo e questo puo` accadere se e solo se

$$\left[\omega_0^2 A - A\omega^2 - \frac{F_0}{m}\cos\varphi\right] = 0$$

$$\left[2\gamma A\omega + \frac{F_0}{m}\sin\varphi\right] = 0$$

$$\left[\omega_0^2 A - A\omega^2 - \frac{F_0}{m}\cos\varphi\right] = 0 \Leftrightarrow A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = \frac{F_0}{m}\cos\varphi$$

$$\left[2\gamma A\omega + \frac{F_0}{m}\sin\varphi\right] = 0 \Leftrightarrow 2\gamma A\omega = -\frac{F_0}{m}\sin\varphi$$

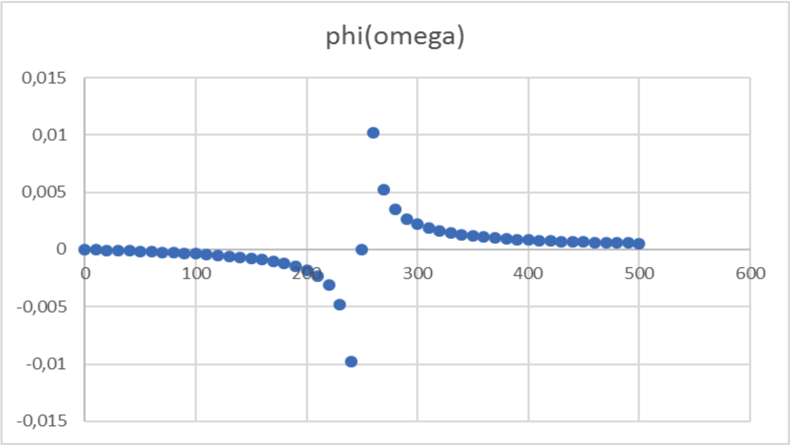
OA forzato

$$\frac{F_0}{m}\sin\varphi = -2\gamma A\omega$$

$$\frac{F_0}{m}\cos\varphi = A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$$

$$tg\phi(\omega) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$



OA forzato

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \Leftrightarrow \sin(\phi(\omega)) = \frac{\dfrac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2}}$$

$$\frac{F_0}{m}\sin\varphi = \frac{F_0}{m}\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2}} = -2\gamma A\omega \Leftrightarrow$$

$$-\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2}} = A$$

OA forzato

$$-\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}}=A \qquad \phi\left(\omega\right)=\arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0} A\left(\omega\right)=-\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2}}=-\frac{F_0}{m}\frac{1}{2\gamma\omega_0} \qquad x_{non-omo}^{part}=A\sin\left(\omega t+\phi\right)$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x\left(t\right)=-\frac{F_0}{m}\frac{1}{2\gamma\omega_0}\sin\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{F_0}{m}\frac{1}{2\gamma\omega_0}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega_0 t\right)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos\left(\omega_0 t\right)$$

OA forzato

- Caratteristiche della soluzione particolare della funzione <u>spostamento</u>:
  - ha la pulsazione della forza esterna, non quella naturale
  - e` sfasata rispetto alla forza
  - ampiezza e fase dipendono dalla pulsazione esterna
  - ampiezza e fase non dipendono dalle condizioni iniziali

Risonanza

- Cerchiamo il valore di ω che rende massimo il valore assoluto dell'ampiezza

$$A(\omega) = -\frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$A_{\max} \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left(\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2\right) = 0$$

Denominatore deve essere minimo

$$2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)2\omega + 8\gamma^2\omega = 0 \Leftrightarrow \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + 2\gamma^2 = 0$$

$$\left(\omega^2\right)_{\max} = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Risonanza

$$A\left(\omega_{\max}\right) = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}^{\,2} - \omega_0^2\right)^2 + \left(2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}\right)^2}} =$$

$$A\left(\omega_{\max}\right) = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)\left(2\gamma\right)^2}} =$$

$$A\left(\omega_{\max}\right) = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{4\gamma^4 + \left(4\omega_0^2\gamma^2 - 8\gamma^4\right)}} =$$

$$A\left(\omega_{\max}\right) = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{4\left(\omega_0^2\gamma^2 - \gamma^4\right)}} = -\frac{F_0}{2m\gamma}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)}}$$

Potenza

- La potenza istantanea è

$$P(t) = F(t)\frac{d}{d}x(t) = F(t)\omega A\cos(\omega t + \phi) = F_0 A\sin(\omega t)\omega\cos(\omega t + \phi)$$

- La media temporale della potenza è

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T F_0 A\sin(\omega t)\omega\cos(\omega t + \phi)\,dt =$$

$$= \frac{F_0\omega A}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t + \phi)\,dt = \frac{F_0\omega A}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\left[\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right]dt =$$

$$= \frac{F_0\omega A}{T}\left[\cos(\phi)\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt - \sin(\phi)\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt\right]$$

Potenza

$$\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt = \left[\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)\right]_0^T = 0 - 0 = 0$$

$$\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt = \frac{T}{2} - \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2}\,dt = \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2\omega}\left[\sin(2\omega t)\right]_0^T = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{F_0 A\omega}{T}\left[\cos(\phi)\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt - \sin(\phi)\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt\right] =$$

$$\overline{P(t)} = -\frac{F_0\omega A}{T}\sin(\phi)\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = -\frac{F_0\omega A}{T}\sin(\phi)\frac{\pi}{\omega} =$$

$$-\pi\frac{F_0 A}{T}\sin(\phi) = -\pi\frac{F_0 A}{2\pi}\omega\sin(\phi) = -\frac{F_0 A}{2}\omega\sin(\phi)$$

Potenza

$$\overline{P(t)} = -\frac{F_0 A}{2}\omega \sin(\phi) = -\frac{F_0 A}{2}\omega \frac{\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2}}$$

$$\overline{P(t)} = -F_0 A \frac{\gamma\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = -F_0 A \frac{\gamma\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Potenza

$$\overline{P(t)} = -F_0 A \frac{\gamma\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}} = -F_0 A \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}{\omega^4}+\frac{\left(2\gamma\omega\right)^2}{\omega^4}}}$$

$$\overline{P(t)} = -F_0 A \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2}\right)^2}} = -F_0 A \frac{\gamma}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\left(\frac{2\gamma}{\omega}\right)^2}}$$

$$A = -\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}}$$

Potenza

$$\overline{P(t)} = \frac{F_0^{\,2}}{m}\gamma \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\left(\dfrac{2\gamma}{\omega}\right)^2}}$$

$$\overline{P(t)} = \frac{F_0^{\,2}}{m}\gamma \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2+\left(\dfrac{2\gamma\omega}{\omega^2}\right)^2}}$$

$$\overline{P(t)} = \frac{F_0^{\,2}}{m}\gamma \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}} \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}}$$

Potenza

$$\overline{P(t)} = \frac{F_0^{\,2}}{m}\gamma\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\omega}\overline{P(t)} = \frac{F_0^{\,2}}{m}\gamma\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}\right)$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}\right) = \frac{2\omega\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)-\omega^2\left(4\omega^3-4\omega_0^2\omega+8\gamma^2\omega\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)^2}$$

Potenza

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}\right)=\frac{2\omega\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)-\omega^2\left(4\omega^3-4\omega_0^2\omega+8\gamma^2\omega\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)^2}=$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}\right)=\frac{2\omega\left(\omega^4+\omega_0^4-2\omega^2\omega_0^2+4\gamma^2\omega^2\right)-\left(4\omega^5-4\omega_0^2\omega^3+8\gamma^2\omega^3\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}\right)=\frac{\left(2\omega^5+2\omega\omega_0^4-4\omega^3\omega_0^2+8\gamma^2\omega^3\right)-\left(4\omega^5-4\omega_0^2\omega^3+8\gamma^2\omega^3\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}\right)=\frac{\left(2\omega\omega_0^4\right)-\left(2\omega^5\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)^2}=0$$

Potenza massima

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}\right)=\frac{\left(2\omega\omega_0^4\right)-\left(2\omega^5\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2\right)^2}=0\Leftrightarrow\left(\omega^4\right)=\left(\omega_0^4\right)$$

$$\omega_{\max}=\omega_0$$

$$\omega_{\max}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$$

$$\overline{P(t)}=\frac{F_0{}^2}{m}\gamma\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}$$

$$\overline{P(t)}_{\omega=\omega_0}=\frac{F_0{}^2}{m}\gamma\frac{\omega^2}{\left(2\gamma\omega\right)^2}=\frac{F_0{}^2}{m}\frac{1}{4\gamma}$$

Larghezza di risonanza

- E` definita dalle due pulsazioni per cui la potenza media e` meta` della potenza media massima

$$\overline{P} = \frac{\overline{P}_{\max}}{2}$$

$$\overline{P(t)} = \frac{F_0^{\ 2}}{m}\gamma\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2} = \frac{F_0^{\ 2}}{m}\frac{1}{8\gamma}$$

Larghezza di risonanza

$$8\gamma^2\omega^2 = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2$$

$$8\gamma^2\omega^2 = \omega^4 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + 4\gamma^2\omega^2$$

$$\omega^4 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 - 4\gamma^2\omega^2 = 0$$

$$\omega^4 - 2\omega^2\left(\omega_0^2 + 2\gamma^2\right) + \omega_0^4 = 0$$

Larghezza di risonanza

$$\omega^4 - 2\omega^2\left(\omega_0^2 + 2\gamma^2\right) + \omega_0^4 = 0$$

$$\overline{\omega}^2 = \left(\omega_0^2 + 2\gamma^2\right) \mp \sqrt{\left(\omega_0^2 + 2\gamma^2\right)^2 - \omega_0^4}$$

$$\overline{\omega}^2 = \left(\omega_0^2 + 2\gamma^2\right) \mp \sqrt{\left(\omega_0^4 + 4\gamma^4 + 4\omega_0^2\gamma^2\right) - \omega_0^4}$$

$$\overline{\omega}^2 = \left(\omega_0^2 + 2\gamma^2\right) \mp 2\gamma\sqrt{\left(\gamma^2 + \omega_0^2\right)}$$

$$\overline{\omega}^2 = \sqrt{\left(\omega_0^2 + \gamma^2\right)}^2 + \gamma^2 \mp 2\gamma\sqrt{\left(\gamma^2 + \omega_0^2\right)} = \left[\sqrt{\left(\omega_0^2 + \gamma^2\right)} \mp \gamma\right]^2$$

Larghezza di risonanza

- Si ottengono due equazioni quadratiche in ω, le cui due soluzioni accettabili sono

$$\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2} - \gamma \qquad \omega_2 = \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2} + \gamma$$

- La larghezza di risonanza e`

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$$

Fattore di merito

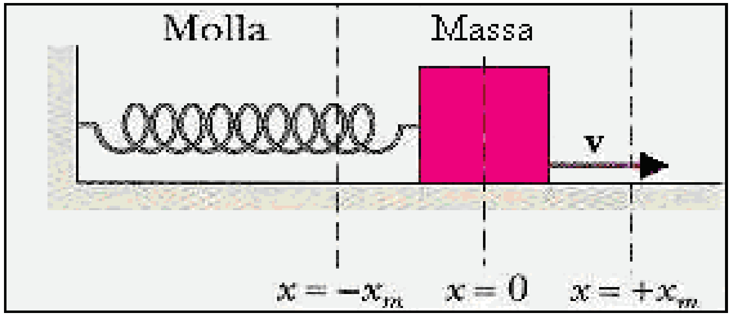
- E` definito come

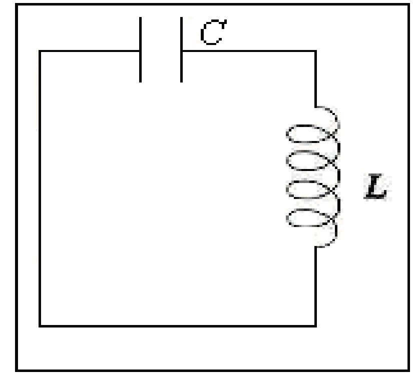
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$$

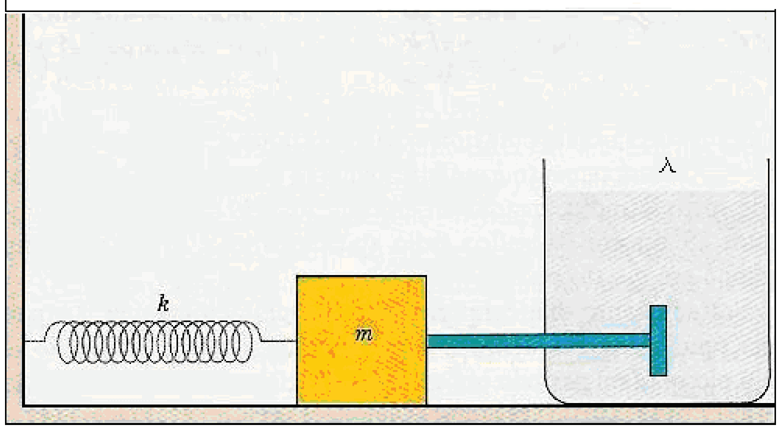
- E` tanto maggiore quanto piu` stretta (cioe` migliore) e` la risonanza

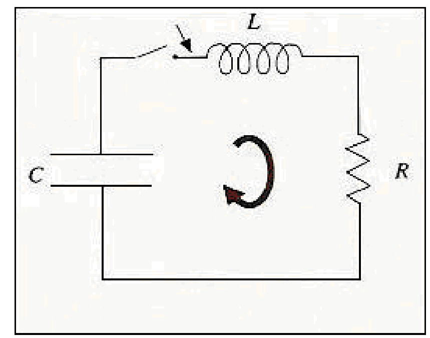
Analogie oscillazioni

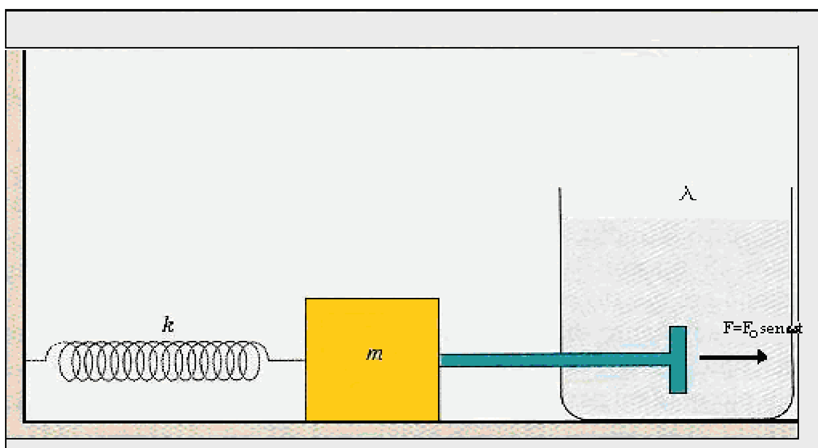
- A quale circuito è equivalente l’oscillatore armonico?
- A quale circuito è equivalente l’oscillatore armonico smorzato?
- A quale circuito è equivalente l’oscillatore armonico smorzato?

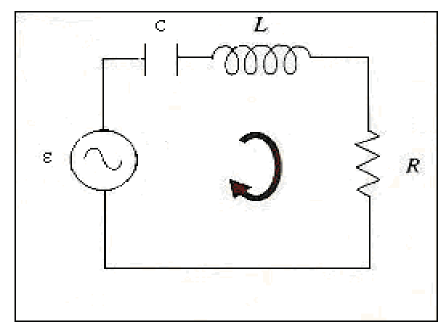

Molla
Massa
v
$x = -x_m$
$x = 0$
$x = +x_m$


C
L


λ
k
m


L
C
R


λ
k
m
F=F0 sen

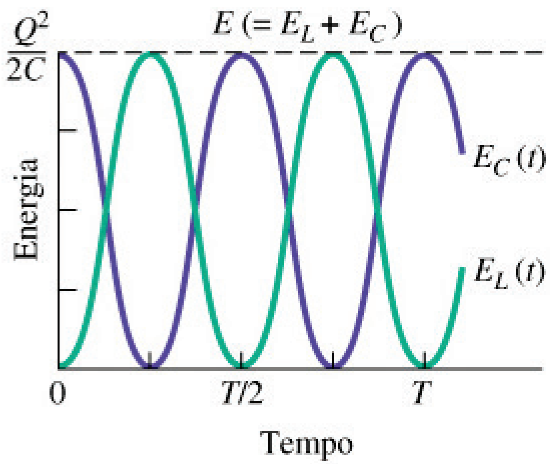

C
L
ε
R

O.A. e Circuito LC

$$-L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\frac{q}{C}=0 \qquad U=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\text{cost}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q}{L\,C}=0 \qquad 0=Li\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} \quad\Rightarrow\quad 0=L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}$$

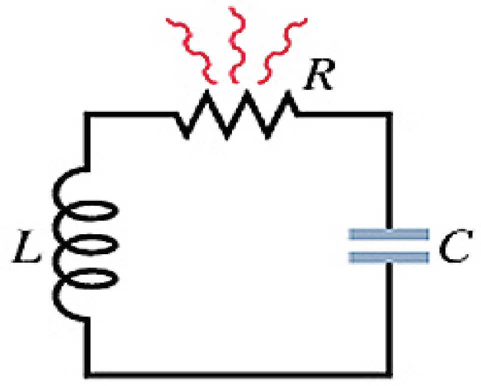
$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\,q=0 \qquad q=Q\cos(\omega t+\phi) \qquad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad i=\frac{dq}{dt}=-\omega\,Q\sin(\omega t+\phi)=-I\sin(\omega t+\phi)$$



$$U_L=\frac{1}{2}Li^2=\frac{LI^2}{2}\sin^2(\omega t+\phi) \qquad U_C=\frac{q^2}{2C}=\frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$U=U_L+U_C=\frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{LI^2}{2}\sin^2(\omega t+\phi)=\frac{Q^2}{2C}=\frac{LI^2}{2}$$

Oscillazioni smorzate in un circuito RLC



$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0$$

$$Li\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}=-i^2R$$

$$q=Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t+\phi)$$

$$U_C=\frac{q^2}{2C}=\frac{Q^2e^{-2Rt/2L}\cos^2(\omega' t+\phi)}{2C}$$

$$\omega'=\sqrt{\omega^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Oscillazioni forzate in un circuito RLC

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon_o\cos\omega' t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=\frac{\varepsilon_o}{L}\cos\omega' t$$

$$\gamma=\frac{R}{2L} \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\gamma\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=\frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega' t$$

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega' t\right]$$

Oscillazioni forzate in un circuito RLC

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon_o\cos\omega' t$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=-\frac{\varepsilon_o}{L}\omega'\mathrm{sen}\,\omega' t$$

$$i_0=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega' L-\frac{1}{\omega' C}\right)^2}}$$

$$tg\varphi'=-\frac{\omega' L-\frac{1}{\omega' C}}{R}$$

Risonanza in un circuito RLC

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega' L - \frac{1}{\omega' C}\right)^2}}$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg}\left[-\frac{\omega' L - \frac{1}{\omega' C}}{R}\right]$$

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

$$\varphi' = 0$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}\cos\omega' t$$

il circuito si comporta come puramente resistivo poiché la corrente e la f.e.m. sono in fase

Quindi la i_0 assume il valore massimo per $\omega' = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$