

CAPITOLO 1

DEFINIZIONE DI MACCHINA E PRINCIPI FONDAMENTALI

1.1 Macchine e meccanismi

Si definisce macchina un sistema costituito da più elementi materiali, alcuni dei quali fissi ed altri mobili; gli elementi mobili si muovono sotto l'azione di forze di natura diversa, producendo lavoro.

Gli elementi costituenti una macchina prendono il nome di membri od organi della macchina.

Da una definizione così generale emergono due aspetti fondamentali che caratterizzano la macchina.

Il primo è quello di considerare una macchina come un sistema di elementi materiali in moto relativo tra loro, al quale sono applicabili i principi generali della Meccanica; il secondo è quello del lavoro e quindi della potenza fornita da una macchina.

Ma un altro aspetto importante è da tener presente nei riguardi delle macchine: esse sono sistemi nei quali ha sede una trasformazione energetica.

A titolo di esempio si consideri un motore a c.i. (leggi: a combustione interna): in questa macchina si trasforma in energia meccanica, disponibile sull'albero motore, l'energia termica del combustibile (benzina, gasolio, ecc.) col quale la macchina è alimentata.

Nel caso di un motore elettrico si trasforma l'energia elettrica, colla quale si alimenta il motore, in energia meccanica disponibile sull'albero del motore elettrico.

Dal punto di vista di questo aspetto essenziale, che è la trasformazione

energetica che ha luogo nella macchina, le macchine stesse si distinguono in:

- a) Macchine motrici;
- b) Macchine generatrici;
- c) Macchine operatrici.

Macchine motrici sono quelle che trasformano energia delle forme più diverse in energia meccanica: tra queste ricordiamo i motori alternativi a c.i., le turbine (a vapore, a gas, idrauliche), i motori elettrici (a corrente alternata o a corrente continua).

Macchine generatrici sono quelle che trasformano l'energia meccanica in altre forme di energia. In queste macchine si compie la trasformazione, per certi aspetti, inversa di quella che si compie nelle macchine motrici, sicché ad una macchina motrice di un certo tipo corrisponde un tipo analogo di macchina generatrice: così, p. es., ad un motore a c.i. alternativo corrisponde un compressore alternativo; ad una turbina, un compressore dinamico; ad un motore elettrico a c.a. (leggi: a corrente alternata), un generatore elettrico a c.a. o alternatore; ad un motore elettrico a c.c. (leggi: a corrente continua), un generatore elettrico a c.c. o dinamo.

Macchine operatrici sono quelle che trasformano l'energia meccanica, che le muove, nel lavoro necessario a compiere operazioni utili alla produzione industriale nei diversi settori: macchine utensili per l'industria meccanica (torni, trapani, fresatrici, ecc.) macchine per le costruzioni civili (impastatrici o betoniere, ecc.). Ciascuna di queste macchine è in genere mossa da un motore elettrico, che costituisce una parte integrante della macchina stessa.

L'insieme delle parti fisse di una macchina prende il nome di incastellatura: essa ha il compito e di assicurare che le parti mobili della macchina si muovano nel modo richiesto e di collegare la macchina stessa alla struttura di sostegno.

Gli organi mobili di una macchina sono dotati di moti rotatorio, traslatorio, rotatorio e traslatorio insieme, tutti caratterizzati dall'essere moti periodici, in ciò condizionati dalla continuità di funzionamento della macchina.

Alcune di queste macchine, come i motori o i generatori elettrici, le turbine o i compressori dinamici, sono costituite da un unico elemento mobile, dotato di moto di pura rotazione, e da un'unica parte fissa: in questi casi la parte mobile viene detta rotore, la parte fissa statore.

Diremo meccanismi quei sistemi meccanici che realizzano la trasmissione del moto tra due membri di una macchina o tra due macchine e nei quali non ha sede una trasformazione energetica, ma un semplice trasferimento

di moto e di potenza meccanica.

Alcuni esempi di meccanismi sono riportati in fig.1.1-1.

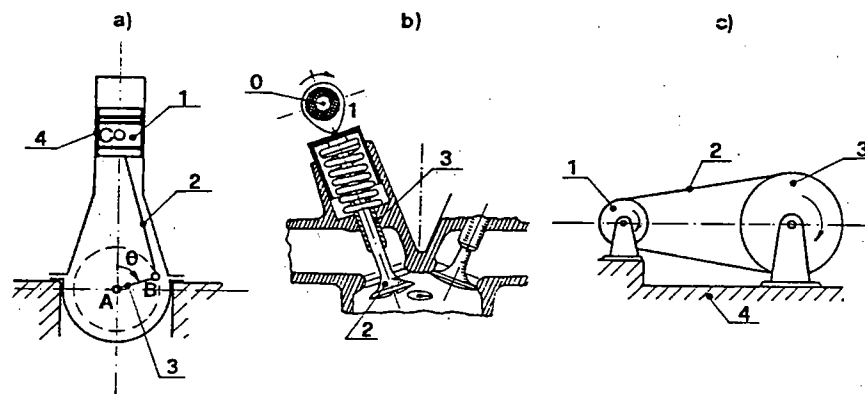


Fig.1.1-1

In fig.1.1-1,a) è riportato lo schema di un meccanismo di spinta rotativa. Questo meccanismo, che trasforma il moto alternativo del pistone nel moto rotatorio dell'albero, è costituito da uno stantuffo o pistone 1, che scorre in una guida cilindrica fissa 4 (cilindro), dalla biella 2, dalla manovella 3, solidale all'albero motore A della macchina.

In fig.1.1-1,b) è schematicamente rappresentato un meccanismo di comando valvola per motori a c.i. con asse a camme in testa: la camma 1 ruota intorno all'asse fisso di traccia O e sposta la valvola 2, vincendo la reazione della molla; la valvola scorre nella guida fissa 3.

In fig.1.1-1,c) è schematicamente rappresentata una trasmissione a cinghia, costituita dalla puleggia motrice 1, dalla cinghia di trasmissione 2, dalla puleggia mossa 3; gli assi delle due pulegge sono fissi e solidali alla struttura tratteggiata in figura.

Elemento comune ai meccanismi considerati è la presenza di un membro fisso, che prende il nome di ponte o telaio: nei meccanismi a) e b) il telaio è costituito dall'incastellatura del motore, che realizza il collegamento, nel caso a), tra cilindro e cuscinetto di banco e, nel caso b), tra la guida della valvola e i cuscinetti dell'albero a camme.

Nel caso della trasmissione a cinghia, il telaio è costituito dalla struttura di sostegno 4 del meccanismo.

In alcune macchine sono presenti più meccanismi: basti pensare ad un motore a c.i. alternativo per autotrazione, nel quale sono presenti tutti e

tre i meccanismi rappresentati in fig.1.1-1: è evidente che in questo caso il membro fisso di ciascun meccanismo fa parte dell'incastellatura della macchina.

Alla fine di questo breve paragrafo è opportuno richiamare l'attenzione sul fatto che una macchina motrice è sempre collegata ad una macchina utilizzatrice, generatrice od operatrice che sia: le due macchine così accoppiate costituiscono un gruppo.

L'accoppiamento di un motore a c. i. con un generatore elettrico (alternatore o dinamo) prende il nome di gruppo elettrogeno; l'accoppiamento turbina-alternatore viene indicato come gruppo turbo-alternatore; l'accoppiamento motore elettrico a corrente alternata-dinamo viene indicato come gruppo convertitore.

1.2 Coppie cinematiche

In tutti i meccanismi due membri contigui debbono essere collegati tra loro in modo che sia possibile il loro moto relativo, così come richiesto dal funzionamento corretto del meccanismo: i due elementi così collegati prendono il nome di coppia cinematica.

Il collegamento si realizza facendo coincidere tutta o una parte della superficie di un elemento con tutta o una parte della superficie dell'altro.

Le due suddette superfici costituiscono gli elementi cinematici della coppia.

Le coppie cinematiche si distinguono in:

- a) coppie cinematiche indipendenti;
- b) coppie cinematiche dipendenti;
- c) coppie cinematiche di forza.

La coppia cinematica si dice indipendente, se il moto relativo dei due membri, che la costituiscono, è un moto ad un solo grado di libertà.

A titolo di esempio si consideri il manovellismo di spinta rotativa di fig.1.1-1,a): il collegamento tra pistone e biella, realizzato dallo spinotto, supposto solidale al pistone (v. fig.1.2-1,a), consente solo una rotazione relativa di questi due membri intorno all'asse dello spinotto: la coppia cinematica biella-pistone è quindi una coppia indipendente.

Se si considera invece la coppia pistone-cilindro (v. fig.1.2-1,b), il moto relativo tra i due membri della coppia ha due gradi di libertà, essendo possibile oltre alla traslazione relativa lungo l'asse del cilindro, che è l'unico moto richiesto, anche una rotazione relativa intorno all'asse del cilindro:

la coppia pistone-cilindro è quindi una coppia cinematica dipendente. Il moto del pistone si riduce alla sola traslazione lungo l'asse del cilindro "in dipendenza" dell'accoppiamento pistone-biella.

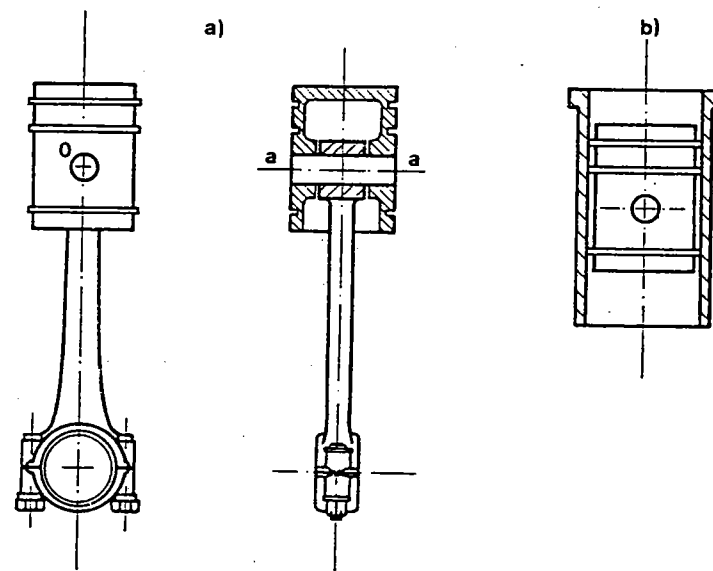


Fig.1.2-1

Si definiscono infine coppie cinematiche di forza quelle nelle quali il moto relativo tra i due membri della coppia è definito in virtù delle forze che assicurano il contatto tra i due membri: la coppia ruota-rotaiia è un esempio classico delle coppie cinematiche di forza.

Dal punto di vista degli elementi cinematici le coppie cinematiche si distinguono in elementari, o inferiori, e superiori.

Le coppie cinematiche elementari sono costituite da due elementi rigidi aventi superfici di contatto identiche e combacianti.

Le coppie cinematiche elementari sono tre (v. fig.1.2-2):

- 1) Coppia cinematica prismatica: il moto relativo tra i due elementi è traslatorio.
- 2) Coppia cinematica rotoidale: il moto relativo tra i due membri è rotatorio.

- 3) Coppia cinematica elicoidale: il moto relativo è elicoidale, cioè traslatorio lungo l'asse della coppia e rotatorio intorno allo stesso asse.

Tutte le altre possibili coppie cinematiche sono superiori.

Le coppie superiori si classificano in:

- Coppie combacianti non rigide, quando il loro contatto è assicurato dalla elasticità di uno degli elementi: come p.es. la coppia puleggia-cinghia in una trasmissione a cinghia.
- Coppie rigide e non combacianti, quando gli elementi della coppia sono rigidi e si toccano in corrispondenza di punti o linee: es. la coppia ruota-rotaia che, per quanto detto, risulta essere una coppia superiore di forza.

Gli elementi cinematici di una coppia superiore, cioè le superfici in corrispondenza delle quali i due elementi vengono a contatto, debbono essere coniugate.

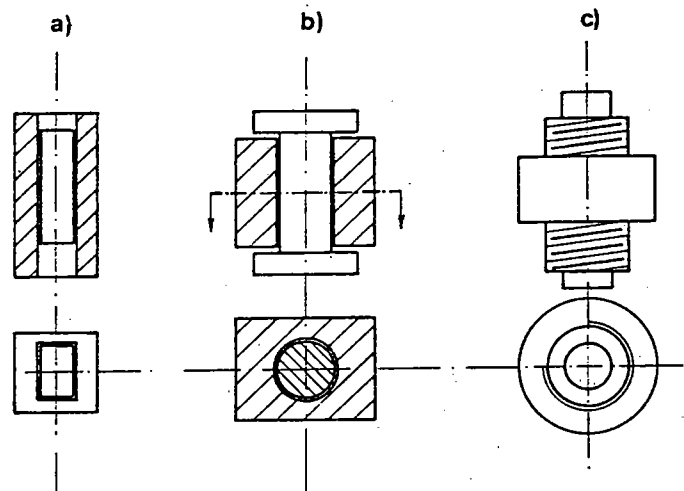


Fig.1.2-2

A titolo di esempio consideriamo una coppia costituita da due ruote dentate: gli elementi cinematici sono in questo caso costituiti dalle superfici dei fianchi dei denti a contatto; queste superfici, come vedremo a suo tempo, debbono essere coniugate.

1.3 Gradi di libertà di un meccanismo e di una macchina

Come per qualunque sistema meccanico, il numero di gradi di libertà di un meccanismo è definito come il numero delle coordinate indipendenti, necessarie ad individuare in ogni istante la posizione di tutti gli elementi (membri) che lo compongono. Le coordinate così definite prendono il nome di coordinate lagrangiane.

In generale i meccanismi e le macchine, nell'ipotesi che possano ritenersi rigidi gli elementi che li costituiscono e nulli i giochi tra gli elementi cinematici delle coppie in essi presenti, hanno un solo grado di libertà: è necessaria quindi una sola coordinata per individuare in ogni istante la posizione di tutti i membri che compongono il meccanismo o la macchina stessa.

A titolo di esempio si osservi che i meccanismi rappresentati in fig.1.1-1 sono meccanismi piani ad un solo grado di libertà: piani, perché tutti i punti del meccanismo descrivono, durante il moto, traiettorie contenute in piani paralleli tra loro; ad un grado di libertà, perché per individuare la posizione di tutti i membri mobili del meccanismo, basta conoscere una sola coordinata, p. es. l'angolo θ di cui è ruotato uno dei membri rispetto ad un riferimento fisso.

1.4 Le equazioni cardinali della Dinamica: principio di d'Alembert

Lo studio dinamico di un organo meccanico, di un meccanismo o di una macchina si può presentare in due modi essenzialmente diversi:

- È noto il moto del sistema in esame e si vogliono determinare le forze che agiscono sul sistema.
- Sono note le forze agenti sul sistema e si vuol determinare il moto del sistema.

In entrambi i casi occorre considerare innanzitutto le relazioni che legano le forze agenti sul sistema considerato al moto dello stesso: tali relazioni discendono dalle equazioni cardinali della dinamica.

Per un sistema di punti materiali $P_s(m_s)$ ($s = 1, 2, \dots, n$), avendo indicato con \bar{a} , l'accelerazione del punto generico P_s rispetto ad un riferimento inerziale $\Omega\xi\eta\zeta$ (v. fig.1.4-1), le equazioni cardinali della Dinamica si

scrivono, come è noto dalla Meccanica Razionale:

$$\begin{cases} \sum_1^n m_s \bar{a}_s = \bar{R}^{(e)} \\ \sum_1^n (P_s - O) \wedge m_s \bar{a}_s = \bar{M}_0^{(e)} \end{cases} \quad (1.4-1)$$

con:

$\bar{R}^{(e)}$ = risultante delle forze esterne al sistema,

$\bar{M}_0^{(e)}$ = risultante dei momenti delle forze esterne rispetto ad un generico polo O .

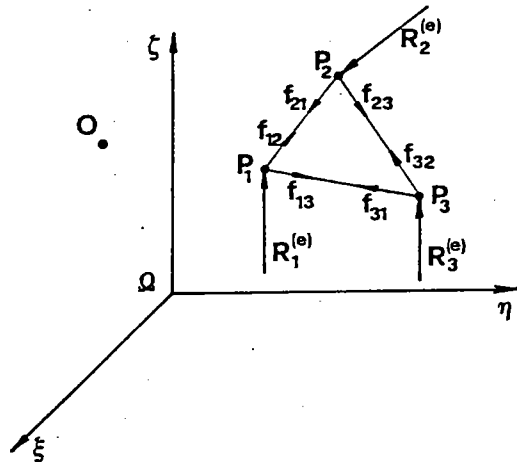


Fig.1.4-1

Esse si ottengono considerando che per un qualsiasi punto materiale P_s , considerato isolato dal resto del sistema, risulta:

$$\begin{cases} m_s \bar{a}_s = \bar{R}_s^{(e)} + \sum_1^n r \bar{f}_{sr} \\ (P_s - O) \wedge m_s \bar{a}_s = \bar{M}_{0,s}^{(e)} + \sum_1^n r (P_s - O) \wedge \bar{f}_{sr} \end{cases} \quad (1.4-2)$$

con $r \neq s$ e:

$\bar{R}_s^{(e)}$ = risultante delle forze esterne (attive e vincolari) agenti su P_s ;

\bar{f}_{sr} = forza interna che P_r esercita su $P_s = -\bar{f}_{rs}$;

\bar{a}_s = accelerazione di P_s .

Sommando le $2n$ relazioni vettoriali 1.4-2) e tenendo presente che:

$$\sum_1^n \sum_1^n r \bar{f}_{sr} = O \quad ; \quad \sum_1^n \sum_1^n r (P_s - O) \wedge \bar{f}_{sr} = O \quad (1.4-3)$$

si ottengono le (1.4-1), avendo indicato:

$$\sum_1^n \bar{R}_s^{(e)} = \bar{R}^{(e)} \quad ; \quad \sum_1^n \bar{M}_{0,s}^{(e)} = \bar{M}_0^{(e)} \quad (1.4-4)$$

È da tener presente che la prima delle (1.4-3) discende dal fatto che ad ogni forza \bar{f}_{sr} fa riscontro una $\bar{f}_{rs} = -\bar{f}_{sr}$; le forze interne quindi si elidono a due a due e il loro risultante è nullo.

La seconda delle (1.4-3) si giustifica tenendo presente che ogni coppia di forze interne ha braccio nullo ed è quindi nullo il risultante dei momenti delle forze interne, indipendentemente dal polo prescelto.

Le equazioni cardinali della dinamica oltre che nella prima forma si possono scrivere nella seconda forma:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^{(e)} \\ \frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0^{(e)} \end{cases} \quad (1.4-5)$$

con:

$$\bar{Q} = \text{quantità di moto} = \sum_1^n m_s \bar{v}_s;$$

$$\bar{K}_0 = \text{momento della quantità di moto} = \sum_1^n (P_s - O) \wedge m_s \bar{v}_s.$$

È da puntualizzare che le (1.4-5) sono valide quando il polo O dei momenti è fisso o coincide col baricentro del sistema (o si muove parallelamente al baricentro).

È opportuno ancora ricordare che in un riferimento inerziale il risultante delle forze esterne $\bar{R}^{(e)}$ comprende, oltre alle forze attive, di risultante $\bar{R}^{(a)}$, le reazioni vincolari, di risultante $\bar{R}^{(v)}$:

$$\bar{R}^{(e)} = \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(v)}$$

mentre in un riferimento non inerziale comprende, oltre a queste, anche le forze apparenti:

$$-m_s \bar{a}_{s,r} \quad ; \quad -m_s \bar{a}_{s,c} \quad (s = 1 \dots, n) \quad (1.4-6)$$

con:

- $\bar{a}_{s,r}$ = accelerazione di trascinamento

- $\bar{a}_{s,c}$ = accelerazione complementare o di Coriolis

e che $\bar{M}_o^{(e)}$ è il momento delle forze esterne, tra le quali, nell'ipotesi di riferimento non inerziale, figurano le forze apparenti (1.4-6).

Riprendendo in esame le (1.4-2) relative al punto materiale $P_s(m_s)$ e chiamando forza d'inerzia $\bar{f}_s^{(i)}$ e momento della forza d'inerzia $\bar{M}_{o,s}^{(i)}$ rispetto al polo O , la forza ed il momento:

$$\begin{aligned} \bar{f}_s^{(i)} &= -m_s \bar{a}_s \\ \bar{M}_{o,s}^{(i)} &= -(P_s - O) \wedge m_s \bar{a}_s \end{aligned}$$

le (1.4-2) si scrivono:

$$\begin{cases} \bar{f}_s^{(i)} + \bar{R}_s^{(e)} + \sum_1^n {}_r \bar{f}_{sr} = 0 \\ \bar{M}_{o,s}^{(i)} + \bar{M}_{o,s}^{(e)} + \sum_1^n {}_r (P_s - O) \wedge \bar{f}_{sr} = 0 \end{cases} \quad (1.4-7)$$

Indicando con:

$$\sum_1^n {}_s \bar{f}_s^{(i)} = \bar{R}^{(i)} \quad ; \quad \sum_1^n {}_s \bar{M}_{o,s}^{(i)} = \bar{M}_o^{(i)}$$

le equazioni cardinali della dinamica (1.4-1) si scrivono:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(i)} + \bar{R}^{(e)} = 0 \\ \bar{M}_o^{(i)} + \bar{M}_o^{(e)} = 0 \end{cases} \quad (1.4-8)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(i)} + \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(v)} = 0 \\ \bar{M}_o^{(i)} + \bar{M}_o^{(a)} + \bar{M}_o^{(v)} = 0 \end{cases} \quad (1.4-9)$$

Le (1.4-9) esprimono il principio di d'Alembert:

"In ogni istante lo stato di moto di un sistema meccanico può essere considerato come uno stato di equilibrio, se tra le forze, che lo determinano, compaiono anche le forze d'inerzia".

Questo stato di equilibrio viene detto di "equilibrio dinamico".

Il principio di d'Alembert non rappresenta nulla di concettualmente nuovo rispetto alle equazioni cardinali della dinamica, ma è importante dal punto di vista metodologico, in quanto riconduce qualunque problema dinamico ad un problema di equilibrio tra le forze esterne (attive e vincolari) e le forze d'inerzia.

Le equazioni cardinali della dinamica, ricavate per un sistema di punti materiali, sono generali: esse sono valide sia per sistemi di elementi meccanici e quindi per una macchina, sia per corpi rigidi, come spesso possono essere considerati gli organi di una macchina.

1.5 Il teorema del moto del baricentro

Si riprenda in esame l'espressione del risultante delle forze d'inerzia $\bar{R}^{(i)}$:

$$\bar{R}^{(i)} = \sum_1^n {}_s \bar{f}_s^{(i)} = - \sum_1^n {}_s m_s \bar{a}_s \quad (1.5-1)$$

e si osservi che può porsi:

$$\sum_1^n {}_s m_s \bar{a}_s = \frac{d^2}{dt^2} \sum_1^n {}_s m_s (P_s - \Omega) \quad (1.5-2)$$

Dalla definizione di baricentro G di un sistema risulta d'altra parte:

$$\sum_1^n {}_s (P_s - \Omega) m_s = m(G - \Omega) \quad (1.5-3)$$

avendo indicato con m la massa totale del sistema:

$$m = \sum_1^n {}_s m_s$$

Sostituendo la (1.5-3) nella (1.5-2), dalla (1.5-1) si ottiene:

$$\bar{R}^{(i)} = -m\ddot{G} = -m\ddot{a}_G$$

e quindi la prima delle equazioni cardinali può scriversi:

$$-m\bar{a}_G + \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(v)} = 0 \quad (1.5-4)$$

Questa relazione esprime il teorema del moto del baricentro:

“Il baricentro G di un sistema di punti materiali si muove come un punto di massa uguale alla massa m dell'intero sistema, sollecitato da una forza pari, istante per istante, al risultante delle forze esterne agenti sul sistema.”

L'importanza applicativa di questo teorema consiste nella possibilità di considerare al posto di un sistema di elementi materiali, comunque complesso (p. es. un autoveicolo), il punto materiale $G(m)$.

Se il sistema in esame viene considerato rigido, cioè costituito da parti rigide (telaio, motore, assali, ruote, ecc.), rigidamente collegate tra loro, il moto del baricentro G definisce il moto traslatorio dell'intero sistema, in quanto tutte le parti sono in posizione fissa e definita rispetto a G .

Occorre tuttavia osservare che, in una visione più aderente alla realtà, quelle stesse parti (telaio, motore, assali, ruote, ecc.), ancora supposte rigide, sono di fatto elasticamente interconnesse: a questo proposito si deve infatti considerare che nell'esempio considerato il telaio è collegato agli assali mediante le molle della sospensione, che il motore è collegato al telaio attraverso elementi elastici in gomma, che le ruote poggiano sul piano della strada tramite i pneumatici.

Il moto del baricentro G del sistema resta ancora definito dalla (1.5-4), ma ciò non è più sufficiente a definire il moto delle parti che lo compongono, perché le stesse possono essere in moto relativo le une rispetto alle altre e quindi rispetto al baricentro.

1.6 Classificazione delle forze.

Riprendendo in esame le (1.4-9), che come abbiamo visto esprimono il principio di d'Alembert:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(i)} + \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(v)} = 0 \\ \bar{M}_o^{(i)} + \bar{M}_o^{(a)} + \bar{M}_o^{(v)} = 0 \end{cases} \quad (1.4-9)$$

osserviamo che nella prima di queste equazioni compaiono, attraverso i rispettivi risultanti, le forze d'inerzia, derivanti dal moto degli elementi costituenti il sistema, le forze attive e le reazioni vincolari. Non compaiono le forze interne, come abbiamo già visto.

Appare quindi evidente che, una volta definito il sistema meccanico in esame, è necessario innanzi tutto individuare le forze che agiscono sul sistema e quindi distinguere tra queste le forze d'inerzia, le forze attive, le reazioni vincolari, le forze interne: queste ultime per l'importante ragione che non debbono comparire nelle equazioni del moto dell'intero sistema.

Dovendo a questo punto fare un esempio, è opportuno riferirci ad un gruppo di macchine, che costituisce il sistema meccanico il più complesso tra quelli considerati (coppie, meccanismi, macchine, gruppi).

Questo esempio ci offre l'opportunità di considerare subsistemi via via più piccoli, compresi nel gruppo considerato, per i quali alcune forze, interne al sistema di partenza, diventano esterne.

Consideriamo perciò un gruppo elettrogeno la cui macchina motrice sia un motore a c.i. alternativo monocilindrico e la macchina utilizzatrice un generatore a c.c.

Supponiamo ancora che le due macchine siano rigidamente collegate ad un basamento (v. fig.1.6-1) e che sia il basamento che le incastellature delle due macchine possano considerarsi rigide.

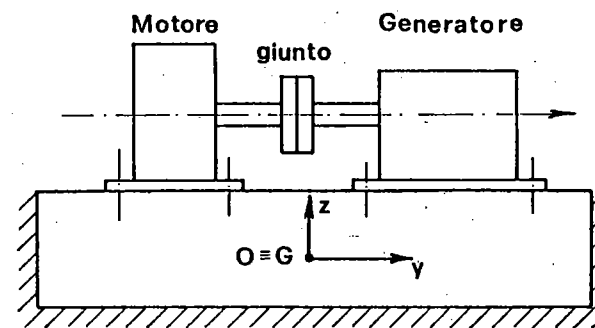


Fig.1.6-1

Nella progettazione di un basamento del tipo considerato, occorre conoscere, oltre al peso delle macchine, le sollecitazioni che al basamento derivano dal funzionamento del gruppo. Tale conoscenza è necessaria per assicurarsi non tanto che il basamento sia in grado di sopportare, senza rompersi, queste sollecitazioni, quanto che il basamento stesso, sotto l'azione di queste sollecitazioni, di natura certamente periodica, non vibri in maniera tale da compromettere il normale funzionamento del gruppo.

Le equazioni cardinali della dinamica consentono di determinare nella maniera più semplice la sollecitazione che il gruppo comunica al basamento.

Indicando con P_1 e P_2 il peso delle due macchine e ritenendo che nessun'altra forza attiva agisca sul gruppo, le equazioni cardinali della dinamica (1.4-9) per il caso in esame si scrivono:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(i)} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{R}^{(v)} = 0 \\ \bar{M}_o^{(i)} + \bar{M}_o^{(a)} + \bar{M}_o^{(v)} = 0 \end{cases}$$

nelle quali, come polo O dei momenti, è stato scelto il baricentro G del sistema costituito dalle due macchine e dal basamento.

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(v)} = -\bar{P}_1 - \bar{P}_2 - \bar{R}^{(i)} \\ \bar{M}_o^{(v)} = -\bar{M}_o^{(a)} - \bar{M}_o^{(i)} \end{cases} \quad (1.6-1)$$

Si deduce così immediatamente che le azioni che il gruppo esercita sul basamento (uguali e contrarie alle reazioni vincolari del basamento) sono, oltre alla forza peso $\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$ del gruppo, ed al momento $\bar{M}_o^{(a)}$ di \bar{P}_1 e \bar{P}_2 , le forze d'inerzia ed i momenti delle forze d'inerzia, dovuti al moto degli organi mobili delle due macchine.

Nel seguito vedremo come si determinano queste forze e questi momenti, ma è importante aver riconosciuto sin da ora la natura della sollecitazione esterna che agisce sul basamento.

Supponiamo adesso che si vogliano determinare separatamente le sollecitazioni che ciascuna delle due macchine del gruppo considerato comunica al basamento.

Volendo determinare per prima la sollecitazione derivante dal motore (v. fig.1.6-2), sarà necessario immaginare di separare le due macchine in corrispondenza del giunto e di applicare in corrispondenza della sezione di separazione, appartenente al motore, una sollecitazione uguale a quella esercitata, prima della separazione, dal generatore (principio del sezionamento).

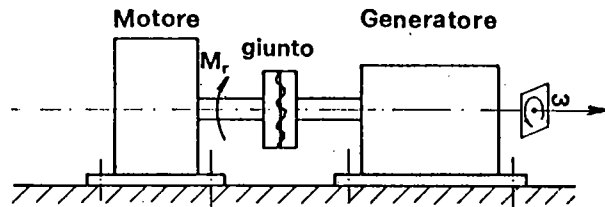


Fig.1.6-2

In condizioni di regime la sollecitazione suddetta è costituita da una coppia resistente di momento M_r (v. par.1.14), momento che ha verso opposto a quello della rotazione del gruppo (v. fig.1.6-2): è evidente che questa sollecitazione, interna al gruppo, è ora esterna al subsistema motore.

Nelle ipotesi fatte, le equazioni cardinali della dinamica (1.4-9) per il subsistema in esame si scrivono:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(i)} + \bar{P}_1 + \bar{R}^{(v)} = 0 \\ \bar{M}_o^{(i)} + \bar{M}_o^{(a)} + \bar{M}_o^{(v)} = 0 \end{cases} \quad (1.6-2)$$

con:

$$\bar{M}_o^{(a)} = \bar{M}_{P_1} + \bar{M}_r$$

Dalle (1.6-2) si deduce:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(v)} = -\bar{P}_1 - \bar{R}^{(i)} \\ \bar{M}_o^{(v)} = -\bar{M}_{P_1} - \bar{M}_r - \bar{M}_o^{(i)} \end{cases} \quad (1.6-3)$$

Le (1.6-3) stanno ad indicare che le azioni che il motore esercita sul basamento sono, oltre alla forza peso \bar{P}_1 , ed al momento di \bar{P}_1 rispetto a G , le forze d'inerzia ed i momenti delle forze d'inerzia, derivanti dal moto degli organi mobili del motore, ed il momento resistente M_r del generatore.

In maniera analoga si possono determinare le azioni che il solo generatore esercita sul basamento: in questo caso occorre considerare applicata nella sezione di separazione, facente ora parte del subsistema generatore, una coppia di momento pari al momento motore: essendo $\bar{M}_m = -\bar{M}_r$, questa sollecitazione ha lo stesso verso della rotazione del sistema.

Le equazioni cardinali (1.4-9) per il sistema generatore si scrivono:

$$\begin{cases} \bar{R}^{(i)} + \bar{P}_2 + \bar{R}^{(v)} = 0 \\ \bar{M}_o^{(i)} + \bar{M}_{P_2} + \bar{M}_m + \bar{M}_o^{(v)} = 0 \end{cases} \quad (1.6-4)$$

Queste relazioni stanno ora ad indicare che le azioni che il generatore esercita sul basamento sono, oltre la forza peso \bar{P}_2 ed il momento di \bar{P}_2 rispetto a G , le forze d'inerzia ed i momenti delle forze d'inerzia degli organi mobili della macchina elettrica ed una coppia di momento uguale a M_m .

È evidente che, se si sommano le sollecitazioni derivanti separatamente dalle due macchine, si ritrovano quelle già determinate in precedenza.

Quanto è stato detto consente di fare una considerazione: se le due macchine sono disposte su due basamenti indipendenti, i due subsistemi, il primo costituito dal motore e dal rispettivo basamento ed il secondo dal

generatore solidale al relativo basamento, saranno soggetti a sollecitazioni diverse e vibreranno quindi in maniera diversa.

Si può concludere quindi che se si dispongono le due macchine su basamenti diversi, esse saranno animate da un moto relativo periodico, che provoca indesiderate sollecitazioni periodiche sia degli organi mobili che delle incastellature delle due macchine.

Da quanto detto deriva l'opportunità di disporre le due macchine di un gruppo su un unico basamento; nei casi in cui ciò non sia possibile, è necessario collegare le due macchine con un doppio giunto cardanico, che consente di ridurre sensibilmente le sollecitazioni periodiche suddette.

Continuando l'esame del gruppo di fig.1.6-1, passiamo adesso a determinare le forze che agiscono sul pistone del motore a c.i. monocilindrico schematicamente rappresentato in fig.1.6-3.

Supponendo che il motore sia a quattro tempi, consideriamo il pistone in un punto della corsa di compressione: il pistone, mosso dalla biella, comprime il fluido contenuto nel cilindro.

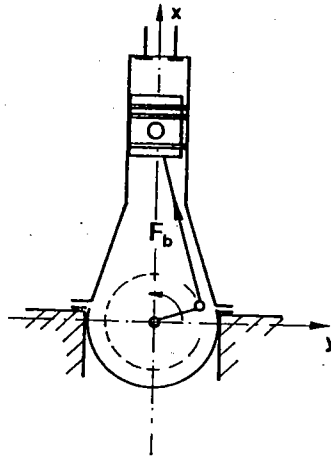


Fig.1.6-3

Per la determinazione delle forze che agiscono sul pistone è necessario considerare "il diagramma del corpo libero", che si ottiene isolando il pistone da tutti gli elementi che con esso interagiscono e sostituendo a ciascuno di questi le azioni che lo stesso elemento esercita sul pistone.

Per quanto si riferisce all'elemento fluido che avvolge il pistone, indichiamo con p_1 e p_2 le pressioni dei gas presenti rispettivamente nella parte

superiore ed inferiore del cilindro. A questo proposito osserviamo inoltre che qualunque sia l'andamento della pressione lungo una generatrice del pistone, si può tuttavia ritenere accettabile l'approssimazione che lo stesso andamento si ripeta su ogni generatrice del pistone (v. fig.1.6-4): si può così concludere che la risultante delle forze di pressione, agenti sulla superficie laterale del pistone, è nulla.

Si può in definitiva ritenere che le azioni che il fluido esercita sul pistone sono una forza $p_1 S$, agente sulla testa del pistone, ed una forza $p_2 S$, agente sul fondo dello stesso, con $S = \pi d^2/4$ (v. fig.1.6-4).

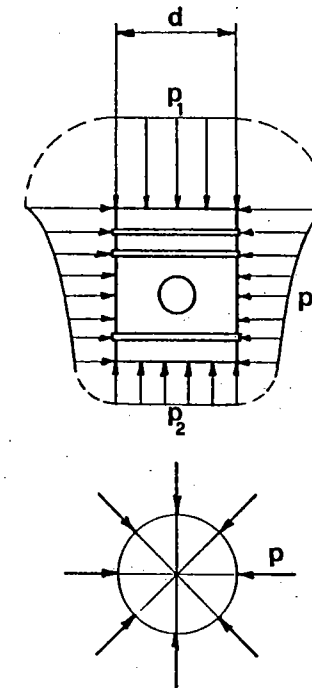


Fig.1.6-4

Per quanto riguarda le pareti del cilindro occorre osservare che esse costituiscono un vincolo al moto del pistone ed è quindi logico pensare che, in corrispondenza della zona di contatto, esse esercitino sul pistone stesso una reazione \bar{N} normale a tale superficie e quindi normale all'asse del cilindro ed una reazione d'attrito $f\bar{N}$, diretta secondo l'asse del cilindro e di verso opposto a quello del moto del pistone (v. fig.1.6-5).

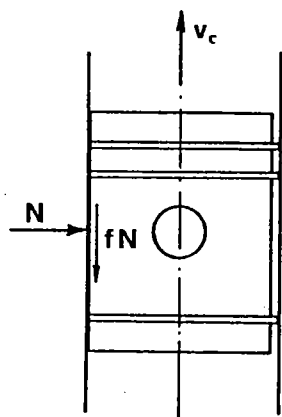


Fig. 1.6-5

Per quanto riguarda la biella occorre osservare che essa esercita sul pistone tre forze (v. fig. 1.6-6):

- a) una forza \bar{F}_b , diretta secondo l'asse della biella;
- b) una forza d'inerzia $\bar{F}_{b,i}$, dovuta al moto della biella: questa forza d'inerzia può essere ritenuta con sufficiente approssimazione quella di una massa m'_1 concentrata nella mezzeria dell'asse dello spinotto e che si muove con la stessa legge del pistone (v. Cap. 13, par. 7): con questa approssimazione la forza d'inerzia in questione è diretta secondo l'asse del cilindro e vale $-m'_1 \bar{w}_c$, se con \bar{w}_c si indica l'accelerazione del pistone;
- c) una forza d'attrito $\bar{F}_{b,f}$, dovuta al moto relativo della biella rispetto allo spinotto.

In conclusione sul pistone agiscono le seguenti forze (v. fig. 1.6-7):

- 1°) La \bar{F}_1 , dovuta alla pressione p_1 del fluido presente nella parte superiore del cilindro.
- 2°) La \bar{F}_2 , dovuta alla pressione p_2 del fluido presente nella parte inferiore del cilindro ($F_1 > F_2$).
- 3°) La \bar{F}_b esercitata dalla biella.
- 4°) La forza d'attrito $\bar{F}_{b,f}$, dovuta al moto relativo della biella rispetto al pistone.

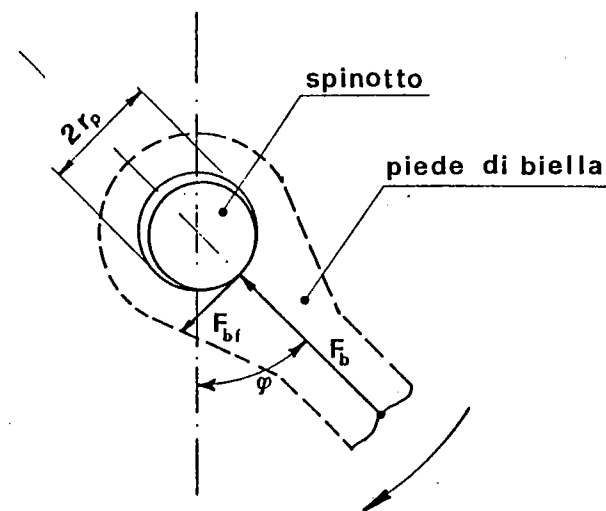


Fig. 1.6-6

- 5°) La reazione normale \bar{N} , esercitata dalle pareti del cilindro.
- 6°) La forza d'attrito $f\bar{N}$ dovuta al moto relativo pistone-cilindro.
- 7°) La forza peso \bar{P} del pistone, in genere trascurabile rispetto alle altre forze agenti.
- 8°) La forza d'inerzia $\bar{F}_i = -m\bar{w}_c$, con: m = massa del pistone e \bar{w}_c = accelerazione del moto del pistone.
- 9°) La forza d'inerzia $\bar{F}_{b,i} = -m'_1 \bar{w}_c$ dovuta al moto della biella.

È da osservare che le prime sette forze citate, rappresentate in fig. 1.6-7, sono tutte forze esterne al pistone: alcune sono forze attive (\bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_b , $\bar{F}_{b,f}$, \bar{P}), altre sono reazioni vincolari (\bar{N} , $f\bar{N}$).

Le prime sei di queste forze, mentre sono esterne al pistone, risultano essere interne al sistema motore: a ciascuna di esse corrisponde infatti una reazione uguale e contraria, agente su un elemento del motore (il fluido, le pareti del cilindro, la biella) che interagisce col pistone.

La forza peso \bar{P} e le forze d'inerzia \bar{F}_i e $\bar{F}_{b,i}$ risultano essere le sole forze, relative al pistone, esterne al motore.

Questi risultati sono da considerarsi generali nel senso che tra le forze esterne ad un sistema materiale (e quindi ad una macchina) sono in ogni caso presenti, oltre alle forze peso, le forze d'inerzia, mentre risultano interne le

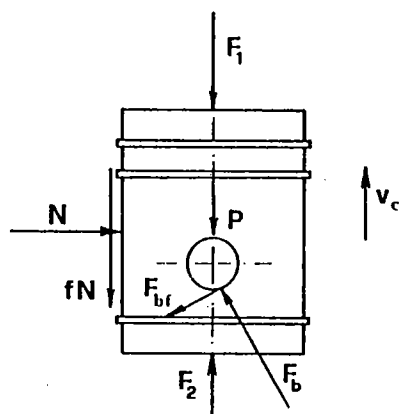


Fig.1.6-7

forze di pressione e le reazioni dei vincoli interni alla macchina.

1.7 Esempi di applicazione del principio di d'Alembert

Come è stato già ricordato, lo studio dinamico di un sistema meccanico può presentarsi in due modi sostanzialmente diversi a seconda che si conoscano le forze che agiscono sul sistema e se ne voglia determinare il moto, ovvero che sia assegnato il moto e si vogliono conoscere le forze che agiscono sul sistema.

In entrambi i casi le equazioni cardinali della dinamica e quindi il principio di d'Alembert costituiscono il necessario legame tra i due termini del problema, cioè le forze ed il moto: le equazioni che da esse derivano consentono quindi di determinare il moto di un sistema, se sono assegnate le forze, ovvero di determinare le forze che su di esso agiscono, se è noto il moto che anima il sistema stesso.

Nei problemi del primo tipo, le equazioni suddette prendono il nome di equazioni del moto e risultano essere equazioni differenziali o sistemi di equazioni differenziali, non sempre di facile integrazione.

Nel secondo caso il problema dinamico si presenta in genere di più facile soluzione e, per il principio di d'Alembert, va visto come un problema di equilibrio dinamico tra le forze esterne note e le forze d'inerzia deducibili dal moto assegnato.

A titolo di esempio di problema del primo tipo si consideri il sistema rappresentato in fig.1.7-1,a), costituito da un corpo rigido di massa m , da

uno smorzatore σ e da una molla K . Si assuma come riferimento fisso la coppia di assi xy , segnati in figura, con l'origine O coincidente col baricentro G della massa m , quando il sistema è in quiete.

La massa m è vincolata a muoversi sul piano liscio π lungo l'asse x : il sistema ha quindi un solo grado di libertà e la sua coordinata lagrangiana risulta essere la x .

Si supponga che le reazioni \bar{R}_K ed \bar{R}_σ , che la molla e lo smorzatore esercitano su m , siano dirette lungo x e siano date rispettivamente (v. Cap.5) da:

$$R_K = -Kx$$

$$R_\sigma = -\sigma\dot{x}$$

con K e σ costanti.

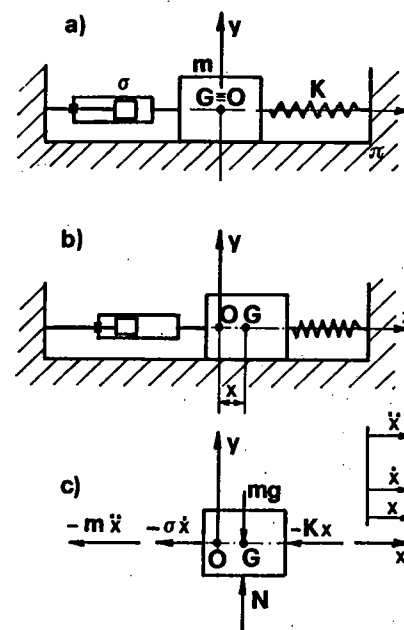


Fig.1.7-1

Se la massa m viene spostata dalla posizione di riposo e quindi lasciata libera, essa ritorna verso la posizione di riposo, iniziando un moto $x(t)$, il cui andamento dipende dai valori di m , K e σ .

La legge del moto $x(t)$ viene determinata integrando l'equazione del moto della massa m : questa equazione si scrive applicando il principio di d'Alembert al sistema in esame.

Considerato il sistema in moto in una posizione generica x rispetto al riferimento prescelto (v. fig.1.7-1,b), in fig.1.7-1,c è stato riportato il diagramma del corpo libero per il sistema in esame, è stata cioè rappresentata la massa m , isolata dal resto del sistema, e su di essa sono state riportate le azioni che il resto del sistema esercita sulla massa m nella posizione considerata. Tali azioni sono:

- la reazione N del vincolo,
- la reazione $-Kx$ della molla,
- la reazione $-\sigma\dot{x}$ dello smorzatore.

Per il principio di d'Alembert dovrà essere:

$$\bar{R}^{(i)} + \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(v)} = 0$$

e quindi:

$$\bar{R}^{(i)} + \bar{R}_\sigma + \bar{R}_K + \bar{P} + \bar{R}^{(v)} = 0 \quad (1.7-1)$$

"Proiettando" questa relazione vettoriale sugli assi di riferimento prescelti si ottengono le due relazioni scalari:

$$\begin{aligned} \text{asse } x : -m\ddot{x} - \sigma\dot{x} - Kx &= 0 \\ \text{asse } y : R^{(v)} &= N = mg \end{aligned} \quad (1.7-2)$$

La prima di queste relazioni è l'equazione del moto della massa m , la seconda esprime soltanto che la reazione del vincolo N è uguale e contraria al peso mg del corpo di massa m .

L'equazione del moto si scrive di solito:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + Kx = 0 \quad (1.7-3)$$

e risulta essere quindi un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, omogenea.

L'integrazione di questa equazione differenziale verrà eseguita nel Cap.5.

A titolo di esempio di problemi dinamici del secondo tipo si riprenda in esame il caso del pistone del motore a c.i., già considerato nel par.6.

Il pistone fa parte di un meccanismo ad un grado di libertà (manovellismo di spinta rotativa) e da ciò deriva che, assegnato il moto della manovella,

risultano determinate le grandezze cinematiche (spostamento, velocità, accelerazione) di tutti gli organi che lo compongono (v. Cap.13).

In particolare, nell'ipotesi che la manovella ruoti con un'assegnata velocità angolare costante, resta definita l'accelerazione \bar{w}_c del pistone e sono quindi calcolabili le forze d'inerzia \bar{F}_i ed $\bar{F}_{b,i}$, già definite nel par.6.

Trascurando per semplicità la forza d'attrito $\bar{F}_{b,f}$, dal diagramma del corpo libero riportato in fig.1.6-7, dovendo essere per il principio di d'Alembert:

$$\bar{R}^{(i)} + \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(v)} = 0$$

risulta:

$$\bar{F}_i + \bar{F}_{b,i} + \bar{P} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_b + \bar{N} + f\bar{N} = 0 \quad (1.7-4)$$

Avendo assunto come assi di riferimento l'asse x coincidente con l'asse del cilindro e l'asse y normale a questo, proiettando la (1.7-4) sui due assi prescelti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{asse } x : F_i + F_{b,i} - P - F_1 + F_2 + F_b \cos \phi - fN &= 0 \\ \text{asse } y : N - F_b \sin \phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.7-5)$$

Assegnati i valori di p_1 e p_2 , risultano note le forze F_1 e F_2 :

$$\begin{aligned} F_1 &= p_1 S \\ F_2 &= p_2 S \end{aligned} \quad (1.7-6)$$

Avendo assegnato ω , sono calcolabili i valori di w_c (v. Cap.13) e quindi di F_i ed $F_{b,i}$:

$$\begin{aligned} F_i &= -mw_c \\ F_{b,i} &= -m'_1 w_c \end{aligned} \quad (1.7-7)$$

Nota il peso P del pistone (in genere trascurabile rispetto alle altre forze presenti nella (1.7-4), le relazioni (1.7-5) consentono il calcolo dei due valori incogniti di F_b ed N .

Si ottiene così:

$$F_b(\cos \phi - f \sin \phi) = F_1 - F_2 + P - F_i - F_{b,i}$$

e quindi:

$$\begin{cases} F_b = \frac{1}{\cos \phi - f \sin \phi} [(p_1 - p_2)S + P + (m + m'_1)w_c] \\ N = F_b \sin \phi \end{cases} \quad (1.7-8)$$

1.8 Lavoro di una forza

Sia P un punto materiale che si sposta lungo una linea AB ed F una delle forze agenti su di esso (v. fig.1.8-1).

Si definisce, come è noto, lavoro elementare dL , che la forza F compie nello spostamento infinitesimo dP , il prodotto scalare:

$$dL = \vec{F} \times dP = F|dP| \cos \alpha$$

avendo indicato con $\alpha (0 \leq \alpha \leq \pi)$ l'angolo formato dai due vettori \vec{F} e dP .

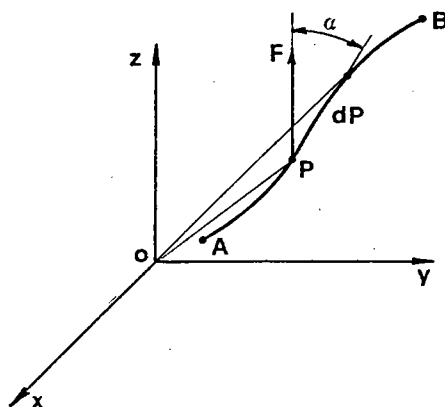


Fig.1.8-1

Quindi il lavoro elementare dL è uguale al prodotto del modulo della forza per la componente dello spostamento nella direzione orientata della forza, oppure al prodotto del modulo dello spostamento per la componente della forza nella direzione orientata dello spostamento.

Il lavoro elementare dL è positivo se α è acuto, negativo se α è ottuso; nel primo caso dL si dice lavoro motore ed \vec{F} forza motrice, nel secondo caso dL si dice lavoro resistente ed \vec{F} forza resistente.

Tenendo presente che se α è acuto, la componente della \vec{F} , nella direzione di dP , ha lo stesso verso di dP , diremo motrici le forze quando la loro componente lungo dP ha il verso del moto del punto di applicazione P ; resistenti quando la loro componente lungo dP ha verso opposto a dP .

Le forze resistenti si distinguono in forze resistenti utili e forze resistenti passive, ed il lavoro, da esse compiuto, si dice lavoro resistente utile e passivo.

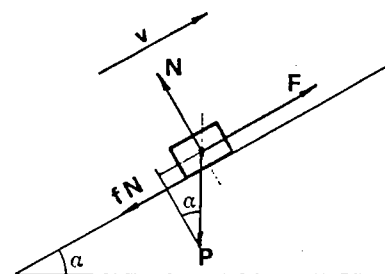


Fig.1.8-2

Nel caso di un grave di peso \vec{P} , che sale su un piano inclinato sotto l'azione di una forza \vec{F} diretta parallelamente al piano (v. fig.1.8-2), la forza \vec{F} è motrice, la forza \vec{P} è resistente utile, la $f\vec{N}$ è una forza resistente passiva.

Anche una forza d'inerzia può essere considerata motrice o resistente: motrice se il corpo decelera, resistente se il corpo accelera.

In generale il lavoro L :

$$L = \int_A^B dL$$

dipende dal percorso AB .

Se la forza è posizionale, cioè è funzione solo del suo punto di applicazione, e deriva da un potenziale U uniforme, il lavoro L dipende soltanto dagli estremi A e B del percorso.

In questo caso la forza dicesi conservativa ed il lavoro L è dato da:

$$L_{AB} = \int_A^B dL = U_B - U_A$$

Lungo una qualsiasi curva chiusa ABA risulta in particolare:

$$L_{ABA} = 0$$

Un esempio importante di forza conservativa è dato dalla reazione di un elemento elastico qualsiasi.

Si supponga che l'elemento elastico sia costituito da una molla ad elica cilindrica di acciaio e si indichi con L_0 la sua lunghezza libera (v. fig.1.8-3): se si ritiene che ad un allungamento o ad un accorciamento assiale x corrisponda una reazione R_x , proporzionale ad x e di verso opposto ad x :

$$R_x = -Kx$$

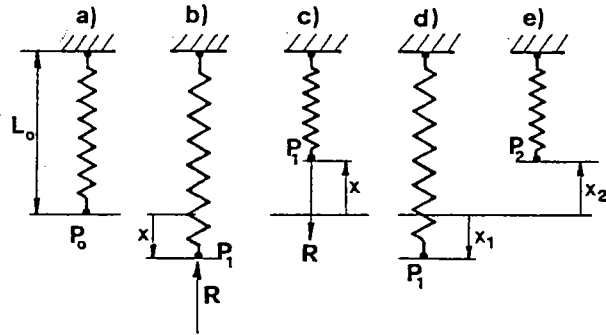


Fig.1.8-3

l'elemento stesso si dirà lineare. La costante di proporzionalità K viene in genere indicata come rigidità o rigidezza dell'elemento elastico.

Nelle ipotesi fatte si può ritenere che:

$$R_x = -Kx = \frac{dU}{dx}$$

e quindi il potenziale U risulta definito dalla relazione:

$$U = -\int Kx dx = -\frac{1}{2}Kx^2 + \text{cost}$$

Si osservi che U è indipendente dal segno e quindi dal verso dello spostamento x .

Il lavoro $L_{1,2}$ compiuto dalla reazione R_x nel passare da $P_1(+x_1)$ a $P_2(-x_2)$, è dato da:

$$L_{1,2} = \int_1^2 dU = -\int_{x_1}^{-x_2} Kx dx = -\frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2)$$

ed il lavoro $L_{2,1}$ tra $P_2(-x_2)$ e $P_1(+x_1)$ da:

$$L_{2,1} = \int_2^1 dU = -\int_{-x_2}^{x_1} Kx dx = -\frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

Risulta quindi:

$$L_{1,2,1} = L_{1,2} + L_{2,1} = 0$$

Se si considera lo scalare $V = -U$, si può scrivere:

$$L_{1,2} = U_2 - U_1 = V_1 - V_2$$

e quindi:

$$L_{1,2} - (V_1 - V_2) = 0$$

Questa relazione sta ad indicare che il lavoro della forza posizionale Kx è fatto a spese di un'energia V , dipendente da P , che prende il nome di energia potenziale.

Si può dire in definitiva che nel caso di un elemento elastico lineare per effetto di una deformazione $\pm x$, si accumula un'energia potenziale $V = (1/2)Kx^2$.

1.9 Energia cinetica di un sistema meccanico

Ricordiamo che dato un corpo rigido S , detto G il suo baricentro e $Gxyz$ una terna solidale al corpo stesso (v. fig.1.9-1), l'energia cinetica E di S rispetto ad un riferimento fisso $\Omega\xi\eta\zeta$ è data da:

$$E = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\{\omega\}^T [I]\{\omega\} \quad (1.9-1)$$

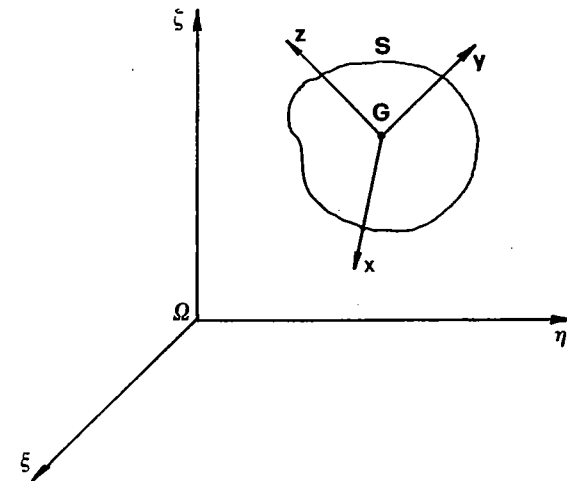


Fig.1.9-1

con:

 m = massa del corpo,

$$[I] = \text{matrice d'inerzia di } S = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix},$$

 v_G = velocità del baricentro,

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

essendo $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ le componenti della velocità di rotazione del corpo.È da notare che la matrice $[I]$ è simmetrica, essendo $I_{kl} = I_{lk}$.Se la terna $Gxyz$ è centrale d'inerzia, l'espressione di E si semplifica, essendo $I_{kl} = 0$ (con $l \neq k$) e quindi:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

L'energia cinetica di un sistema meccanico, gruppo, macchina, meccanismo, intesa come somma delle energie cinetiche dei suoi membri mobili, supposti rigidi, è data quindi dalla somma di tanti termini del tipo (1.9-1), quanti sono i suoi membri mobili.

In particolare se l'elemento della macchina si muove di moto traslatorio (si consideri, ad es., il pistone di una macchina alternativa), la sua energia cinetica E è data da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

con:

 m = massa dell'elemento, v = velocità dello stesso.

Se l'elemento è dotato di moto di pura rotazione intorno ad un asse fisso, quale è il caso del rotore di una macchina elettrica, di una turbina, dell'albero a gomiti di una macchina alternativa, l'energia cinetica è data da:

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2$$

con:

 I = momento d'inerzia di massa dell'elemento rispetto all'asse di rotazione; ω = velocità angolare.

Nel caso in cui il moto dell'organo in esame è un moto piano, quale è il caso di una biella di una macchina alternativa, risulta:

$$E = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$

con:

 I = momento d'inerzia di massa rispetto all'asse baricentrico normale al piano del moto, $\dot{\phi}$ = velocità angolare della biella.Tenendo presente che, considerando un gruppo di macchine, una macchina, un meccanismo, come un sistema di elementi rigidi, il sistema stesso risulta avere in genere un solo grado di libertà, e che quindi le velocità dei vari elementi mobili sono esprimibili in funzione d' un'unica coordinata (p.es. l'angolo di rotazione θ dell'albero motore della macchina), l'energia cinetica risulta funzione di questa unica coordinata.

1.10 Il teorema della energia cinetica

Consideriamo un sistema di punti materiali $P_s(m_s)$ e sia $Oxyz$ una terna di riferimento inerziale.Per il generico punto $P_s(m_s)$ si può scrivere per il principio di d'Alembert:

$$\bar{R}_s^{(e)} + \sum_1^n {}_r\bar{f}_{s,r} - m_s\bar{a}_s = 0 \quad (1.10-1)$$

con $r \neq s$ e: $\bar{R}_s^{(e)}$ = risultante delle forze esterne (attive e vincolari) in P_s ; ${}_r\bar{f}_{s,r}$ = forza interna che P_r esercita su $P_s = -{}_s\bar{f}_{r,s}$; \bar{a}_s = accelerazione di P_s ; $-m_s\bar{a}_s$ = forza d'inerzia di m_s .Se il sistema è in moto, detto dP_s lo spostamento elementare di P_s , si può scrivere:

$$\left(\bar{R}_s^{(e)} + \sum_1^n {}_r\bar{f}_{s,r} - m_s\bar{a}_s \right) \times dP_s = 0 \quad (1.10-2)$$