

Algebra di Boole

Concetto di “algebra”

- Definizione: si dice che un insieme K è munito della struttura di algebra se in esso sono ovunque definite due leggi binarie di composizione interna, cioè due funzioni che facciano corrispondere ad una qualsiasi coppia di elementi di K ancora un elemento di K
- K si dice anche *sostegno* dell'algebra
- Le due funzioni sono *somma* e *prodotto* $(+, \cdot)$
- L'algebra è individuata dalla tripla $(K, +, \cdot)$

Reticolo

- Un'algebra $(K, +, \cdot)$ si dice *reticolo* se per ogni elemento di K valgono le seguenti proprietà:
 - Commutativa: $a + b = b + a$
 $a \cdot b = b \cdot a$
 - Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
 - Idempotenza: $a + a = a$
 $a \cdot a = a$
 - Assorbimento: $a + (a \cdot b) = a$
 $a \cdot (a + b) = a$
- Un reticolo si dice *distributivo* se vale anche la proprietà:
 - Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Reticolo

- L'insieme di sostegno di un reticolo è *ordinato*, cioè esiste una *relazione d'ordine*, che gode delle seguenti proprietà:

– Riflessiva: $x \leq x$

– Antisimmetrica $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

– Transitiva $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

- Proprietà: $x + y = y \Leftrightarrow x \leq y$
 $x \cdot y = x \Leftrightarrow x \leq y$

Reticolo distributivo

- Un reticolo distributivo si dice *dotato di minimo e massimo* assoluti se in K vi sono due elementi, detti rispettivamente 0 e 1 , che, comunque scelto un elemento di K , verificano la proprietà:
 - Del minimo e massimo: $a \cdot 0 = 0 ; a + 1 = 1$
- Un reticolo distributivo si dice *complementato* se per ogni elemento di K esiste ed è unico un elemento per il quale vale la proprietà:
 - Del complemento: $a \cdot \bar{a} = 0 ; a + \bar{a} = 1$

Algebra di Boole

- Definizione: un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, si dice *algebra di Boole*
 - $(K, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$
- Legge di dualità: da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per dualità, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 e 1 il rispettivo duale
 - Gli operatori $+$ e \cdot sono l'uno il duale dell'altro
 - Gli elementi 0 e 1 sono l'uno il duale dell'altro

Algebra booleana

- Deve il suo nome a Boole che ne formalizzò le regole
- L'algebra booleana opera su variabili ("logiche" o "booleane") che possono assumere solamente due valori
1/0, vero/falso, on/off, chiuso/aperto
- Il valore 1 è solitamente associato alla condizione logica *vero (true, on, chiuso)*, mentre lo 0 è associato alla condizione logica *falso (false, off, aperto)*

Algebra booleana

- E' adatta per rappresentare "*eventi binari*", cioè condizioni che possono assumere solo due valori
 - Esempio
 - Una lampadina può essere accesa (a questa condizione si associa il valore *1* o *vero*) oppure spenta (valore *0* o *falso*).
- Le funzioni che operano sulle variabili booleane sono dette funzioni booleane e possono produrre anch'esse solo i valori 0 e 1

Algebra booleana

- Una funzione booleana F , funzione di variabili booleane, v_1, v_2, \dots, v_n si indica:

$$F(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- Può essere definita in vari modi:
 - uno di questi consiste nello specificare i valori di F per *tutte le possibili combinazioni delle variabili* da cui essa dipende. Tale elenco di combinazioni viene detto **tabella della verità**

Algebra booleana

- Esempio

$F(v_1, v_2, v_3)$ può essere definita come:

- Ogni variabile booleana può assumere due valori, quindi, con n variabili si possono avere 2^n possibili combinazioni

v_3	v_2	v_1	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Operatori logici

- Le variabili booleane possono essere combinate da operatori logici
- Tali operatori restituiscono anch'essi un valore logico
- Gli operatori sono:
 - AND
 - OR
 - NOT
 - NAND
 - NOR ...

AND

- Viene denotato dal simbolo \bullet (da non confondere con il simbolo di prodotto aritmetico) e spesso sottinteso
- Si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
 - $0 \bullet 0 = 0$
 - $0 \bullet 1 = 0$
 - $1 \bullet 0 = 0$
 - $1 \bullet 1 = 1$
- Il risultato è *vero* se entrambi gli operandi

OR

- Viene denotato dal simbolo $+$ (da non confondere con il simbolo di addizione aritmetica)
- Si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
 - $0 + 0 = 0$
 - $0 + 1 = 1$
 - $1 + 0 = 1$
 - $1 + 1 = 1$
- Il risultato è *vero* se almeno uno degli operandi è vero

NOT

- Viene indicato con il simbolo $\bar{}$ sopra la variabile da negare (es. \bar{a})
- Si applica ad un solo operando (operatore unario) e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
 - $\bar{0} = 1$
 - $\bar{1} = 0$
- Il risultato è il valore opposto (la negazione) di quello dell'operando; ovvero, se l'operando è falso l'uscita è vera e viceversa

Espressioni booleane semplici

- Con le variabili , costanti ed operatori booleani si possono costruire delle espressioni il cui valore è ancora booleano
- Esempio:
 - NOT b
 - NOT (a AND b)

Operatori relazionali

- Permettono il confronto di valori qualsiasi.
- Gli operatori di relazione più noti sono quelli che permettono di confrontare quantità numeriche:
 - ◆ uguale (simbolo '=')
 - ◆ diverso (simbolo '≠')
 - ◆ maggiore (simbolo '>')
 - ◆ minore (simbolo '<')
 - ◆ maggiore o uguale (simbolo '≥')
 - ◆ minore o uguale (simbolo '≤')

Operatori relazionali

- Gli operatori '=' e '≠' sono applicabili a valori di qualunque natura
- Gli altri operatori richiedono una relazione d'ordine sull'insieme di valori

Operatori relazionali

- Gli operatori di relazione permettono di esprimere predicati semplici
 - ◆ $1 < 2$ (valore: vero)
 - ◆ $7 < 0$ (valore: falso)
 - ◆ $x \neq 0$ (valore: dipende cosa rappresenta 'x')
 - ◆ oggi = venerdì (valore: dipende cosa rappresenta 'oggi')
- Non sono operatori logici, ma consentono di costruire espressioni che possono essere usate come argomenti di operatori logici
 - ◆ $-1 \leq x \text{ AND } x \leq 1$

Espressioni booleane

- In generale una espressione booleana o proposizione è costituita da 2 termini separati da un operatore booleano
 - Ad esempio $(x > 0)$ and $(x < 100)$
- Ogni termine ha un valore di verità ottenuto mediante una espressione relazionale

Teorema di De Morgan

- Il complemento di una somma è uguale al prodotto dei complementi dei termini e, dualmente, il complemento di un prodotto è uguale alla somma dei complementi dei fattori

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad a + b = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b = \overline{\bar{a} + \bar{b}}$$

- Si dimostra usando le tabelle di verità

Teorema di De Morgan

a	b	NOT (a OR B)	NOT a	NOT b	(NOT a) AND (NOT b)
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0

Precedenza operatori

- In ordine di priorità dalla maggiore alla minore:

NOT

AND

OR

- Esempi:

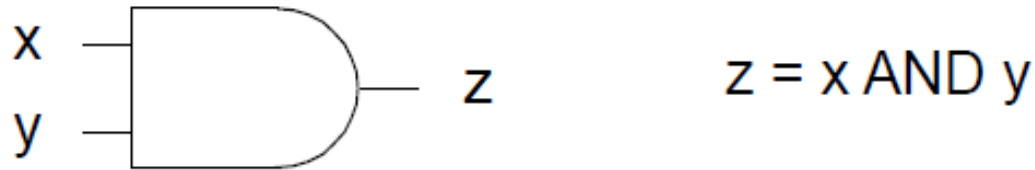
a OR b AND c **equivale a** a OR (b AND c)

a OR NOT b **equivale a** a OR (NOT b)

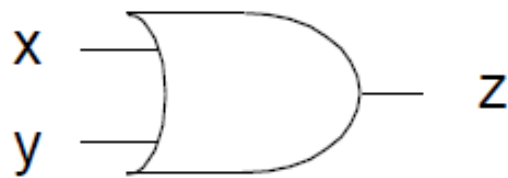
a OR NOT b AND c **equivale a** a OR ((NOT b) AND c)

Porte logiche

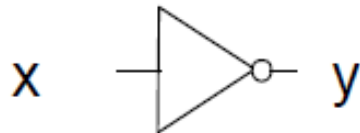
Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



$$z = x \text{ AND } y$$



$$z = x \text{ OR } y$$



$$y = \text{NOT } x$$