

Capitolo 1 - DIAGRAMMA DEGLI SPOSTAMENTI E CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI CON IL PLV

1.1 Prime definizioni

Una “costruzione” è un insieme di elementi atto a svolgere una determinata funzione sopportando determinati carichi (persone, autoveicoli, vento, neve, sismi, ...). Tale definizione comprende non solo gli edifici, costruzioni per antonomasia (*figura 1a*), ma anche ponti, navi, ...

Più precisamente, di una costruzione ci interesserà studiare “l’ossatura portante” o **STRUTTURA**, a cui viene affidato il compito di resistere ai carichi (*figura 1b*).

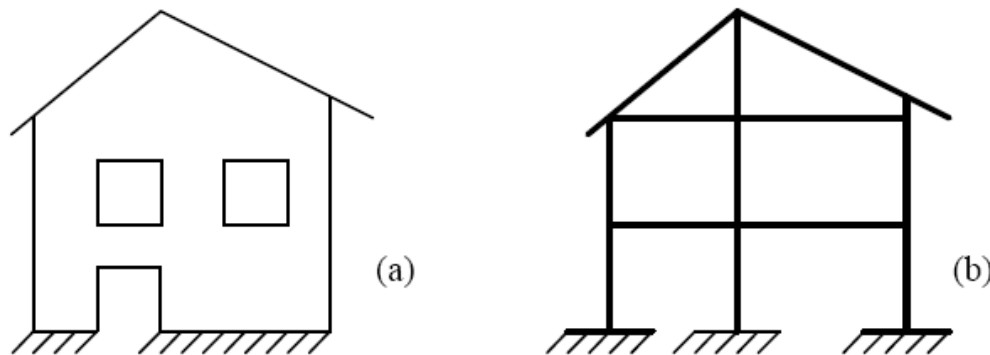


Figura 1

Molte delle strutture di interesse nel campo dell’Ingegneria Civile ed Industriale nascono dall’assemblaggio di elementi *trave*, collegate tra loro e al terreno.

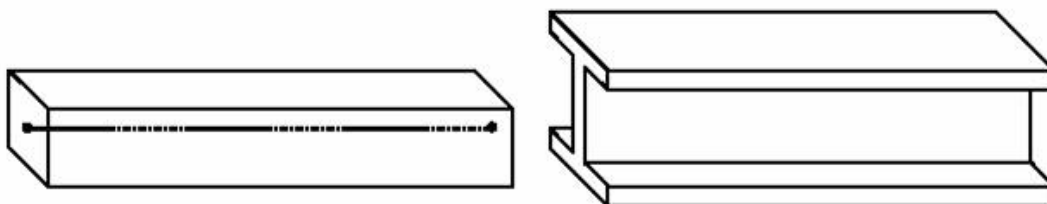


Figura 2

Definiamo TRAVE un solido tridimensionale, generato da un'area piana A (**sezione retta**) che si muove nello spazio mantenendosi perpendicolare alla traiettoria a (**asse della trave**) del proprio baricentro (*figura 2*).

Lo sviluppo lineare e i raggi di curvatura dell'asse geometrico devono essere molto maggiori delle dimensioni di una generica sezione perpendicolare all'asse (eventualmente, la forma e le dimensioni della sezione generatrice possono essere variabili, purché con continuità): sotto queste ipotesi, la trave può essere schematizzata semplicemente attraverso la propria linea d'asse e può essere assimilata ad un elemento *monodimensionale* (*figura 3*).

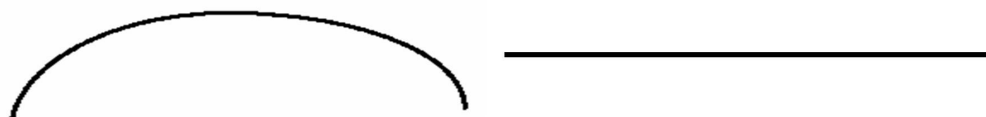


Figura 3

Se la traiettoria del baricentro è contenuta in un piano, la trave si dice *piana*.

Per i nostri scopi è possibile prescindere dalla deformabilità delle travi e assimilarle a *corpi rigidi*; ipotizzeremo inoltre che una struttura sia un *sistema olonomo* e ammetteremo che ciascuna parte sia animata di *moto rigido piano*.

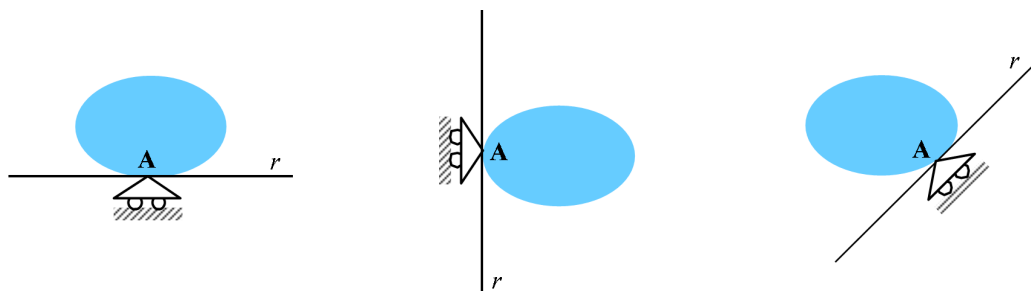
Per l'analisi statica di una struttura è necessario conoscere tutte le forze che la sollecitano; per tale motivo, noti i carichi, occorre determinare anche le reazioni dei vincoli. Il calcolo di tali reazioni si può effettuare utilizzando il **Principio dei Lavori Virtuali** per il quale, come vedremo, è fondamentale la conoscenza degli spostamenti virtuali delle diverse parti costituenti la struttura; per la valutazione di tali spostamenti è necessario innanzitutto caratterizzare i vincoli presenti nella struttura.

1.2 I vincoli

Sebbene nella realtà i vincoli agiscano sui punti di una data area, nello schema che li rappresenta essi si considerano agenti su di un solo punto dell'area reale interessata. I vincoli si distinguono in *semplici*, *doppi* e *tripli*: i vincoli **semplici** sono tradotti da una sola equazione scalare, quelli **doppi** da due ed infine quelli **tripli** da tre; tali equazioni sono indipendenti dal tempo (vincoli fissi) e sono ricavate a partire dalla formula caratteristica dello spostamento rigido:

$$dP = dO + \psi \times (P - O) \quad (1)$$

1.2.1 Carrello



Il CARRELLO (**esterno**) è un vincolo semplice che impone al punto A della struttura in cui è applicato di muoversi su di una retta parallela alla direzione di scorrimento r ; in particolare, si parla di carrello a scorrimento orizzontale, verticale o obliquo se tale è r .

Per un carrello a scorrimento orizzontale si ha quindi:

$$dy_A = 0$$

per un carrello a scorrimento verticale:

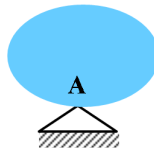
$$dx_A = 0$$

per un carrello a scorrimento obliquo:

$$dA \cdot \mathbf{n} = 0$$

dove \mathbf{n} rappresenta il versore della normale alla retta r .

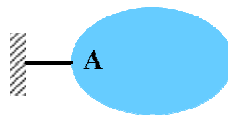
1.2.2 Cerniera



La CERNIERA (**esterna**) è un vincolo doppio che impedisce al punto A della struttura in cui è applicata di avere qualsiasi tipo di spostamento (traslatorio):

$$dx_A = dy_A = 0$$

1.2.3 Incastro

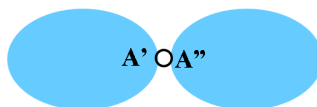


L'INCASTRO (**esterno**) è un vincolo triplo che impone al corpo a cui è applicato di avere spostamento nullo:

$$dx_A = 0 \quad dy_A = 0 \quad \psi = 0$$

Abbiamo considerato fino ad ora i *vincoli esterni* (di collegamento con il suolo); tra i *vincoli interni* (di collegamento tra due parti della struttura) consideriamo la:

1.2.4 Cerniera interna o nodo



Essa impone ai punti A' ed A'' delle due parti che collega di avere lo stesso spostamento.

Le equazioni del vincolo sono quindi:

$$dx_{A'} = dx_{A''} \quad dy_{A'} = dy_{A''}$$

Pertanto, il nodo è un vincolo interno doppio.

1.3 Analisi cinematica

I propositi dell'analisi cinematica sono principalmente di accertare la presenza o assenza di **labilità** nelle strutture, intesa come possibilità di piccoli (infinitesimi) spostamenti rigidi dei componenti delle stesse a partire dalla configurazione iniziale.

In altri termini, data una struttura ci si chiede se i vincoli in essa presenti sono sufficienti – per numero e posizione – a privarla di qualunque possibilità di movimento rigido di ampiezza infinitesima, prescindendo da eventuali carichi su essa agenti.

Consideriamo una struttura formata da t travi (o *tratti*): poiché siamo nel piano, questi tratti, pensati liberi, possiedono complessivamente $3t$ gradi di libertà¹. Affinché la struttura non abbia spostamenti rigidi sotto l'azione di qualunque sistema di carichi esterni, sarà necessaria la presenza di vincoli che sottraggono almeno $3t$ gradi di libertà.

Il semplice bilancio fra gradi di libertà del sistema libero e gradi di libertà sottratti dai vincoli tuttavia non è sufficiente a garantire l'assenza di moti rigidi: bisogna che i vincoli siano efficaci, ovvero correttamente posizionati nella struttura.

Detto s il grado di libertà sottratto dai vincoli² (corrispondente al numero di equazioni che traducono i vincoli agenti sulla struttura), si ha:

- se $3t - s > 0$, la struttura è sicuramente **labile** poiché il numero di gradi di libertà sottratti dai vincoli è inferiore al numero dei gradi di libertà del sistema libero;

¹ Si definisce **grado di libertà** di una struttura il minimo numero di parametri, tra loro indipendenti, atti ad individuare la sua configurazione.

² I vincoli che consideriamo si intendono fissi e bilaterali.

- se $3t - s = 0$, la struttura può essere labile o non labile a seconda della disposizione dei vincoli.

Ad esempio, se consideriamo la trave di *figura 4*, i tre carrelli che collegano a terra la trave, pur sottraendo complessivamente tre gradi di libertà (quindi $3t - s = 0$), lasciano la trave libera di compiere traslazioni rigide in direzione orizzontale: il sistema è dunque labile.



Figura 4

Per avere informazioni sull'effettivo comportamento cinematico di una struttura si può utilizzare la **Teoria dei Centri** che chiama in gioco i centri di istantanea rotazione (propri o impropri) caratteristici di un sistema animato di moto rigido piano.

1.3.1 Teoria dei Centri

Una struttura è animata di moto rigido piano e quindi l'atto di moto o è rotatorio (lungo rette normali al piano) o è traslatorio (parallelamente al piano); se l'atto di moto è rotatorio, il centro di rotazione è un punto proprio mentre se l'atto di moto è traslatorio il centro di rotazione è un punto improprio. Per ricercare i centri di rotazione si può utilizzare il **Teorema di Chasles**.

Riportiamo alcuni risultati facilmente deducibili dalla formula (1) che caratterizza lo spostamento rigido elementare distinguendo il caso in cui il sistema (la struttura) sia costituito da un unico tratto, da due tratti o da tre tratti.

✓ **Struttura costituita da un unico tratto ($t = 1$)**

Se si considera una struttura ad un unico tratto con due centri distinti, la struttura è non labile.

Infatti, se $C_1 \neq C_2$ sono due centri si avrà $dC_1 = dC_2 = 0$; considerando la formula degli spostamenti elementari (1) si ha:

$$dC_1 = dC_2 + \Psi \times (C_1 - C_2)$$

e quindi $\Psi \times (C_1 - C_2) = 0$. Tale prodotto vettoriale si annulla solo per $\Psi = 0$ e pertanto, $\forall P$, si ha:

$$dP = dC_1 + \Psi \times (P - C_1) = 0$$

e quindi il tratto è fisso.

✓ **Struttura costituita da due tratti ($t = 2$)**

Per tali strutture indichiamo con \mathcal{M}_1 il moto assoluto del primo tratto S_1 , \mathcal{M}_2 il moto assoluto del secondo tratto S_2 , \mathcal{M}_{12} il moto relativo di S_1 rispetto ad S_2 ed \mathcal{M}_{21} il moto relativo di S_2 rispetto ad S_1 . Indicando con C_1 e C_2 i centri assoluti (centri nei moti assoluti \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2), C_{12} e C_{21} i centri relativi (centri nei moti relativi \mathcal{M}_{12} ed \mathcal{M}_{21}), valgono le seguenti proprietà:

1. *i centri relativi C_{12} e C_{21} coincidono, cioè $C_{12} \equiv C_{21}$;*
2. *$C_{12} \equiv C_{21}$ coincide con il nodo comune ai due tratti;*
3. *se C_1 , C_{12} , C_2 sono univocamente determinati ed allineati allora la struttura è labile mentre se C_1 , C_{12} , C_2 non sono allineati non è possibile alcun tipo di spostamento e pertanto la struttura è non labile;*
4. *le rotazioni dei due tratti devono essere tali che il nodo comune ad essi subisca lo stesso spostamento in \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2 .*

Struttura costituita da tre tratti ($t = 3$)

Indicati con C_i , C_j e $C_{ij} = C_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$) i rispettivi centri assoluti e relativi avremo che:

- *se C_i , C_j e C_{ij} ($\forall i, j$) non sono allineati non è possibile alcun tipo di spostamento e pertanto la struttura è non labile;*

- se C_{12} , C_{13} e C_{23} non sono allineati le tre parti non possono avere movimenti relativi e pertanto si comportano come un unico tratto;
- se C_i , C_j e C_{ij} ($\forall i, j$) sono univocamente determinati ed allineati allora la struttura risulterà labile.

* * * * *

Vediamo in relazione ai vincoli analizzati come individuiamo tali centri.

I vincoli doppi consentono di individuare univocamente i centri. Se in un punto di una struttura è applicata una cerniera esterna, fissandosi tale punto, questo diviene un centro assoluto proprio; analogamente, se due parti di una struttura sono collegate tra loro con un nodo, fissandosi tale punto, questo diviene un centro relativo proprio.

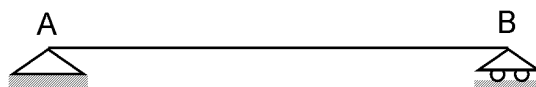
I vincoli semplici forniscono una sola condizione per individuare il centro; in particolare, per il carrello, in accordo con il *teorema di Chasles*, il centro si trova sulla normale alla direzione di scorrimento passante per il punto di applicazione del vincolo.

Naturalmente se ad un tratto di una struttura è applicato un incastro non ha senso parlare di centro perché il tratto non ha alcuna possibilità di movimento.

1.3.2 Esempi

Negli esempi che seguono si richiede di effettuare l'analisi cinematica e cioè di verificare se il sistema è labile nella configurazione considerata e di determinare i centri di istantanea rotazione.

Esempio 1



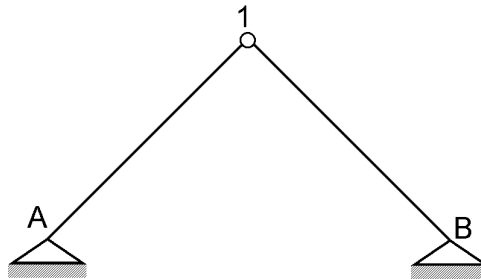
La struttura è costituita da un unico tratto; i vincoli applicati sono una cerniera in A ed un carrello a scorrimento orizzontale in B:

$$3t - s = 3 - (2 + 1) = 0$$

e quindi la struttura è apparentemente non labile.

Poiché esistono due centri assoluti distinti, uno in A e l'altro sulla normale per B alla retta AB, la struttura è effettivamente non labile.

Esempio 2



La struttura è costituita da due tratti ed è vincolata con tre cerniere (due esterne in A e B ed un nodo in 1):

$$3t - s = 6 - (2 + 2 + 2) = 0$$

e quindi la struttura è apparentemente non labile.

Per le condizioni imposte dai vincoli, $C_1 \equiv A$, $C_{12} \equiv 1$ e $C_2 \equiv B$: poiché i centri non sono allineati la struttura è effettivamente non labile.

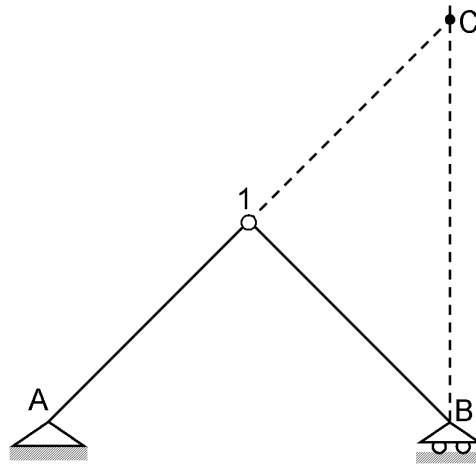
Esempio 3

La struttura è costituita da due tratti ed è vincolata con una cerniera esterna in A, un nodo in 1 ed un carrello a scorrimento orizzontale in B:

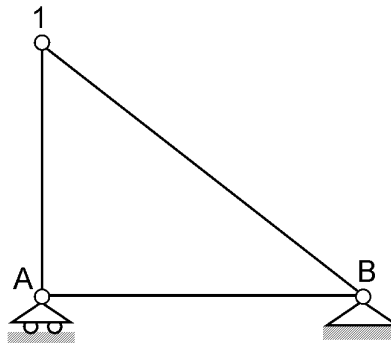
$$3t - s = 6 - (2 + 2 + 1) = 1$$

e quindi la struttura è labile.

Per le condizioni imposte dai vincoli, $C_1 \equiv A$, $C_{12} \equiv 1$; per determinare C_2 , notiamo che esso deve trovarsi sulla normale per B alla direzione di scorrimento del carrello e deve inoltre essere allineato con C_1 e C_{12} (deve quindi appartenere anche alla retta A1): C_2 coincide con l'intersezione delle due rette.



Esempio 4



La struttura è costituita da tre tratti; i tre centri relativi coincidono con i tre nodi e quindi non sono allineati: non esiste un movimento relativo tra i tre tratti che pertanto si comportano come un unico tratto. Ci riconduciamo quindi all'esempio 1.

1.4 I diagrammi degli spostamenti

Osserviamo preliminarmente che, utilizzando nei sistemi considerati vincoli fissi, la classe degli spostamenti elementari dP viene a coincidere con quella degli spostamenti virtuali δP che nel caso rigido si esprimono attraverso la relazione:

$$\delta P = \delta O + \boldsymbol{\psi} \times (P - O) \quad (2)$$

Per poter valutare rapidamente le componenti δx e δy di tali spostamenti è utile poter disporre dei loro grafici; vediamo dunque come tracciare tali grafici.

Indichiamo con Σ un sistema che sia animato di moto rigido piano, con p un piano dello spazio solidale a Σ che durante il moto resti sovrapposto ad un piano π dello spazio fisso e con S l'intersezione di Σ con p .

Come è noto, l'atto di moto rigido piano, in un dato istante t , può essere:

- a) rotatorio intorno ad una retta a_t (asse istantaneo di rotazione) normale a π ;
- b) traslatorio parallelamente a π .

1.4.1 Caso rotatorio

In questo caso sappiamo che nell'istante t , esiste un unico punto $C = p \cap a_t$ (diciamo C invece di C_t) del piano mobile che in quell'istante è dotato di velocità nulla e ciò implica che lo spostamento elementare di un punto P di S sia espresso da:

$$\delta P = \boldsymbol{\psi} \times (P - C) \quad (3)$$

in cui $\boldsymbol{\psi}$ è un vettore normale a π avente verso ed intensità arbitrari. Naturalmente lo spostamento elementare di C è nullo e ciò induce a denominare C centro (istantaneo) di rotazione.

Dalla (3) si trae che:

$$dP \perp \boldsymbol{\psi} \quad dP \perp P - C$$

e quindi:

- $|dP|$ è proporzionale alla distanza del punto P dal centro di rotazione C ;
- la direzione di dP è ortogonale alla congiungente P e C e il verso è tale $\boldsymbol{\psi}$, $P - C$, dP sia una terna levogira.

Inoltre:

$$|dP| = |\Psi| |PC|$$

Consideriamo una retta r passante per C e sia P un punto qualsiasi di r . Poiché $\frac{|dP|}{|PC|} = |\Psi|$ si ha che tutti i punti di r nello spostamento elementare restano allineati.

Inoltre, dal triangolo $PP'C$ si ha che:

$$|dP| = |PC| \operatorname{tg} \alpha$$

e quindi risulta $|\Psi| = \operatorname{tg} \alpha$.

Consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale levogiro $Oxyz$, avente $xy \equiv \pi$. Sia P un punto del piano p e C il centro di rotazione. $P \equiv (x_P, y_P, 0)$, $C \equiv (x_C, y_C, 0)$ mentre $\Psi \equiv (0, 0, \Psi_z)$ con $\Psi_z = \pm |\Psi|$ dove va preso il segno $+$ se Ψ ha lo stesso verso di z , il segno $-$ in caso contrario.

Proiettando la (3) sugli assi si ha:

$$dx_P = -\Psi_z (y_P - y_C) \quad (3a)$$

$$dy_P = \Psi_z (x_P - x_C) \quad (3b)$$

Tali relazioni mostrano che dy_P dipende solo da x e dx_P solo da y ; pertanto dy_P è la stessa per tutti i punti situati sulla retta $x = \text{costante}$ mentre dx_P assume il medesimo valore in corrispondenza dei punti situati su una retta $y = \text{costante}$; ovvero dy_P [dx_P] assume valori costanti su rette parallele all'asse y [x].

Vogliamo ora tracciare il grafico delle funzioni dy_P e dx_P : ciò consentirà, assegnata una rotazione di p rispetto a π di leggere i valori di dy_P [dx_P] in funzione di $(x_P - x_C) [(y_P - y_C)]$.

A tale scopo, denominando *fondamentale* una retta che sia parallela e concorde con uno degli assi coordinati, tracciamo due fondamentali f_x ed f_y tra loro ortogonali.

Se leggiamo su f_x le differenze $(x_P - x_C)$ e su f_y riportiamo i valori di dy_P , si ha che la (3a) è nel riferimento $O'f_xf_y$ l'equazione di una retta σ , passante per la proiezione C' di C su f_x , che risulta inclinata di un angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\operatorname{tg}\alpha = \psi_z$. Pertanto, per avere la componente su y dello spostamento del punto $P \equiv (x_P, y_P)$ basta proiettare P su f_x e leggere l'ordinata del punto di σ di ascissa x_P .

Analogamente, se su f_y leggiamo la differenza $(y_P - y_C)$ e su f_x riportiamo i valori di dx_P , si ha che la (3b) è nel riferimento $O'f_xf_y$ l'equazione di una retta ρ , passante per la proiezione C'' di C su f_y , che risulta inclinata su f_x dell'angolo $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Anche in questo caso, per avere la componente su x dello spostamento del punto $P \equiv (x_P, y_P)$ basta proiettare P su f_y e leggere l'ordinata del punto di ρ di ascissa y_P .

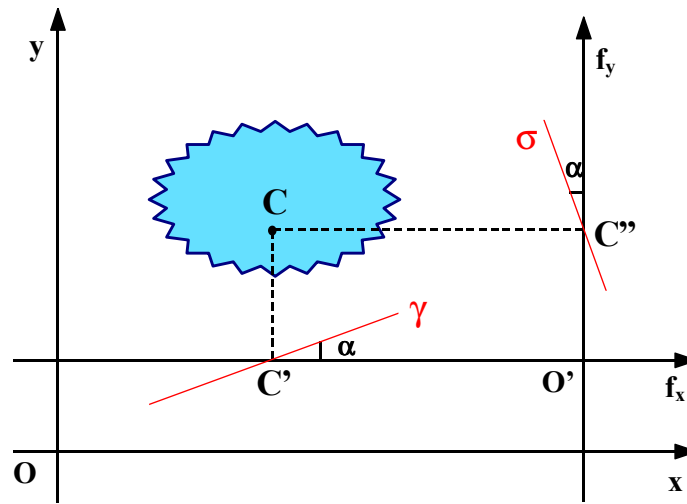


Figura 5

Pertanto, per tracciare il digramma della componente dello spostamento secondo un asse coordinato è necessario e sufficiente conoscere:

- la proiezione C_f del centro di rotazione C su una fondamentale f parallela all'altro asse coordinato;
- la componente ψ_z del vettore ψ .

Noti tali elementi, il diagramma è una retta che interseca la fondamentale nel punto C_f ed è ruotato rispetto ad f , in senso levogiro o destrogiro (a seconda che ψ_z sia positivo o negativo), di un angolo α tale che $\operatorname{tg}\alpha = \psi_z$.

1.4.2 Caso traslatorio

In questo caso, all'istante t considerato, tutti i punti di p hanno la medesima velocità τ rispetto al piano π . Pertanto, posto $u = \tau dt$, nell'intervallo $[t, t + dt]$, ogni punto $P \in p$ subisce uno spostamento elementare dato da:

$$dP = u \quad (4)$$

che è indipendente dal particolare punto scelto.

Indicando con u_x ed u_y le componenti su x ed y del vettore u , dalla (4) abbiamo:

$$dy = u_y \quad (4a)$$

$$dx = u_x \quad (4b)$$

Dalle (4a) e (4b) si può ricavare la regola che ci permette di tracciare il digramma delle componenti dello spostamento. Indichiamo con f_x ed f_y due fondamentali tra loro ortogonali e riportiamo su f_x ed f_y rispettivamente i punti di coordinate $(u_x, 0)$ e $(0, u_y)$. Le rette σ e ρ di equazione $dy = u_y$ e $dx = u_x$ forniscono i diagrammi cercati.

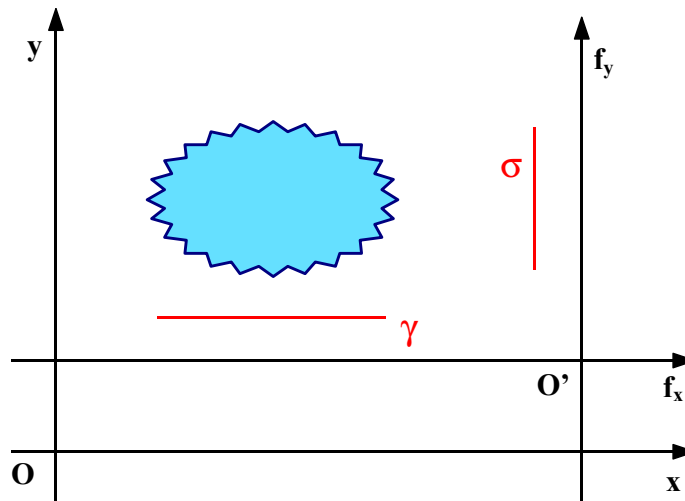


Figura 6

Quando il sistema è costituito da più corpi dovranno essere tracciati i diagrammi degli spostamenti per ogni corpo; nel caso di una struttura dovranno essere tracciati i diagrammi degli spostamenti δx e δy per ogni tratto facendo in modo che i vincoli relativi soddisfino le relazioni cinematiche che li caratterizzano.

Quanto detto sarà chiarito con alcuni esempi ([→ paragrafo 1.7](#)); vale la pena ricordare le proprietà dei centri da tenere ben presenti nelle applicazioni.

Detti S_i ed S_j due tratti consecutivi di una struttura si ha:

1. i centri relativi C_{ij} e C_{ji} coincidono;
2. i centri relativi coincidono con i nodi comuni ai vari tratti;
3. le rotazioni dei tratti S_i ed S_j devono essere tali che il nodo comune ad essi subisca lo stesso spostamento;
4. se il tratto S_i ha un punto fisso, tale punto individua il suo centro assoluto di rotazione;
5. se il tratto S_i ha due centri distinti, essi è fisso e gli spostamenti virtuali di tutti i suoi punti sono nulli;
6. i centri C_i , C_j e C_{ij} devono essere allineati; se ciò non avviene (C_i , C_j e C_{ij} non allineati) allora i tratti S_i ed S_j non possono subire alcun tipo di spostamento.

1.5 Vincoli e reazioni

I vincoli che compaiono in una struttura sono supposti bilaterali, fissi e privi di attrito; ciò implica, in base al **Principio delle Reazioni Vincolari**, che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari da essi esplicate debba risultare nullo per ogni spostamento virtuale eseguito a partire da una data configurazione.

$$\delta L^{(v)} = 0 \quad \forall \delta S \text{ reversibile} \quad (5)$$

Utilizzando la (5) e ricordando la caratterizzazione cinematica dei vincoli (cioè le equazioni scalari che li definiscono) si traggono le seguenti conclusioni sulle reazioni da essi esplicate.

1.5.1 Carrello

Per un carrello a scorrimento orizzontale applicato in un punto A, la reazione esplicata è il vettore (applicato in A):

$$\mathbf{R}_A = R_A^y \mathbf{j}$$

Per un carrello a scorrimento verticale applicato in un punto A, la reazione esplicata è il vettore (applicato in A):

$$\mathbf{R}_A = R_A^x \mathbf{i}$$

Per un carrello a scorrimento obliquo applicato in un punto A, la reazione esplicata è il vettore (applicato in A):

$$\mathbf{R}_A = R_A \alpha_1 \mathbf{i} + R_A \alpha_2 \mathbf{j}$$

dove α_1 ed α_2 sono i coseni direttori della normale alla retta di scorrimento del carrello.

1.5.2 Cerniera

La reazione esplicata da una cerniera applicata in un punto A è rappresentata da un vettore applicato in A avente una qualunque direzione nel piano:

$$\mathbf{R}_A = R_A^x \mathbf{i} + R_A^y \mathbf{j}$$

1.5.3 Incastro

L'incastro impedisce tutti i possibili movimenti nel piano e pertanto, se è applicato in un punto A, le reazioni esplicate sono:

$$\mathbf{M}_A = M_A^z \mathbf{k} \quad \mathbf{R}_A = R_A^x \mathbf{i} + R_A^y \mathbf{j}$$

1.6 Calcolo delle reazioni vincolari con le Equazioni Cardinali della Statica

Le **Equazioni Cardinali della Statica** sono sempre soddisfatte se il sistema considerato è in equilibrio; quindi tali equazioni, che nel caso di sistemi vincolati si scrivono:

$$\begin{cases} \mathbf{R} + \mathbf{R}' = 0 \\ \mathbf{M}_o + \mathbf{M}_o' = 0 \end{cases}$$

possono essere utilizzate, in ipotesi di equilibrio, per determinare le incognite reazioni vincolari.

Nel caso delle strutture, poiché siamo nel caso piano, per ogni parte della struttura, le Equazioni Cardinali della Statica si riducono al seguente sistema scalare:

$$\begin{cases} R_x + R_x' = 0 \\ R_y + R_y' = 0 \\ M_z + M_z' = 0 \end{cases}$$

Se il numero delle incognite che definiscono le reazioni vincolari è uguale al numero delle equazioni, il problema del calcolo delle reazioni è possibile e determinato (cioè esiste un complesso di reazioni che fanno equilibrio ed è unico); se è maggiore il problema è indeterminato (esistono cioè infiniti complessi di reazioni capaci di equilibrare le forze applicate); se è minore il problema è impossibile.

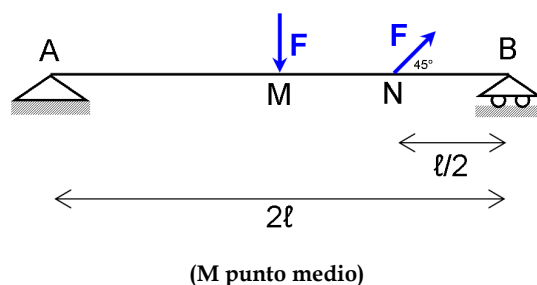
Nel primo caso si dice che il calcolo delle reazioni è staticamente determinato oppure che la struttura è **ISOSTATICA**; nel secondo caso si dice che il calcolo delle reazioni vincolari è staticamente indeterminato oppure che la struttura è **IPERSTATICA**. Il

confronto tra il numero delle incognite e quello delle equazioni non è molto agevole nel caso di strutture costituite da più parti tra di loro collegate per cui è preferibile utilizzare la constatazione che se una trave è non labile è anche globalmente isostatica (si dimostra).

Se una struttura è non labile allora essa sarà in equilibrio qualunque siano le forze agenti; se invece una struttura è labile le forze agenti su di essa, cioè i carichi, devono soddisfare particolari condizioni affinché sia garantito l'equilibrio.

Esempio 5

Consideriamo ad esempio una struttura costituita da un'unica trave (unico tratto).



La struttura, che ha un grado di libertà pari a zero, risulta non labile avendo due centri distinti, uno sulla normale per B alla direzione di scorrimento del carrello in B e l'altro coincidente con A (per la presenza della cerniera).

Per quanto detto sopra, la struttura è in equilibrio qualunque siano i carichi ed è quindi isostatica; effettuiamo dunque il calcolo delle reazioni vincolari con le Equazioni Cardinali della Statica:

$$\begin{cases} R_A^x + \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0 \\ R_A^y + R_B^y - F + \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0 \\ -(R_A^y)(2\ell) + F\ell - \frac{\sqrt{2}}{2} (F)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

dove come polo per il calcolo dei momenti si è scelto il punto B.

Abbiamo ottenuto, come era prevedibile, un sistema algebrico di tre equazioni nelle tre incognite R_A^x , R_A^y , R_B^y che ammette come unica soluzione:

$$R_A^x = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \quad R_A^y = \frac{F}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}F \quad R_B^y = \frac{F}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{8}F$$

Allora le reazioni cercate sono:

$$\mathbf{R}_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}F\mathbf{i} + \left(\frac{F}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}F\right)\mathbf{j} \quad \mathbf{R}_B = \left(\frac{F}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{8}F\right)\mathbf{j}$$

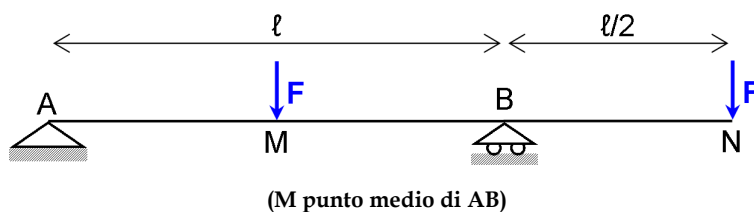
1.7 Calcolo delle reazioni vincolari con il Principio dei Lavori Virtuali

Il **Principio dei Lavori Virtuali** (nel seguito PLV) fornisce una condizione necessaria e sufficiente, priva di incognite vincolari (“pura”), per determinare l’equilibrio di un sistema olonomo a vincoli lisci e fissi; il PLV può essere usato anche per il calcolo delle reazioni vincolari.

Consideriamo una struttura isostatica; sostituendo un vincolo semplice con la reazione esplicita, il sistema considerato diverrà una volta labile ma sarà ancora garantito l’equilibrio.

Inglobando la reazione tra le forze attive ed applicando a questo nuovo sistema il PLV. otterremo un’equazione algebrica di primo grado nell’incognita reazione vincolare; la risoluzione di tale equazione fornirà la reazione cercata.

Esempio 6



La struttura è costituita da un unico tratto; i vincoli applicati sono una cerniera in A ed un carrello a scorrimento orizzontale in B:

$$3t - s = 3 - (2 + 1) = 0$$

e quindi la struttura è apparentemente non labile.

Poiché esistono due centri assoluti distinti, uno in A e l'altro sulla normale per B alla retta AB, la struttura è effettivamente non labile ed è quindi in equilibrio qualunque siano i carichi (è isostatica).

* * * * *

Calcoliamo allora la reazione vincolare R_A^y con il PLV; a tale scopo, ricordando che una cerniera equivale a due carrelli aventi direzioni di scorrimento tra loro ortogonali:



eliminiamo il carrello a scorrimento orizzontale (vincolo che esplica la R_A^y) e sostituiamo ad esso la reazione esplicita.

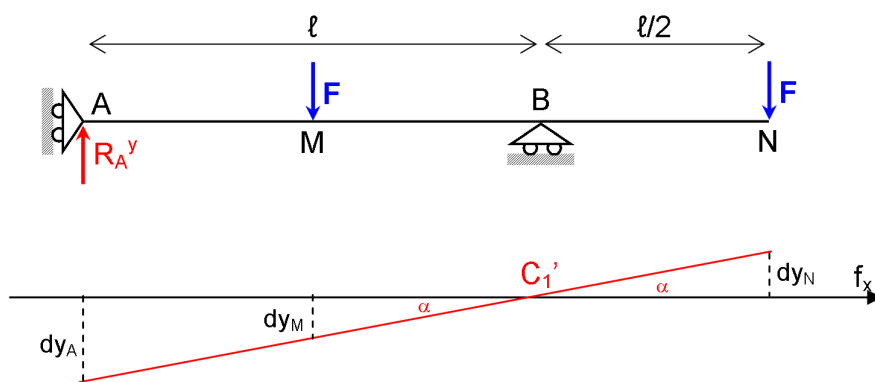


Figura 7

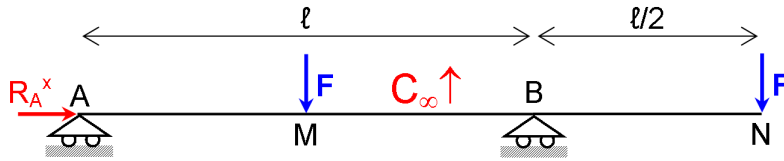
La struttura diviene una volta labile ed il centro di istantanea rotazione coincide con il punto B (intersezione della normale per A alla retta di scorrimento del carrello in A e della normale per B alla retta di scorrimento del carrello in B); il diagramma degli spostamenti verticali è quello in *figura 7*.

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow R_A^y (-\ell \operatorname{tg} \alpha) - F \left(-\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) - F \left(\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) = 0 \Leftrightarrow R_A^y = 0$$

* * * * *

Calcoliamo ora la reazione vincolare R_A^x con il PLV; a tale scopo, ricordando ancora che una cerniera equivale a due carrelli aventi direzioni di scorrimento tra loro ortogonali, eliminiamo il carrello a scorrimento verticale (vincolo che esplica la R_A^x) e sostituiamo ad esso la reazione esplicitata.



La struttura diviene una volta labile ed il centro di istantanea rotazione è improprio in direzione verticale: tutti i punti della struttura traslano orizzontalmente di una quantità u_x (arbitraria). Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow R_A^x u_x = 0 \Leftrightarrow R_A^x = 0$$

* * * * *

Calcoliamo infine la reazione vincolare R_B^y ; eliminiamo quindi il carrello in B e sostituiamo ad esso la reazione esplicitata.

La struttura diviene una volta labile ed il centro di istantanea rotazione coincide con il punto A (per la presenza della cerniera); il diagramma degli spostamenti verticali è quello in *figura 8*.

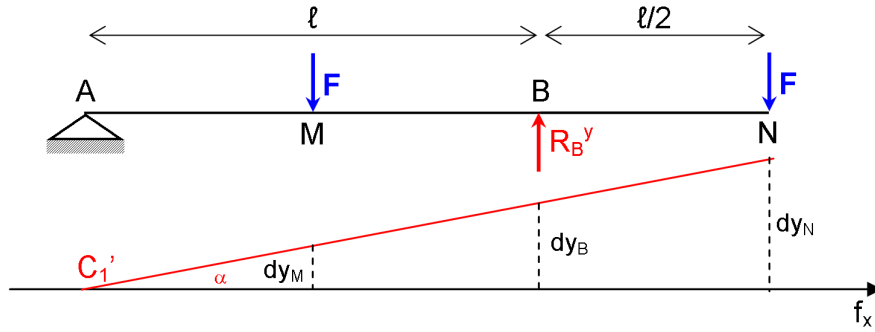
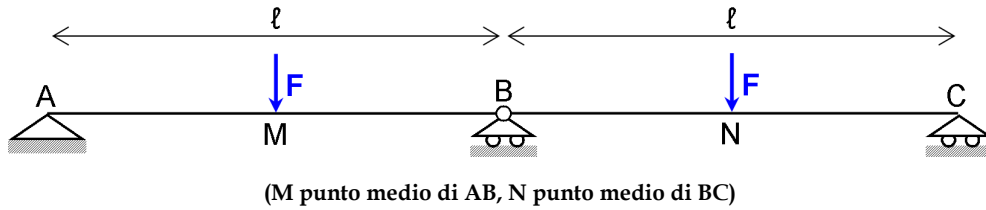


Figura 8

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow -F\left(\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) + R_B^y(\ell \operatorname{tg} \alpha) - F\left(\frac{3}{2} \ell \operatorname{tg} \alpha\right) = 0 \Leftrightarrow R_B^y = 2F$$

Esempio 7



La struttura è costituita da due tratti; i vincoli applicati sono una cerniera in A, un carrello ed un nodo in B, un carrello in C:

$$3t - s = 6 - (2 + 1 + 2 + 1) = 0$$

e quindi la struttura è apparentemente non labile.

Consideriamo il tratto AB: poiché esistono due centri assoluti distinti, uno in A e l'altro sulla normale per B alla retta AB (per la presenza del carrello), il primo tratto è non labile; il punto B – appartenendo ad entrambi i tratti – è quindi un punto fisso anche per il secondo tratto (la cerniera interna in B può essere considerata una cerniera esterna per il secondo tratto) e quindi, poiché esistono due centri assoluti distinti, uno in B e l'altro sulla normale per C alla retta BC (per la presenza del

carrello), anche il secondo tratto è non labile: tutta la struttura è non labile e quindi isostatica.

* * * * *

Calcoliamo allora la reazione vincolare R_A^y con il PLV; a tale scopo, ricordando che una cerniera equivale a due carrelli aventi direzioni di scorrimento tra loro ortogonali, eliminiamo il carrello a scorrimento orizzontale (vincolo che esplica la R_A^y) e sostituiamo ad esso la reazione esplicita.

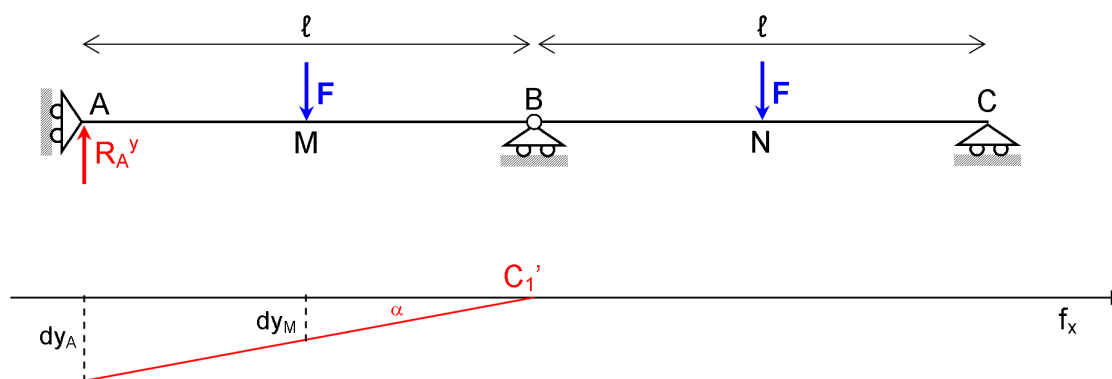


Figura 9

La struttura diviene una volta labile: $C_1 \equiv B$ (intersezione della normale per A alla retta di scorrimento del carrello in A e della normale per B alla retta di scorrimento del carrello in B); il punto B – appartenendo ad entrambi i tratti – è quindi un punto fisso anche per il secondo tratto e quindi, poiché per il secondo tratto si hanno due centri assoluti distinti, uno in B (per quando appena detto) e l'altro sulla normale per C alla retta BC (per la presenza del carrello), esso è non labile. Il diagramma degli spostamenti verticali è quello in figura 9.

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow R_A^y \left(-\ell \operatorname{tg} \alpha \right) - F \left(-\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) = 0 \Leftrightarrow R_A^y = \frac{F}{2}$$

* * * * *

Calcoliamo ora la reazione vincolare R_B^y ; eliminiamo quindi il carrello in B e sostituiamo ad esso la reazione esplicita.

La struttura diviene una volta labile: $C_1 \equiv A$ (per la presenza della cerniera), $C_{12} \equiv B$ (per la presenza del nodo) e $C_2 \equiv C$ (per la presenza del carrello e per l'allineamento con C_1 e C_{12}); il diagramma degli spostamenti verticali è quello in figura 10.

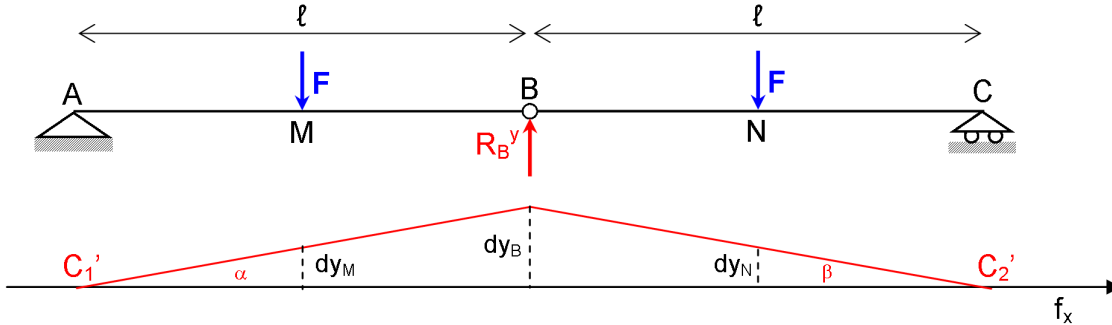


Figura 10

Dal diagramma tracciato si evince che si è tenuto conto del fatto che il centro relativo deve avere lo stesso spostamento valutato come punto del primo tratto e come punto del secondo tratto; ciò implica che:

$$\ell \operatorname{tg} \alpha = \ell \operatorname{tg} \beta$$

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow -F \left(\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) + R_B^y (\ell \operatorname{tg} \alpha) - F \left(\frac{\ell}{2} \underbrace{\operatorname{tg} \beta}_{=\operatorname{tg} \alpha} \right) = 0 \Leftrightarrow R_B^y = F$$

* * * * *

Calcoliamo infine la reazione vincolare R_C^y ; eliminiamo quindi il carrello in C e sostituiamo ad esso la reazione esplicita.

La struttura diviene una volta labile. Consideriamo il tratto AB: poiché esistono due centri assoluti distinti, uno in A e l'altro sulla normale per B alla retta AB (per la presenza del carrello), il primo tratto è non labile; il punto B – appartenendo ad

entrambi i tratti – è quindi un punto fisso anche per il secondo tratto e quindi $C_2 \equiv B$.
Il diagramma degli spostamenti verticali è quello in *figura 11*.

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow -F \left(-\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) + R_C^y (-\ell \operatorname{tg} \alpha) = 0 \Leftrightarrow R_C^y = \frac{F}{2}$$

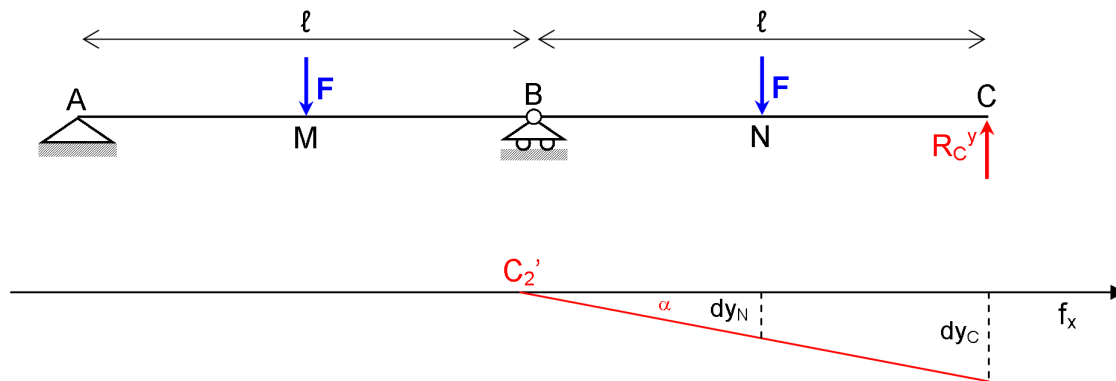
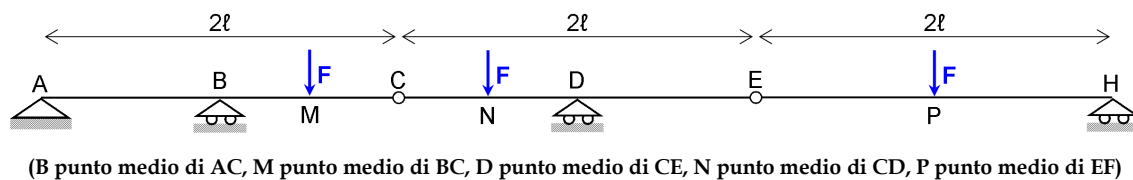


Figura 11

Esempio 8



La struttura è costituita da tre tratti:

$$3t - s = 9 - (2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1) = 0$$

e quindi la struttura è apparentemente non labile.

Poiché sul tratto AC esistono due centri assoluti distinti, uno in A e l'altro sulla normale per B alla retta AB (per la presenza del carrello), esso è non labile; il punto C – appartenendo ad entrambi i tratti – è quindi un punto fisso anche per il secondo tratto (la cerniera interna in C può essere considerata una cerniera esterna per il

secondo tratto) e quindi, poiché esistono due centri assoluti distinti, uno in C e l'altro sulla normale per D alla retta CD (per la presenza del carrello), anche il secondo tratto è non labile; il punto E – appartenendo ad entrambi i tratti – è quindi un punto fisso anche per il terzo tratto (la cerniera interna in E può essere considerata una cerniera esterna per il terzo tratto) e quindi, poiché esistono due centri assoluti distinti, uno in E e l'altro sulla normale per H alla retta EH (per la presenza del carrello), anche il terzo tratto è non labile. La struttura è dunque globalmente non labile e quindi isostatica.

* * * * *

Calcoliamo allora la reazione vincolare R_A^y con il PLV; a tale scopo, ricordando che una cerniera equivale a due carrelli aventi direzioni di scorrimento tra loro ortogonali, eliminiamo il carrello a scorrimento orizzontale (vincolo che esplica la R_A^y) e sostituiamo ad esso la reazione esplicita.

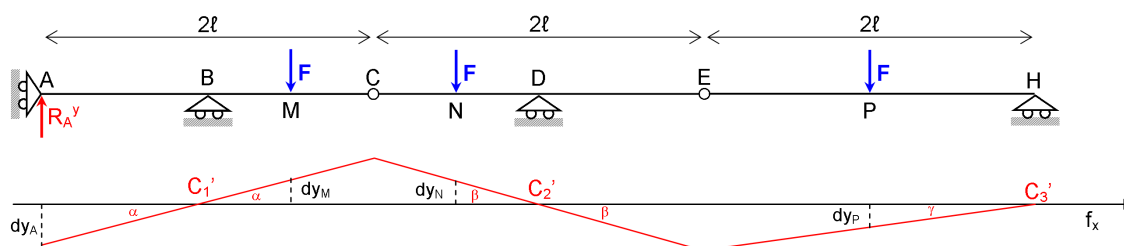


Figura 12

La struttura diviene una volta labile: $C_1 \equiv B$ (intersezione della normale per A alla retta di scorrimento del carrello in A e della normale per B alla retta di scorrimento del carrello in B), $C_{12} \equiv C$ (per la presenza del nodo), $C_2 \equiv D$ (per la presenza del carrello e per l'allineamento con C_1 e C_{12}), $C_{23} \equiv E$ (per la presenza del nodo), $C_3 \equiv H$ (per la presenza del carrello e per l'allineamento con C_2 e C_{23}). Il diagramma degli spostamenti verticali è quello in figura 12.

Dal diagramma tracciato si evince che:

$$\begin{cases} \ell \operatorname{tg} \alpha = \ell \operatorname{tg} \beta \\ \ell \operatorname{tg} \beta = 2 \ell \operatorname{tg} \gamma \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow R_A^y (-\ell \operatorname{tg} \alpha) - F \left(\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) - F \left(\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \beta \right) - F (-\ell \operatorname{tg} \gamma) = 0 \Leftrightarrow R_A^y = -\frac{F}{2}$$

* * * * *

Calcoliamo ora la reazione vincolare R_B^y ; eliminiamo quindi il carrello in B e sostituiamo ad esso la reazione esplicita.

La struttura diviene una volta labile ed è facile verificare che il diagramma degli spostamenti verticali è quello in *figura 13*.

Dal diagramma tracciato si evince che:

$$\begin{cases} 2 \ell \operatorname{tg} \alpha = \ell \operatorname{tg} \beta \\ \ell \operatorname{tg} \beta = 2 \ell \operatorname{tg} \gamma \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

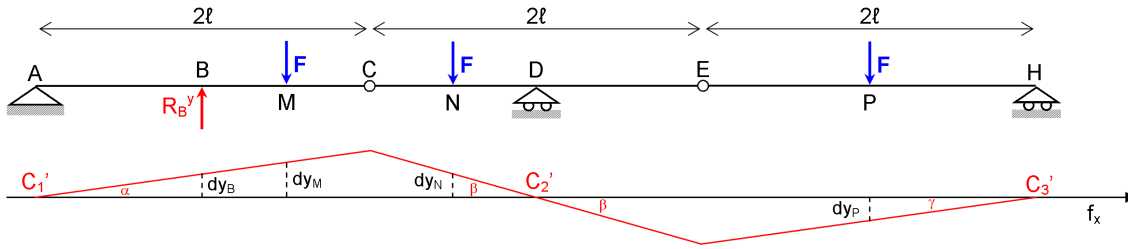


Figura 13

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow R_B^y (\ell \operatorname{tg} \alpha) - F \left(\frac{3}{2} \ell \operatorname{tg} \alpha \right) - F \left(\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \beta \right) - F (-\ell \operatorname{tg} \gamma) = 0 \Leftrightarrow R_B^y = \frac{3}{2} F$$

* * * * *

Calcoliamo ora la reazione vincolare R_D^y ; eliminiamo quindi il carrello in D e sostituiamo ad esso la reazione esplicita.

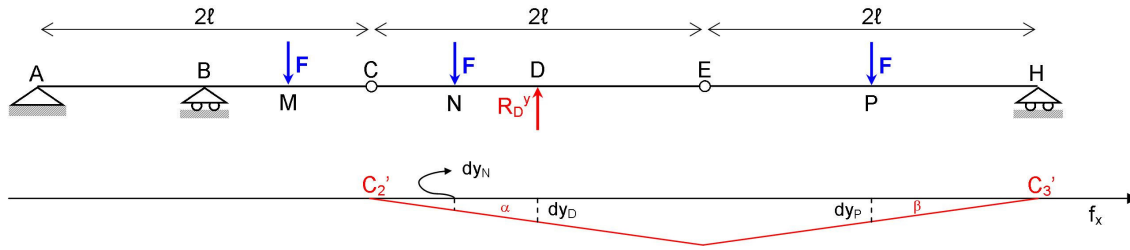


Figura 14

La struttura diviene una volta labile ed è facile verificare che il diagramma degli spostamenti verticali è quello in *figura 14*.

Dal diagramma tracciato si evince che si è tenuto conto del fatto che il centro relativo deve avere lo stesso spostamento valutato come punto del secondo tratto e come punto del terzo tratto; ciò implica che:

$$\ell \operatorname{tg} \alpha = \ell \operatorname{tg} \beta$$

Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow -F \left(-\frac{\ell}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) + R_D^y (-\ell \operatorname{tg} \alpha) - F (-\ell \operatorname{tg} \beta) = 0 \Leftrightarrow R_D^y = \frac{3}{2} F$$

* * * * *

Calcoliamo infine la reazione vincolare R_H^y ; eliminiamo quindi il carrello in H e sostituiamo ad esso la reazione esplicitata.

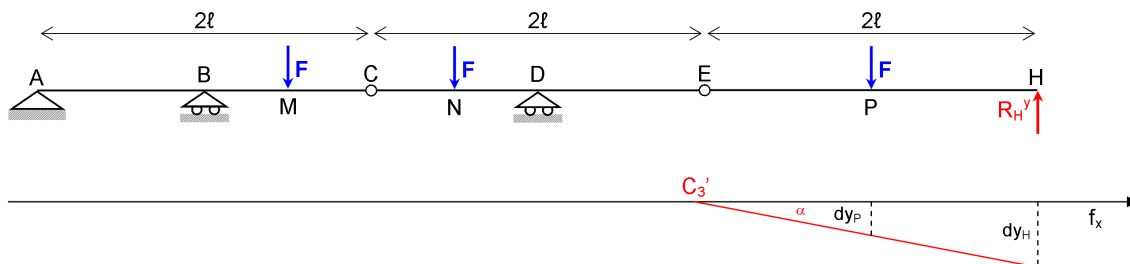


Figura 15

La struttura diviene una volta labile ed è facile verificare che il diagramma degli spostamenti verticali è quello in *figura 15*.

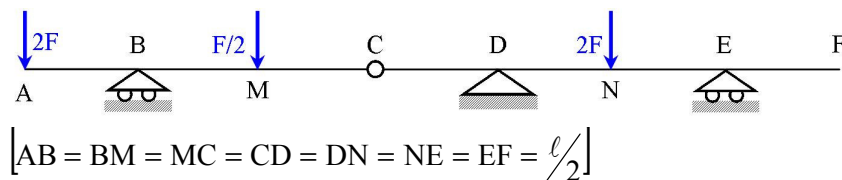
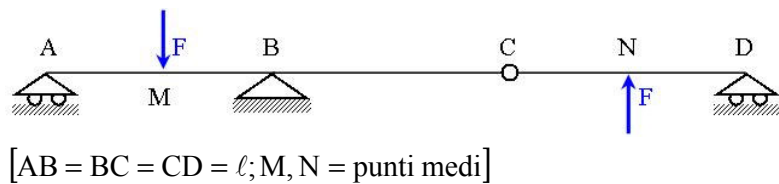
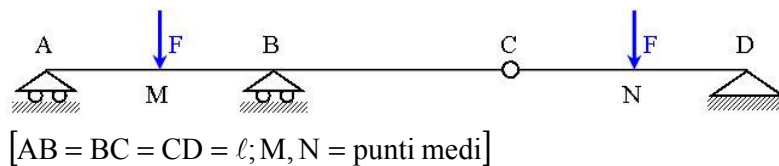
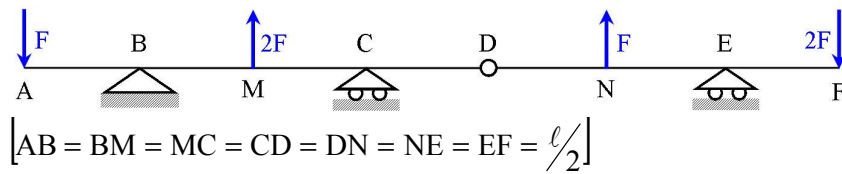
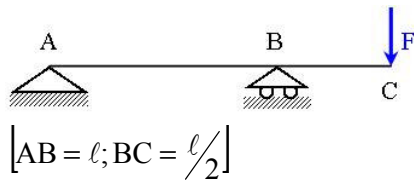
Applicando il PLV si ha:

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow -F(-\ell \operatorname{tg} \alpha) + R_H^y(-2\ell \operatorname{tg} \alpha) = 0 \Leftrightarrow R_H^y = \frac{F}{2}$$

■

ESERCIZI PROPOSTI

Assegnate le seguenti travature:



calcolare le reazioni vincolari esterne con il Principio dei Lavori Virtuali.