Appendice 2. Norme di vettori e matrici

La nozione essenziale per poter definire il concetto di “distanza” e “lunghezza” in uno spazio vettoriale lineare è quello di norma. Il concetto di norma è una generalizzazione del concetto di lunghezza di un vettore $\mathbf{x} \in R^3$ ($\mathbf{x} = |x_1, x_2, x_3|^{\mathrm{T}}$) definita come $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

A2.1 Norma di un vettore

La norma di un vettore $\mathbf{x} \in R^n$ è un’applicazione $\|\cdot\|$ tale che ad ogni elemento di R^n associa un numero reale e verifica le seguenti condizioni:

1. $\|\mathbf{x}\| > 0$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;
3. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ per ogni numero reale α .

La norma di un vettore diverso da zero è positiva. La norma della somma di due vettori non supera la somma delle norme dei singoli termini (*disuguaglianza triangolare*). Scalando un vettore per α la norma del vettore scala di $|\alpha|$.

Esistono tanti tipi di norma per vettori. Qui richiameremo la *norma di Hölder* o $p-$*norma*. La $p-$norma è definita come

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad p \ge 1 . \tag{2.1}$$

In particolare, abbiamo le seguenti norme [A2.1],

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ (norma del modulo)}, \tag{2.2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ (norma euclidea)}, \tag{2.3}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \text{ (norma del massimo)}. \tag{2.4}$$

Per $p = 2$ abbiamo la ben nota *norma euclidea*, per $p = 1$ la *norma del modulo* e per $p = \infty$ la *norma del massimo*. Queste sono le norme più importanti. Il comando MATLAB "NORM(x,p)" calcola $\|\mathbf{x}\|_p$; il comando "NORM(x)" calcola $\|\mathbf{x}\|_2$.

Una proprietà generale delle $p-$norme è la disuguaglianza di Hölder [A2.1]

$$|\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \tag{2.5}$$

dove gli interi p e q verificano la relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2.6}$$

Un caso molto importante è quello della disuguaglianza di *Cauchy-Schwartz* ($p = 2$, $q = 2$)

$$|\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 . \tag{2.7}$$

Tulle $p-$norme sono equivalenti, cioè se $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ sono due norme in R^n, esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che [A2.1]

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_\alpha \le \|\mathbf{x}\|_\beta \le c_2 \|\mathbf{x}\|_\alpha \tag{2.8}$$

per ogni $\mathbf{x} \in R^n$. Nei casi delle norme di uso più comune si ha [A2.1]

$$\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 , \tag{2.9}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty , \tag{2.10}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty . \tag{2.11}$$

La norma euclidea è invariante rispetto alle trasformazioni ortogonali, per le quali $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q} = \mathrm{I}$ (Q è una matrice unitaria)

$$\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = (Q\mathbf{x})^{\mathrm{T}} Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2 . \tag{2.12}$$

Le $p-$norme non sono le uniche norme in R^n, ne esistono di altri tipi. Ad esempio, se A è definita positiva (**Appendice 2**), si può definire una norma di vettore ponendo

$$\|\mathbf{x}\|_A = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}} . \tag{2.13}$$

Lasciamo al lettore la verifica che $\|\mathbf{x}\|_A$ verifica le condizioni 1., 2. e 3. che definiscono la norma di un vettore. Se A è anche simmetrica la norma $\|\mathbf{x}\|_A$ è equivalente a una $p-$norma. Infatti, si ha

$$\lambda_{\min}(A)\|\mathbf{x}\|_2^2 \le \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} \le \lambda_{\max}(A)\|\mathbf{x}\|_2^2 , \tag{2.14}$$

dove $\lambda_{\min}(A)$ e $\lambda_{\max}(A)$ sono, rispettivamente, l'autovalore più piccolo e l'autovalore più grande della matrice A (essendo, per ipotesi, A definita positiva gli autovalori sono tutti maggiori di zero). Lasciamo al lettore la dimostrazione.

In Figura A2.1 le "sfere" di raggio unitario S_p secondo diverse norme $\|\cdot\|_p$ e S_A secondo la norma $\|\cdot\|_A$ sono rappresentate nel piano ($n = 2$).

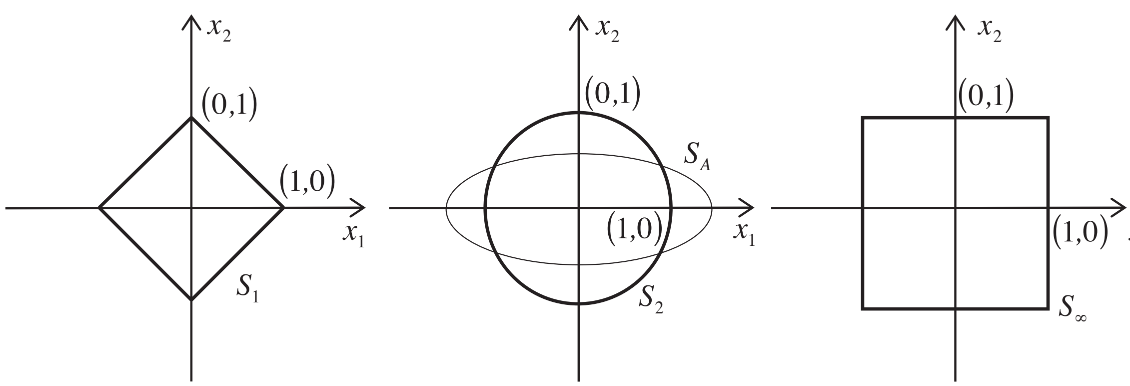

Figura A2.1 "Sfere" unitarie nel piano secondo diverse norme $\|\cdot\|_p$ *(* $p = 1,2,\infty$ *e la norma* $\|\cdot\|_A$.

Lo spazio R^n insieme a una norma $\|\cdot\|$ costituisce uno *spazio metrico*, cioè uno spazio in cui ritroviamo in concetti familiari dello spazio R^1 (la retta): intorno di un punto, intervallo aperto, convergenza e continuità. Le "sfere" S_p e S_A di Figura A2.1 delimitano un intorno di raggio unitario del punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Infine, abbiamo il concetto di *uniforme continuità*: per ogni ε positivo esiste un δ positivo tale che se per le singole componenti del vettore differenza di due vettori $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ si ha

$$\max_i |x_i - y_i| \le \delta \tag{2.15}$$

allora si ha $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le \varepsilon$. Pertanto se due vettori sono vicini, in quanto le singole componenti sono vicine, allora anche le due norme sono vicine e viceversa.

Supponiamo che $\tilde{\mathbf{x}}$ sia una approssimazione di $\mathbf{x}$. Per una assegnata norma $\|\cdot\|$ diciamo che

$$\varepsilon_a \equiv \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \tag{2.16}$$

è l'*errore assoluto* e

$$\varepsilon_r \equiv \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \tag{2.17}$$

è l'*errore relativo*. In particolare, se [A2.1]

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \approx 10^{-p} \tag{2.18}$$

allora la componente in valore assoluto più grande di $\tilde{\mathbf{x}}$ avrà circa p cifre significative.

A2.2 Norma di una matrice

Si consideri una matrice $\mathrm{A} : R^n \to R^n$. La matrice opera sui vettori di R^n e dà come risultato altri vettori di R^n,

$$\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}. \tag{2.19}$$

Si consideri la norma $\|\cdot\|$ dei due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathrm{A}\mathbf{x}$. Il loro rapporto

$$\frac{\|\mathrm{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \tag{2.20}$$

varia al variare di $\mathbf{x}$ in R^n. Si definisce la *norma naturale* della matrice A (o norma *indotta* dal vettore $\mathbf{x}$) il massimo del rapporto (2.20) al variare di $\mathbf{x}$ in R^n e la si indica con $\|\mathrm{A}\|$,

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in R^n} \frac{\|\mathrm{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \tag{2.21}$$

In altre parole, $\|\mathrm{A}\|$ è il massimo fattore di "allungamento" o "contrazione" che si ottiene applicando A a un generico vettore $\mathbf{x} \in R^n$; se $\|\mathrm{A}\| < 1$ tutti i vettori sono "accorciati" nella trasformazione (2.19), invece se $\|\mathrm{A}\| > 1$ alcuni vettori sono "allungati".

A causa della proprietà 3. della norma di vettore la (2.21) dà

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in R^n \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \|\mathrm{A}\mathbf{x}\|. \tag{2.22}$$

E' immediato verificare che $\|\mathrm{A}\|$ definita secondo la (2.22) verifica le stesse condizioni che definiscono la norma di vettore:

i) $\|\mathrm{A}\| > 0$ e $\|\mathrm{A}\| = 0$ se e solo se $\mathrm{A} = 0$;
ii) $\|\mathrm{A+B}\| \le \|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{B}\|$;
iii) $\|\alpha\mathrm{A}\| = |\alpha|\|\mathrm{A}\|$.

La norma di matrice naturale non è l'unica norma possibile, ne esistono altre come, ad esempio, la norma di Frobenius, vedi [A2.1]-[A2.4]. In questo Corso useremo solo norme naturali.

A partire dalla definizione di norma di matrice naturale e dalle proprietà *i)*-*iii)* si dimostrano le seguenti proprietà [A2.1]

$$\|\mathrm{AB}\| \le \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|, \tag{2.23}$$

$$\|\mathrm{A}\mathbf{x}\| \le \|\mathrm{A}\|\|\mathbf{x}\|, \tag{2.24}$$

$$\|\mathrm{I}\| = 1 \text{ (I matrice identità)}, \tag{2.25}$$

$$\left\|\mathrm{A}^k\right\| \le \|\mathrm{A}\|^k, \tag{2.26}$$

$$\left\|\mathrm{A}^{-1}\right\| \ge \frac{1}{\|\mathrm{A}\|} \text{ (A non singolare)}, \tag{2.27}$$

$$\rho(\mathrm{A}) \le \|\mathrm{A}\|, \tag{2.28}$$

$$\left\|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|\mathrm{A}\|} \tag{2.29}$$

dove $\rho(\mathrm{A})$ è il raggio spettrale della matrice A, che per definizione è l'autovalore di B in modulo più grande,

$$\rho(\mathrm{A}) = \max_k |\lambda_k(\mathrm{A})|. \tag{2.30}$$

Tra le norme naturali più utilizzate ricordiamo quelle indotte dalle $p-$norme con $p = 1,2,\infty$. Si dimostra che

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \text{ norma del modulo;} \tag{2.31}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)} \text{ norma spettrale o di Hilbert;} \tag{2.32}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ norma del massimo.} \tag{2.33}$$

Con $\|A\|_p$ indichiamo la norma di matrice naturale indotta dalla $p-$norma di vettore. Nella norma del modulo (2.31) la somma è eseguita sull'indice di riga, mentre nella norma del massimo (2.33) la somma è eseguita sull'indice di colonna. Inoltre, si hanno le seguenti proprietà notevoli:

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}\ , \tag{2.34}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1 , \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty . \tag{2.36}$$

Per ogni matrice (quadrata) A e ogni $\varepsilon > 0$ <u>esiste una norma naturale</u> $\|A\|_\alpha$ tale che [A2.1], [A2.2],

$$\rho(A) \le \|A\|_\alpha \le \rho(A) + \varepsilon . \tag{2.37}$$

Come per la norma di vettore, anche per la norma di matrici valgono le proprietà di equivalenza e uniforme continuità. Come per la norma di vettore, la norma di Hilbert è invariante rispetto alle trasformazioni ortogonali, per le quali $Q^T Q = I$,

$$\|Q^T A Q\|_2 = \|Q A Q^T\|_2 = \|A\|_2 . \tag{2.38}$$

Una notevole proprietà della norma di Hilbert è

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A) \tag{2.39}$$

dove $\sigma_{\max}(A)$ è il valore singolare più grande della matrice A (vedi **Appendice 2**) e

$$\|A^{-1}\|_2 = \sigma_{\min}(A) \tag{2.40}$$

dove $\sigma_{\min}(A)$ è il valore singolare più piccolo della matrice A. Se la matrice A è simmetrica si ha

$$\|A\|_2 = \rho(A). \tag{2.41}$$

Infatti, il valore singolare più grande di una matrice simmetrica è uguale all'autovalore della matrice in modulo più grande (vedi **Appendice 2**).

Esempio A2.1

Si consideri la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}. \tag{2.42}$$

In Figura A2.2 è illustrato qualitativamente come questa matrice deforma la "sfera" di raggio unitario

$$\|\mathbf{x}\| = 1 \tag{2.43}$$

secondo diverse norme e viene messo in evidenza il significato geometrico della norma naturale di matrice.

Referenze

[A2.1] V. Comincioli, Analisi numerica: metodi ed applicazioni, McGraw-Hill, Milano 1990.
[A2.2] G. H. Golub, C.F. van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, Baltimore 1983.
[A2.3] J.M. Ortega, W. C. Rheinboldt, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York, 1969.
[A2.4] F. Trevisan, F. Villone, Modelli numerici per campi e circuiti, SGE Editoriali, Padova 2003.

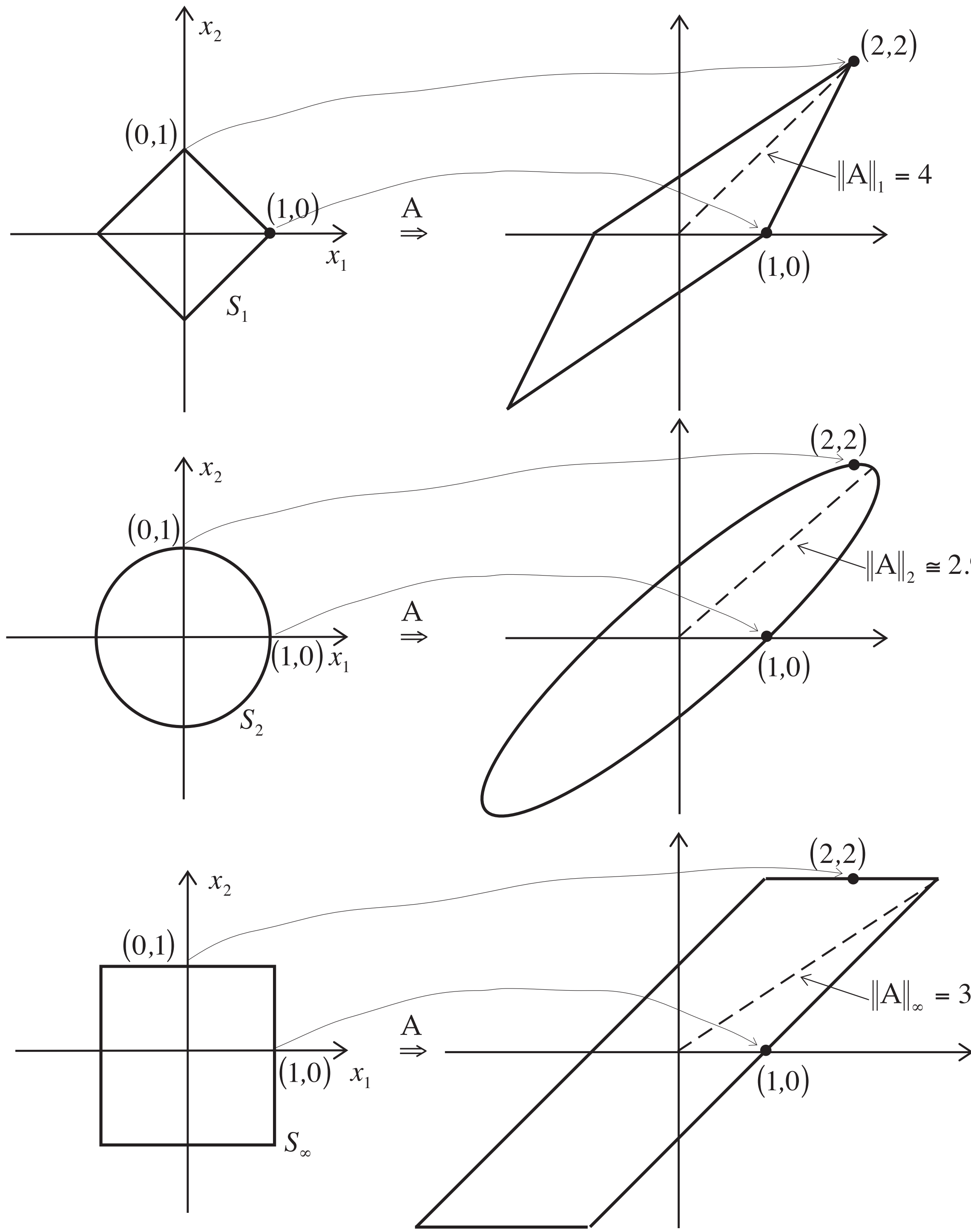

Figura A2.2 Deformazione della "sfera" di raggio unitario (nel piano) indotta dalla matrice A *dell'esempio A2.1 secondo diverse norme naturali di matrice.*