Teoria del consumatore

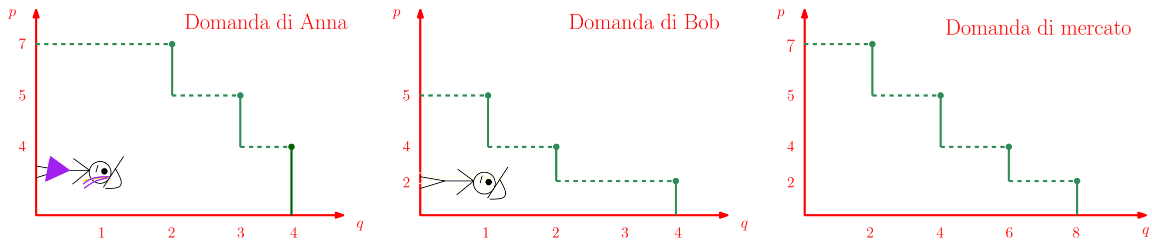
L. Balletta S. Modica 2018

Indice

1 Come arriva Anna alla sua funzione di domanda?

Ti ricordi Anna e Bob della figura 1.1 qui sotto? Parleremo ancora di loro e della loro domanda. In particolare, dobbiamo verificare se effettivamente la domanda è decrescente. Vedremo che questo è "normalmente" vero, ma che ci possono essere eccezioni. Li abbiamo lasciati al mercato delle arance, c'era il banditore che faceva scendere il prezzo, a $p = 7$ Anna si impegnava a comprare due unità, poi a $p = 5$ Bob ne chiedeva altre due, eccetera. Che conti facevano per arrivare a queste scelte?

Figura 1.1: La quantità domandata sul mercato è somma di quantità individuali



Salutiamo Bob e restiamo con Anna. Sopra $p = 7$ resta zitta e a sette chiede 2. Perché? Okay: gusti e budget. Ma vediamo più nel dettaglio. Evidentemente sopra sette preferisce comprare mandarini, o preferisce conservarsi i soldi per posate che le mancano, o comprare una maglietta, o chissà cos'altro. La verità è che noi l'abbiamo vista all'asta del mercato delle arance, ma lei contemporaneamente era alle aste di un sacco di altri mercati! In effetti, *Anna è nei mercati di tutti i beni che le interessano.* Deve considerare tutto insieme per decidere su ogni particolare - da questo non si scappa. Ingrandiamo allora sul problemone di Anna e guardiamo più da vicino. Assumeremo che Anna sia in un mercato competitivo. Questo come sappiamo vuol dire che non può influenzare il prezzo. In questo contesto lo reinterpretiamo nel senso che *non può influenzare nessun prezzo*. Ha di fronte offerta perfettamente elastica per ogni bene. Quindi considera i prezzi come dati esogenamente.

Anna *deve scegliere fra panieri di beni*: tante arance, tanta benzina... Supponendo vi siano n beni possiamo allora rappresentare un paniere come un punto/vettore $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$: x_1 unità del primo bene, x_2 unità del secondo e così via. E guarda ai prezzi. Anche loro sono punti $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$: il primo bene ha prezzo p_1 eccetera. E al suo reddito $m > 0$.[1]

1.1 La funzione di utilità

Prima di tutto le sue preferenze: Anna *è definita* dalle sue preferenze. È caratterizzata dal fatto che preferisce un paniere x a un altro certo $y = (y_1, \dots, y_n)$ che magari invece a Bob piace di più. Come rappresentiamo le preferenze di Anna su tutte le possibili coppie di panieri x ed y? Molto semplicemente con una funzione di utilità $u\colon x \mapsto u(x)$.[2] Anna preferisce x ad

[1] vedi *Geometria della tangenza* (d'ora in poi *GdT*) per $\mathbb{R}^n_+$, funzioni di più variabili, derivate parziali, tangenza eccetera.

[2] Quando (se...) studierai le preferenze in modo più approfondito vedrai che la rappresentazione "primitiva" è una relazione binaria $\succeq$ che si interpreta leggendo $x \succeq y$ come "x è preferito ad y". Questa deve avere delle proprietà per poter essere rappresentata da una funzione di utilità. Per farti un'idea, deve essere transitiva: $x \succeq y$ & $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$. Questa è naturale, ma se non è soddisfatta se ci pensi non esiste u che la rappresenta - perché $u(x) \geq u(y)$ & $u(y) \geq u(z) \Rightarrow u(x) \geq u(z)$.

y se $u(x) > u(y)$. Sulla funzione di utilità *assumeremo* fondamentalmente due cose (oltre alla derivabilità quante volte si vuole):

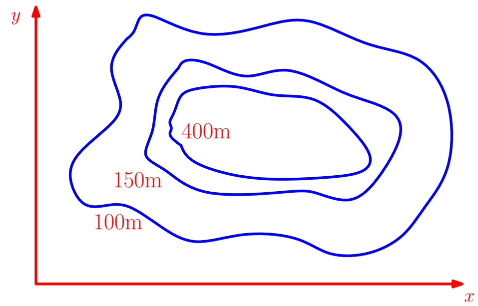
- (A1) La prima è che è crescente in ogni argomento; questo vuol dire che ognuno dei beni di cui si parla è gradito: se ne ho di più sto meglio. Formalmente: per ogni x, i ed $h > 0$ risulta $u(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) > u(x)$. Per inciso, per questo è sufficiente che $\partial u/\partial x_i \equiv u_i > 0$ (Lagrange), che assumeremo pure.

- (A2) La seconda è che per ogni coppia di beni i, j se x_i sale ed x_j scende - consumo di più di i e meno di j - l'utilità marginale di i scende relativamente a quella di j, cioè u_i/u_j scende. Intuitivamente, se ho un sacco di vino e poco pane per un bicchiere di vino in più non darei via una briciola, mentre se ho un sacco di pane e niente vino per un bicchierino darei via un bel po' di pane. Su questo saremo più precisi nella sezione 2.3.1.

Osservazione importante: il ruolo della funzione di utilità è quello di rappresentare le preferenze del soggetto che caratterizza; quindi se u rappresenta certi gusti altrettanto fa per esempio $10u$ - perché $10u(x) < 10u(y) \iff u(x) > u(y)$. Più in generale qualunque trasformazione monotona di u funziona uguale, cioè se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente $g(u(x))$ rappresenta le stesse preferenze di u.

Che aspetto ha una funzione di n variabili? Per n generale ovviamente non lo possiamo sapere perché il suo grafico sta nello spazio ad $n + 1$ dimensioni (come il grafico delle funzioni di una variabile sta in $\mathbb{R}^2$). Il massimo che possiamo visualizzare è $\mathbb{R}^3$, dove stanno grafici di funzioni di due variabili.

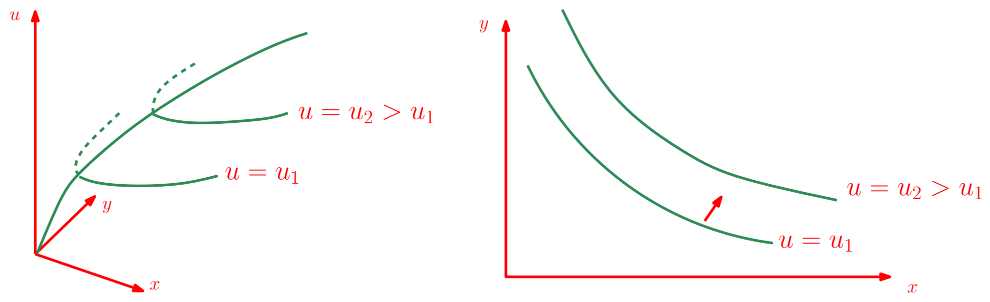
Visualizzare questi grafici è fondamentale. Esempi sono il tetto dell'aula, una zuppiera, la superficie di una montagna, una lastra di vetro, eccetera. Prendi per esempio la montagna. Ti serve capire com'è perché ci vuoi andare a fare trekking. Che fai, ti compri un plastico in 3D e te lo metti nello zaino? No. Ti compri una cartina in 2D e *capisci tutto dalla mappa dalle curve di livello.* Nel caso di una montagna saranno curve chiuse come nella figura qui sotto, dove vediamo che la montagna sale dolcemente dai 100 ai 150 (le due curve sono lontane) e poi molto più ripida dai 150 ai 400 (curve vicine). Nota che per semplificare la lettura nel caso di due variabili invece di usare x_1, x_2 possiamo usare x ed y così non ci portiamo dietro sottoscritti.[3]



Due variabili per Anna significa che nel suo mondo ci sono soltanto due beni, le cui quantità stiamo indicando con x ed y. Il caso dell'utilità $u(x, y)$ è diverso dalla montagna in un aspetto cruciale: man mano che ci si allontana dall'origine la u diventa sempre più alta, perché aumentano le quantità dei beni e Anna è più contenta. Il suo grafico è come una montagna che continua sempre a salire. Vedi figura 1.2 parte sinistra. *Quindi le curve di livello più lontane dall'origine corrisponderanno a livelli di u più alti.*

[3]Di fatto useremo x ed y anche per indicare il nome dei beni. Pazienza.

Figura 1.2: La funzione u e la sua mappa di indifferenza



Che forma hanno queste curve di livello? Facciamo prima mente locale su cosa rappresentano. Intanto sono insiemi di punti (ovvero panieri di beni); una curva di livello al livello $u \in \mathbb{R}$ è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) = u\}$.[4] Dunque per definizione i panieri su una curva di livello di u danno tutti la stessa utilità; cioè, *il consumatore u è indifferente fra i panieri su una curva di livello.* Non sarai quindi sorpreso di sapere che si chiamano "curve di indifferenza". Andiamo alla loro forma. Dall'assunzione di monotonia di u segue che le curve di indifferenza devono essere *decrescenti*, come nella parte destra della figura. Questo lo possiamo dimostrare in un rigo: prendi sulla curva di livello u due punti $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ e supponi che $x' > x$; se fosse $y' \geq y$ avremmo $u(x', y') \geq u(x', y) > u(x, y)$; quindi poiché $u(x', y') = u(x, y)$ deve essere $y' < y$. Fine. Vedremo fra un po' l'altra assunzione su u - quella su u_i/u_j - implica che le curve di indifferenza sono *convesse* (come nella figura).

1.2 Prezzi, valore e vincolo di bilancio

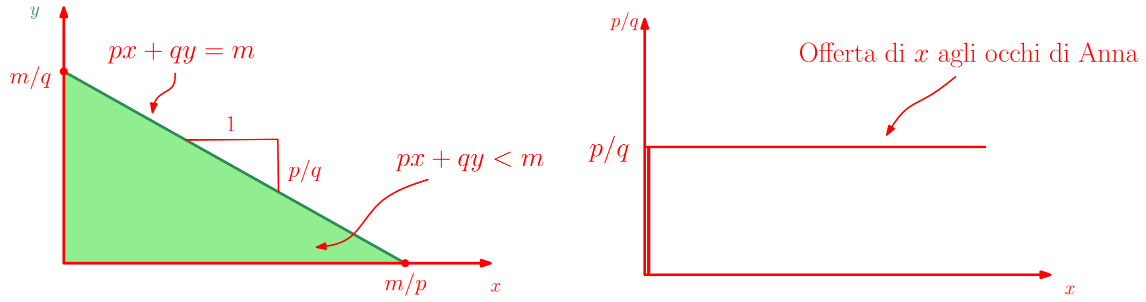
L'altro piccolo particolare al quale Anna deve prestare attenzione quando decide come comportarsi è il reddito di cui dispone. Più di tanto non può spendere. Quanto vale il paniere x a prezzi p? x_1 unità del bene 1 valgono p_1x_1, x_2 unità del bene 1 valgono p_2x_2, eccetera. Quindi x vale $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i \equiv px$ (nota l'abbreviazione). Qual è dunque il vincolo di bilancio? Il reddito è m, quindi *il vincolo è $px \leq m$.* Più formalmente il vincolo è un altro insieme di panieri: $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : px \leq m\}$.

Visualizziamo il caso di due variabili. Le quantità sono $x, y \geq 0$, e i prezzi li chiameremo p e q. Quindi il vincolo di bilancio è $px + qy \leq m$. Vedi figura 1.3 a sinistra. È composto dalla *retta* $px + qy = m$, che ha pendenza (in valore assoluto) p/q, e dalla parte sotto la retta ma sempre nel primo quadrante $px + qy < m$ colorata in verdino nella figura.

Che la pendenza del vincolo è (in valore assoluto) p/q vuol dire, vedi figura, che Anna può comprare una unità di x pagando p/q unità di y (ricorda che ci sono solo due beni nel mondo per ora quindi se vuoi comprare x devi pagare con y) e così facendo quanto spende in totale resta m. Cioè: *p/q è il prezzo di mercato di x in termini di y.* Può comprare due unità di x pagando $2(p/q)$ unità di y, eccetera; i panieri che valgono m - quelli con $px+qy = m$ - sono tutti ammissibili, a prezzo p/q Anna può comprare qualunque quantità di x sul vincolo di bilancio. Ma questo vuol dire che la curva di offerta che ha di fronte è perfettamente elastica - come in figura, parte destra. Nota che a prezzo inferiore a quello di mercato l'offerta è zero: Anna non

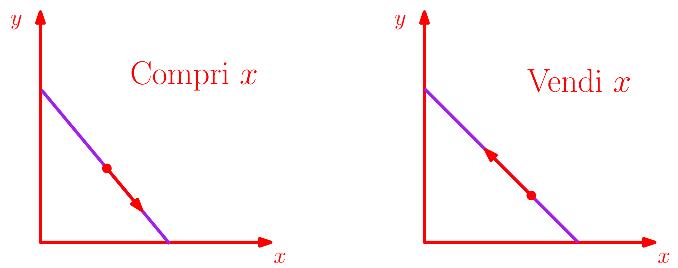
[4] Lo stesso discorso vale in $\mathbb{R}^n$: una curva di livello è un insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = u\}$.

Figura 1.3: Vincolo di bilancio lineare = Concorrenza perfetta (lato domanda)



potrebbe comprare a prezzo inferiore perché ci sarebbe un'altra Anna pronta a pagare il prezzo di mercato. *La conclusione che è che la linearità del vincolo di bilancio equivale all'assunzione che c'è concorrenza dal lato dei compratori.* Spostandoti lungo il vincolo compri o vendi x in cambio di y ai prezzi di mercato e questi non cambiano con le quantità di x o y scambiate, come nella figura qui sotto.

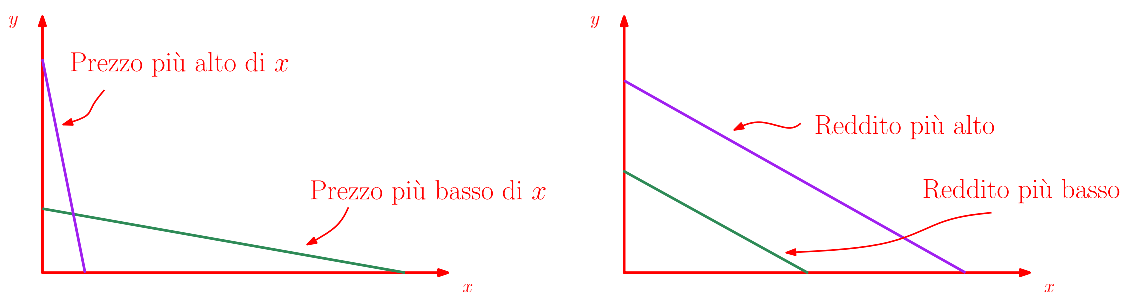
Figura 1.4: Spostamenti lungo il vincolo di bilancio



Nota a questo punto i due punti di angolo nel pannello sinistro della figura 1.3: se compri solo x ne puoi comprare al massimo m/p unità; se compri solo y ne puoi comprare m/q. Tieni presente infatti che se un bene costa p con una spesa di 1 ne compri $1/p$ unità - per esempio se un chilo di ciliegie costa 4 Euro con 1 Euro ne compri $1/4$ di chilo - quindi con una spesa di m ne compri $m \cdot (1/p)$ unità.

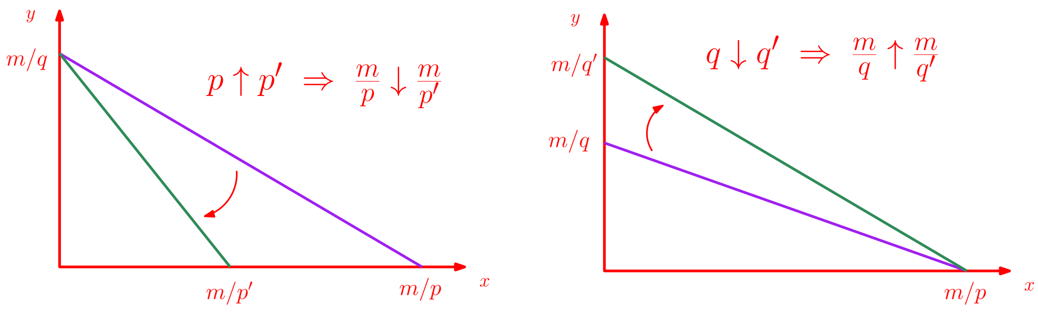
La posizione del vincolo dipende da m e p/q. La pendenza misura il valore di x, quindi vincolo ripido vuol dire prezzo di x alto (sempre relativamente ad y, perché se ti metti sull'asse verticale vedi il valore di y). Vedi figura 1.5 sinistra. Variazioni di m, che lasciano la pendenza invariata, generano traslazioni parallele del vincolo, con valori più alti di m corrispondenti a vincoli più lontani dall'origine; vedi parte destra della figura.

Figura 1.5: Posizione del vincolo



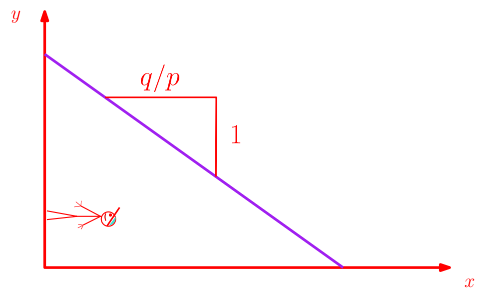
Quando si muove un solo prezzo il vincolo ruota intorno al punto in cui la quantità del bene corrispondente è zero. Per esempio se cambia p la massima quantità di y che ti puoi comprare resta m/q. La figura qui sotto illustra a sinistra il caso $p \uparrow p'$ e a destra il caso $q \downarrow q'$. Ovviamente nel primo caso il vincolo si contrae, nel secondo si espande.

Figura 1.6: Variazioni di un prezzo



Osservazione (Il prezzo di y). Se ti metti sull'asse y vedi una retta di pendenza q/p che è il prezzo di y in termini di x, vedi la figura 1.7. Il discorso dovrebbe essere chiaro: se con un'unità di x compri 3 unità di y, cioè $p/q = 3$, con un'unità di y compri $1/3$ di unità di x, cioè $q/p = 1/3$.

Figura 1.7: Prezzo di y



Esempio. Un esempio con i numeri può essere utile. Supponi che Anna ha 25 euro che spende interamente per comprare 5 chili di ciliegie (prezzo al chilo 3 euro) e 5 chili di mele (prezzo al chilo 2 euro). Se Anna vuole comprare un chilo in più di ciliegie, a quanti chili di mele deve rinunciare (cioè, quanti chili ne deve vendere) se vuole continuare a spendere 25 euro in totale? Risposta: il prezzo delle ciliegie in termini di mele è $3/2$ quindi un chilo e mezzo. Verifica: se in effetti Anna compra $5+1 = 6$ chili di ciliegie e $5-1.5 = 3.5$ chili di mele spende $6\cdot3+3.5\cdot2 = 25$ euro.

Il contesto normativo

Osservazione banale ma cruciale: perché il consumatore deve rispettare il vincolo di bilancio? La risposta è semplice: non rispettarlo vorrebbe dire rubare, e stiamo assumendo che se ruba viene condannato a una pena che non è disposto a subire. Dunque i mercati che studiamo operano entro un contesto in cui ci sono norme e istituzioni che le fanno rispettare. Per inciso, scrivere norme e farle rispettare costa, e questo è uno dei motivi per i quali esistono le tasse. Ovviamente esistono anche i ladri (e non solo ladri di mele), che non rispettano i vincoli di bilancio perché sono disposti a rischiare le relative condanne, ma studiare il loro problema di scelta sarebbe anche interessante ma più complicato, e noi non lo faremo.

Per inciso: stiamo parlando di un'economia di baratto

In che unità di misura è espresso il reddito m? Abbiamo parlato di Euro, e continueremo a farlo per comodità, ma nell'economia in cui vivono i consumatori di cui stiamo parlando non c'è moneta - è una economia di baratto. Ci sono solo gli n beni di cui sopra, e un'unità di conto appropriata potrebbe per esempio essere il bene 1; in tal caso $p_1 = 1$ e tutti gli altri prezzi sarebbero espressi in termini del bene 1. Ovviamente se moltiplichiamo tutti i prezzi e il reddito per una costante il vincolo di bilancio no cambia, quindi le unità di conto che usiamo sono solo... unità di conto. Come abbiamo già visto quello che puoi fare dipende dai prezzi *relativi*, per esempio nel caso di due beni p/q.

Suppongo ti stia chiedendo: ma uno dei beni non può essere l'Euro? La risposta è *no*. Per capire perché prendi il caso di due beni e immagina che uno sia Mele e l'altro Euro. Supponi di non avere euro ma solo mele; quante ne daresti in cambio di un Euro? Se ci pensi, la risposta è esattamente *zero*. Altrimenti ti ritroveresti con meno mele da mangiare e un mucchio di pezzi di carta. E cosa te ne fai di questi pezzi di carta? Ci compri altri beni? No, ci sono solo mele. Se ci ripensi e torni da quello che te li ha dati in cambio delle mele ti risponde stai fresco! Il punto è delicato, ma se ci pensi è ovvio. La moneta non ha utilità in se, la tieni perché sai che la potrai usare in futuro per comprare altri beni, e pensi che sarà accettata perché chi la accetta a sua volta penserà che la potrà usare, e così via all'infinito. Esattamente, *all'infinito*: per giustificare la presenza della moneta nell'economia dobbiamo avere un modello di un'economia con *infiniti* periodi (che è ovviamente al di là di quello che possiamo fare qui). Perché se il mondo finisse al tempo T nessuno ovviamente vorrebbe moneta a T; ma allora nessuno ne vorrebbe a $T - 1$ perché ci resterebbe fregato il periodo successivo; ma allora neanche a $T - 2$... e neanche oggi. Continueremo dunque a studiare una semplice economia di baratto.

1.3 Il problema di scelta

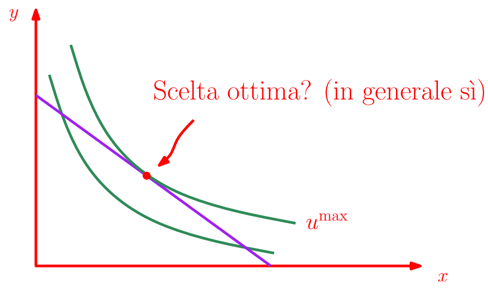
È il "problemone" di cui parlavamo. Anna deve scegliere contemporaneamente le sue domande di tutti i beni in funzione di tutti i prezzi (e del suo reddito). Obiettivo? Raggiungere la maggior soddisfazione/utilità possibile nel rispetto del vincolo di bilancio. Quindi formalmente il problema è: massimizza $u(x)$ scegliendo $x \in \mathbb{R}^n_+$ tale che $px \leq m$. *La soluzione del problema* dipende da p e da m, che sono i parametri che definiscono il contesto in cui il consumatore sceglie, e la indicheremo perciò con $x(p, m)$. Questa è la base delle alzate di mano di Anna alle varie aste: dato m, per ogni p Anna comunica la sua scelta $x(p, m)$. Come si risolve il problema dobbiamo impararlo, vedremo che è meno complesso di quanto possa sembrare.

Intanto osserviamo che la monotonia di u implica che la soluzione sta *sul* vincolo: non può essere che un x con $px < m$ sia scelta ottima, perché per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo il paniere x' con $x'_i = x_i + \epsilon$ sta ancora nel vincolo - cioè $px' \leq m$ - e d'altra parte essendo un paniere più ricco di x avremo $u(x') > u(x)$. Ciò contraddice l'ottimalità di x. Possiamo allora concentrarci a cercare la soluzione sul vincolo, cioè in effetti *il problema è il seguente:*

$$\text{massimizza } u(x) \text{ sull'insieme } \{x \in \mathbb{R}^n_+ : px = m\} \tag{PC}$$

La soluzione è $x(p, m)$. Tornando invece al caso di due variabili, riguardiamo le figure 1.2 e 1.3: vogliamo stare su curve di indifferenza più alte possibili (direzione alto-destra per salire) ma dobbiamo restare dentro il vincolo. Sembra proprio che la curva più alta debba essere tangente al vincolo, come nella figura 1.8. Come vedremo, così è "tipicamente".

Figura 1.8: Curva e vincolo tangenti



2 La scelta con due beni

Studieremo nel dettaglio la scelta con due beni perché visualizzando è tutto più facile, e tutto sommato i principi fondamentali emergono già in questo caso particolare. Procederemo senza badare troppo ai dettagli formali, poi quando nella sezione 5 metteremo nero su bianco dimostreremo quasi tutto quello che c'è da dimostrare direttamente per il caso generale.

2.1 Utilità lineare: valore soggettivo e valore di mercato

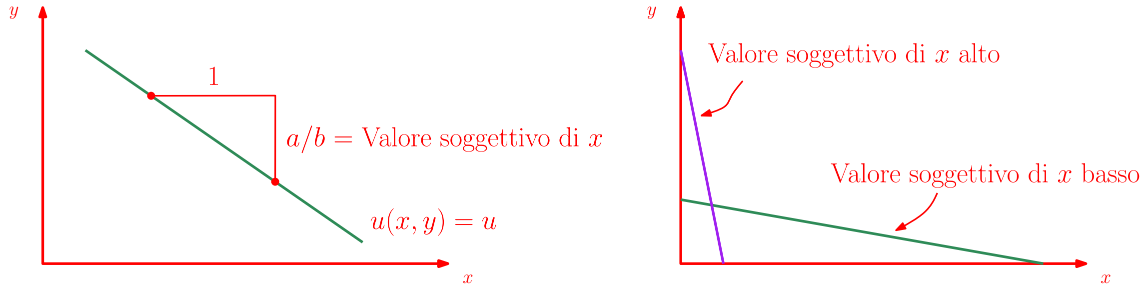
Per due beni useremo come prima (x, y) e (p, q) per quantità e prezzi. Cominciamo dal caso di $u(x, y) = ax + by$. Le curve di indifferenza sono del tipo $ax + by = u$ con $u \in \mathbb{R}$, quindi sono rette con pendenza a/b (in valore assoluto). Nota che avendo assunto che tali curve sono convesse il presente è un caso limite: dell'infinità di curve convesse che esistono solo una è retta, quindi il caso è tutt'altro che tipico. Tuttavia è fondamentale perché tutte le curve localmente sono rette (come l'orizzonte dalla spiaggia che è curvo ma lo vedi retto); il suo studio sarà istruttivo.

Tornando alla pendenza delle curve di indifferenza, vedi figura 2.1: se x aumenta di 1, lungo la curva y scende di a/b. Cioè: per avere una unità in più di x sei disposto a pagare a/b unità di y. In altre parole *la pendenza a/b della curva di indifferenza è il valore soggettivo di x,* il valore che x ha nelle tue preferenze. Più ripida è la curva di indifferenza più alto è il valore che dai ad x. Nota che $a/b = u_x/u_y$, quindi la pendenza delle curve di indifferenza (in valore assoluto) è u_x/u_y. [5] Come vedremo lo stesso vale per le u non lineari.

Il problema di scelta è rappresentato nella figura 2.2. La soluzione è chiara dal punto di vista geometrico: vuoi raggiungere la curva di indifferenza più alta, quindi nel caso raffigurato a

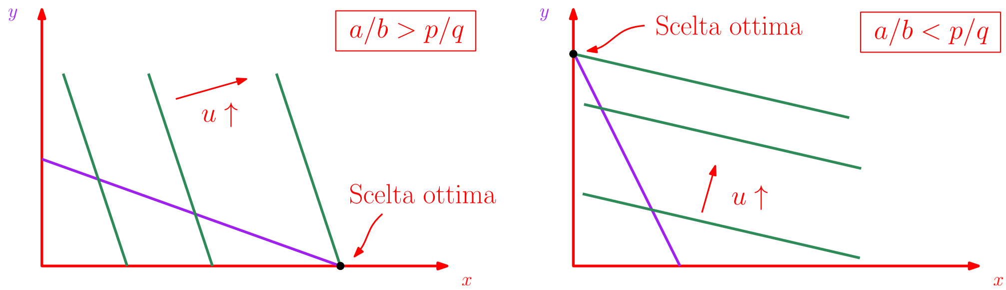
[5] Per essere precisi osserviamo anche che in questo caso u_x/u_y è costante quindi scende solo debolmente (nel senso di $\geq$) lungo una curva di indifferenza.

Figura 2.1: Valore soggettivo di x



sinistra compri x finché puoi; nel caso raffigurato a destra vendi x finché puoi. Più interessante per noi, *la soluzione è chiara dal punto di vista economico:* nel caso a sinistra il valore che ad x dai tu è più alto del valore che gli dà il mercato - cioè che gli danno gli altri - che come sappiamo è rappresentato dalla pendenza del vincolo di bilancio, quindi *compri* x; nel caso di destra il valore di mercato di x è maggiore del valore che ha per te, quindi *vendi*.

Figura 2.2: Scelta con utilità lineare

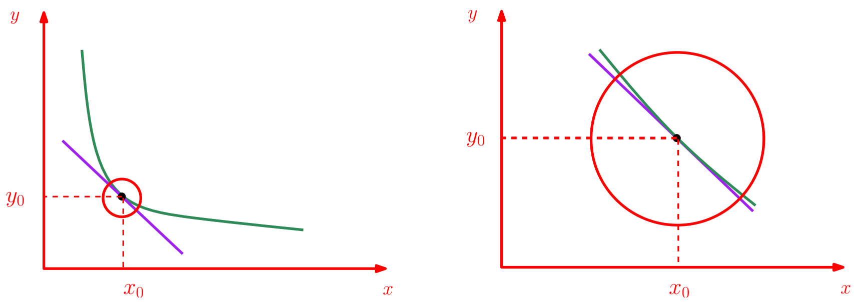


Cosa farà Anna alle aste di x ed y se le sue preferenze sono lineari? Deve rispondere a ogni coppia di prezzi (p, q), e in questo caso la scelta è quella raffigurata nella figura 2.2: se $p/q < a/b$ allora sottoscrive $x = m/p, y = 0$; se $p/q > a/b$ dirà $x = 0, y = m/p$; se infine $p/q = a/b$ sarà indifferente fra ogni allocazione di m fra i due beni.

2.2 Utilità non lineare e valore soggettivo locale

Che succede se le curve di indifferenza di u non sono lineari, come nella figura 1.2? La risposta è che *tutto quello che abbiamo detto finora vale localmente.* Il punto è che qualunque curva, ingrandita abbastanza in un intorno di un punto, è approssimativamente una retta. La figura 2.3 dà l'idea.

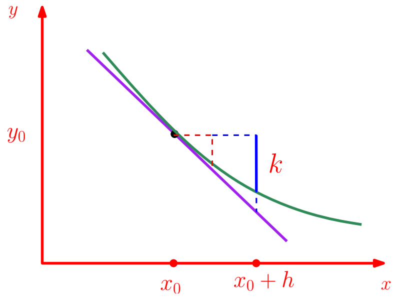
Figura 2.3: Tangenza e approssimazione



2.2.1 Il valore soggettivo locale

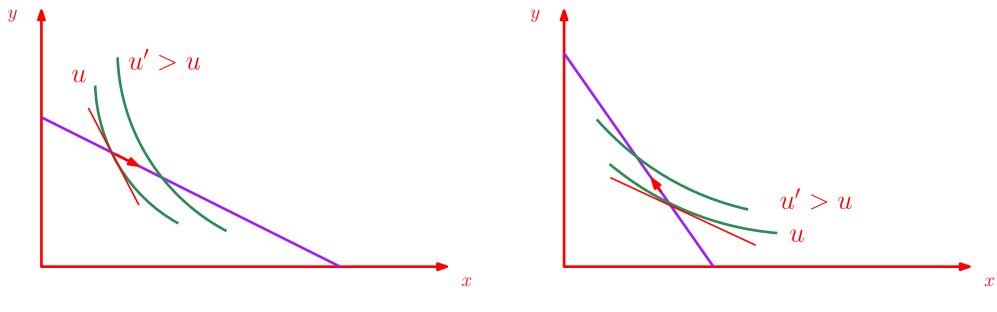
In particolare *la pendenza di una curva di indifferenza in un punto darà il valore soggettivo locale di x,* locale nel senso di valido approssimativamente per piccole variazioni a partire dal punto; vedi figura 2.4. Nota le due restrizioni:

Figura 2.4: Approssimazione e valore locale



primo parliamo di *piccole variazioni*, perché se ci si allontana significativamente dal punto la pendenza della tangente non ha niente a che fare con la variazione lungo la curva (che è quella che misura il valore soggettivo); nella figura il valore di h unità aggiuntive di x è k - la variazione lungo la curva - che in generale si allontana dall'incremento lungo la tangente al crescere di h. Secondo, per quanto restiamo vicini al punto la differenza fra curva tangente c'è sempre, piccola per quanto sia, quindi dobbiamo parlare di valore *approssimato*. D'altra parte, come nel caso delle tangenti delle funzioni di una variabile questo errore tende a zero "velocemente" (saremo più precisi fra un po'), e come nel caso delle funzioni di una variabile i test sulle tangenti saranno sufficienti a guidare le scelte.[6] *Per la precisione:* se in un punto il valore soggettivo locale è maggiore del valore di mercato, come a sinistra nella figura 2.5, almeno per piccole quantità ti conviene comprare; se viceversa come nel pannello destro il tuo valore è inferiore a quello degli altri se vendi un po' l'utilità aumenta.

Figura 2.5: Valore soggettivo locale e prezzo di x



La dimostrazione di questo è nella sezione 5, per ora è più importante registrarne la seguente semplice conseguenza:

Se in un punto interno al vincolo (cioè con $x, y > 0$) c'è un massimo, allora il valore soggettivo locale di x deve essere uguale al suo prezzo, cioè curva di indifferenza e vincolo devono essere tangenti.

[6]Essenzialmente si sviluppa l'idea del caso univariato che se una funzione ha derivata positiva in un punto allora in quel punto, cioè localmente, è crescente (per $x < x'$ abbastanza vicini al punto $f(x) < f(x')$).

Dimostrazione: se così non fosse ti converrebbe spostarti, cosa che potresti fare essendo in un punto interno. Vedremo presto come questo risultato aiuta a risolvere il problema di scelta.

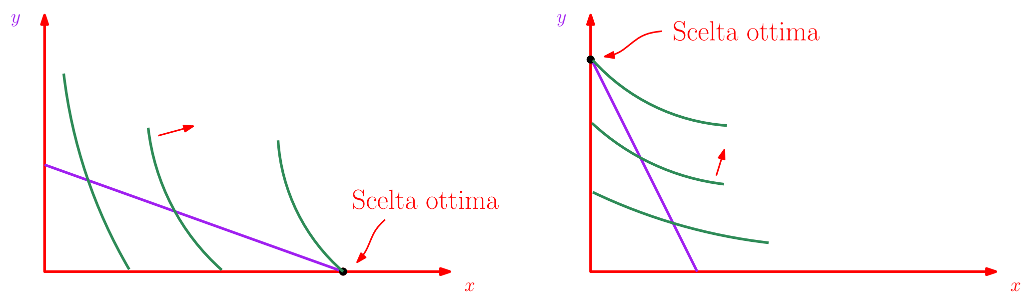
Esercizio. Pensa al valore soggettivo di y. Per vederlo ti devi mettere sull'asse y (come per il suo prezzo, vedi figura 1.7). Per esempio nel caso del pannello sinistro della figura 2.5 qui sopra il valore soggettivo di y (la pendenza della curva vista dall'asse y) è più basso del suo prezzo q/p (pendenza del vincolo vista da lì), quindi vuoi venderlo.

Nota bene. Il nome che si dà di solito a quello che noi abbiamo chiamato valore soggettivo è *"Saggio marginale di sostituzione"*. A noi non piace il nome "saggio" ma il nome in italiano è giusto, puoi controllare nel vocabolario. Per esempio il prezzo di x in termini di y è il saggio di scambio fra x ed y.

2.2.2 La scelta

Può essere che ti convenga sempre comprare come nel caso lineare della figura 2.2 sinistra, o che come nel pannello destro di quella figura ti convenga sempre vendere. Questi casi sono analoghi a quelli lineari, vedi figura 2.6.

Figura 2.6: Scelte di angolo



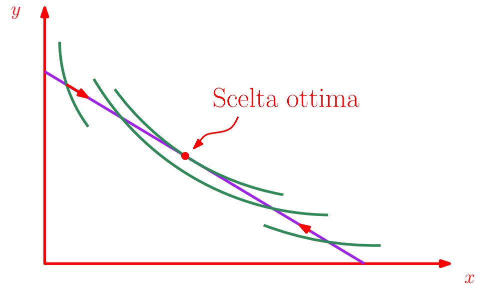
Nota che nel caso in cui la scelta ottima di x è zero il valore soggettivo di x in quel punto è finito (è minore del prezzo di mercato) nonostante che tu stia consumando *zero* di x. Analogamente (mettiti sull'asse verticale) se la scelta ottima di y è zero, in quel punto il valore soggettivo di y è finito (minore del prezzo di y). Se il valore soggettivo di un bene può essere finito quando ne consumi zero possiamo dire che quel bene è *inessenziale.* Possiamo invece parlare di bene *essenziale* quando il suo valore soggettivo tende a infinito se la quantità consumata tende a zero lungo qualunque curva di indifferenza.

Sotto questo aspetto il caso lineare è estremo: entrambi i beni sono inessenziali. Invece *se entrambi i beni sono essenziali:* per x piccolo abbastanza il valore soggettivo di x sarà maggiore del suo prezzo p/q, quindi vuoi comprare x; e per y piccolo abbastanza il suo valore soggettivo sarà maggiore del suo prezzo q/p quindi vuoi comprare y. Vedi figura 2.7. Dunque il massimo non può che essere interno, e quindi - come abbiamo visto poco fa - in un punto di tangenza fra curva di indifferenza e vincolo. Confermeremo più formalmente nella sezione 5.

2.3 Come si misura la pendenza di una curva di livello in un punto

Per risolvere in pratica il problema di scelta dobbiamo sapere come misurare la pendenza di una curva di indifferenza, e per farlo l'argomento non rigoroso ma giusto è il seguente. Ricorda

Figura 2.7: Scelta con curve convesse e beni essenziali

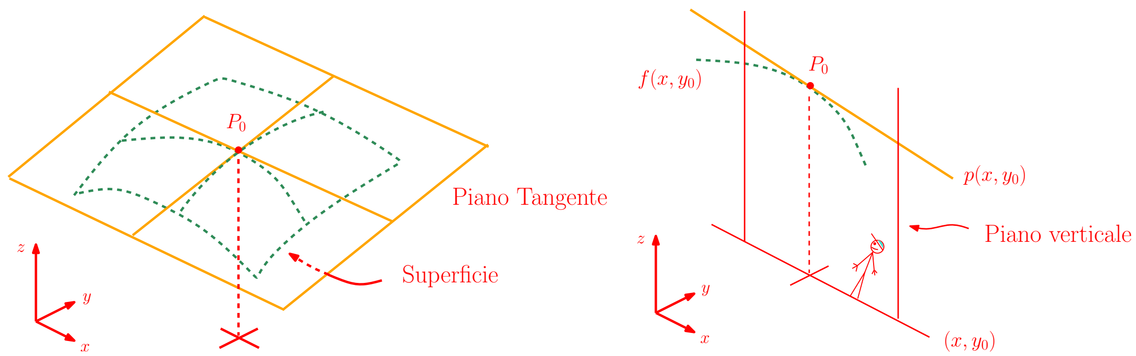


che per una funzione f di *una* variabile se x sale di h allora $\Delta f \approx hf'$ (approssimativamente perché prendiamo incrementi lungo la tangente). Supponi ora che $u_x = 10, u_y = 2$; se $\Delta x = 1$ abbiamo $\Delta u \approx 1 \cdot u_x = 10$; e ci vogliono 5 unità di y per avere lo stesso incremento: se $\Delta y = 5$ abbiamo infatti $\Delta u \approx 5 \cdot u_y = 10$; quindi un'unità di x ne vale 5 di y, dove $5 = u_x/u_y$. La conclusione è generale:[7] il valore soggettivo locale di x è u_x/u_y.

Geometricamente, per qualunque funzione $f(x, y)$ con derivate parziali continue in (x_0, y_0), la situazione è la seguente. Useremo la lettera f e parleremo di curve di livello piuttosto che di indifferenza, così ci ritroveremo i risultati quando parleremo di produzione imprese. Per prima cosa dobbiamo vedere qual è il piano tangente a una superficie. Ripasso veloce del caso univariato: una retta per (x_0, y_0) è il grafico in $\mathbb{R}^2$ della funzione $r(x) = y_0 + a(x - x_0)$; se x si sposta di Δx la r si sposta di $r(x_0 + \Delta x) - r(x_0) = a\Delta x$; e la tangente ad $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ ha pendenza $a = f'(x_0)$. Questo dovresti averlo presente.

In $\mathbb{R}^3$, un piano per (x_0, y_0, z_0) è il grafico della funzione lineare che generalizza direttamente la retta: $p(x, y) = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$; ha due "pendenze" a e b nelle direzioni x ed y, che nota sono le sue derivate parziali: $p_x = a, p_y = b$. Il piano tangente a una curva $f(x, y)$ in un punto $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è raffigurato nella figura 2.8.

Figura 2.8: Piano tangente



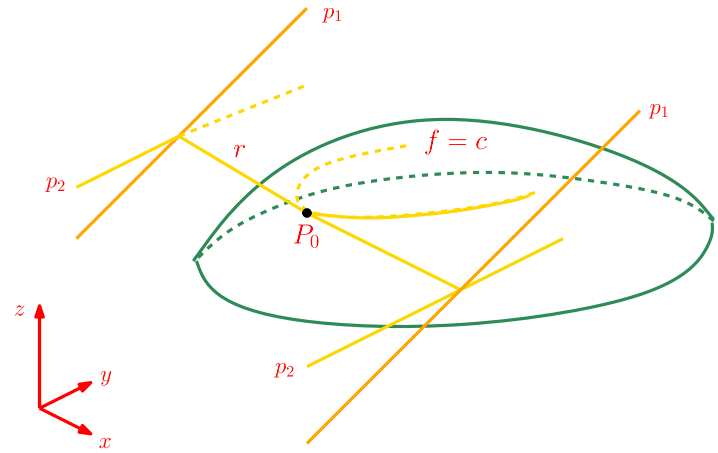
Se parti da (x_0, y_0) e cammini lungo x ti ritrovi nella situazione dell'omino nel pannello destro, e vedi due funzioni della sola variabile x: la sezione della funzione, $f(x, y_0)$; e la sezione del piano, $p(x, y_0)$. E sono tangenti, quindi la loro pendenza è contemporaneamente $p_x = a$ ed $f_x(x_0, y_0)$. Lo stesso come puoi immaginare succede lungo y. Conclusione (che in GdT viene

[7] In effetti: se $\Delta u \approx 1 \cdot u_x = 10$ per $\Delta y = u_x/u_y$ avremo $\Delta u \approx (u_x/u_y) \cdot u_y = u_x = 10$

dimostrata): il piano tangente ad f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è

$$p(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Figura 2.9: Piano tangente e curva di livello



Nella figura sono rappresentati: il grafico di una funzione $z = f(x, y)$; una sua curva di livello, $f = c$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ su di essa; il piano tangente alla superficie, p_1; il piano orizzontale p_2 ad altezza c, che contiene la curva di livello $f = c$; e la retta r che è la curva di livello del piano p_1 (intersezione fra p_1 e p_2). La retta r è tangente alla curva $f = c$.

A questo punto, guarda la figura 2.9, *definiamo tangente alla curva di livello $f = c$ in un punto la curva di livello del piano tangente ad f in quel punto.* La curva di livello del piano tangente è $p(x, y) = p(x_0, y_0)$; ma $p(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, quindi (guarda l'espressione di p) è data dall'equazione $f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. È la retta per (x_0, y_0) di pendenza $-f_x(x_0, y_0)/f_y(x_0, y_0)$. La conclusione è dunque quella anticipata sopra:

La pendenza di una curva di livello di una funzione f nel punto (x_0, y_0) è

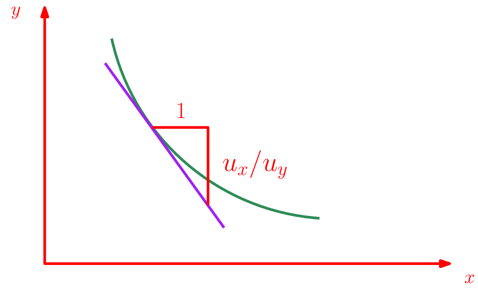
$$-\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Nel caso dell'utilità abbiamo confermato che il valore soggettivo locale di x è u_x/u_y.

2.3.1 L'assunzione di convessità delle preferenze

Disegniamo il caso di u da cui siamo partiti nella figura 2.10. L'abbiamo disegnata convessa, e a questo proposito è venuto il momento di precisare l'assunzione (A2) di pagina 3. La nostra assunzione è che *u_x/u_y decresce lungo una curva di indifferenza al crescere di x.* Adesso sappiamo che questo vuol dire che lungo la curva il valore soggettivo di x decresce con x. E dal punto di vista geometrico, che la pendenza della curva decresce vuol dire per l'appunto che la curva è *convessa.*

Figura 2.10: Pendenza curva di indifferenza



2.4 Come si risolve il problema di scelta

Possiamo adesso affrontare il problema (PC) di pagina 8, almeno nel caso di due beni. In questo caso il problema è

$$\max u(x,y) \text{ sul vincolo } px + qy = m$$

e per risolverlo possiamo procedere come segue:

1. Verifica se le curve di indifferenza sono convesse. Per questo è sufficiente che u_x/u_y decresca quando x sale ed y scende, che in generale è facile da verificare. Se non è questo il caso vedi sezione 2.6. Se lo sono passa al punto successivo.

2. Verifica se entrambi i beni sono essenziali. Questo richiede che lungo le curve di indifferenza $u_x/u_y \to \infty$ per $x \to 0$ e $u_x/u_y \to 0$ per $y \to 0$. Se questo è il caso, la soluzione è il punto di tangenza interno al vincolo.[8] Come lo troviamo? Abbiamo due incognite x ed y, ci servono due equazioni. Una è la condizione di tangenza $u_x/u_y = p/q$, l'altra è che il punto si trovi sul vincolo. Dunque la scelta ottima è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{u_x}{u_y} = \frac{p}{q} & (TG) \\ px + qy = m & (VB) \end{cases}$$

3. Se uno o entrambi i beni sono inessenziali la soluzione potrebbe essere di angolo. In particolare: se $u_x/u_y > p/q$ su tutto il vincolo la soluzione sarà $x = m/p, y = 0$; se su tutto il vincolo $u_x/u_y < p/q$ la soluzione sarà $x = 0, y = m/q$. Se u_x/u_y passa da sopra p/q a sotto, la soluzione è nel punto di tangenza interno al vincolo come nel caso di beni essenziali.

2.5 Esempi tipici

Qui facciamo quello che c'è scritto nel titolo: vedere come si procede in pratica nei casi tipici.

Esempio (Utilità Cobb-Douglas). La funzione di utilità Cobb-Douglas ha forma

$$u(x,y) = x^\alpha y^\beta$$

[8]Questo punto è unico nel caso in cui u_x/u_y è strettamente decrescente, come stiamo implicitamente assumendo. Dettagli nella sezione 5.

con $\alpha, \beta > 0$. Le curve di indifferenza $u(x,y) = u \in \mathbb{R}_+$ soddisfano $y = ux^{-\alpha/\beta}$ e quindi sono delle iperboli che non toccano gli assi. Calcolando le utilità marginali otteniamo $u_x/u_y = \alpha y/\beta x$, e da questo deduciamo che non vi possono essere soluzioni d'angolo nel problema di scelta. Siccome la scelta ottima è sempre interna risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p}{q} \\ px + qy = m \end{cases}$$

La prima condizione si può scrivere come $px = (\alpha/\beta)qy$; sostituendo nel vincolo otteniamo $(1+\alpha/\beta)qy = m$, da cui $qy = m\beta/(\alpha+\beta)$, e poi usando questo nell'equazione per px otteniamo

$$px = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}m \quad qy = \frac{\beta}{\alpha+\beta}m$$

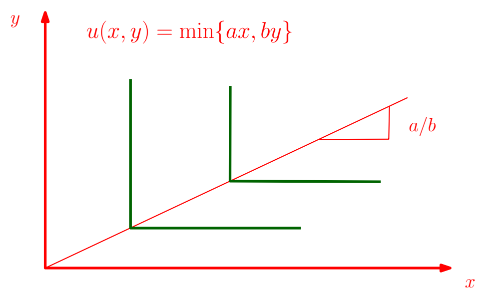
Questa è la proprietà che caratterizza la scelta Cobb-Douglas: il consumatore indipendentemente da prezzi e reddito spende una frazione costante del reddito per consumare ciascun bene, e le frazioni sono determinate dagli esponenti. Ad esempio, se $\alpha = 2, \beta = 1$ il consumatore spende i $2/3$ del reddito per consumare il bene x e $1/3$ per consumare il bene y. Dobbiamo riconoscere che è una scelta molto particolare: per esempio se x è pane ed y l'affitto della casa è ragionevole supporre che in generale la frazione di reddito spesa in pane decresce con m. Per trovare le quantità ottime dividiamo per i prezzi e otteniamo

$$x(p,q;m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p} \quad y(p,q;m) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m}{q}$$

che sono le scelte ottime di quantità nel caso Cobb-Douglas. Nota un'altra particolarità (per niente generale): la scelta di x non dipende dal prezzo di y, e viceversa.

Esempio (Utilità Leontief). Le curve di indifferenza lineari sono un caso limite di curve convesse (meno convesse possibile), e all'altro estremo troviamo funzioni con mappa di indifferenza a forma di L come nella figura 2.11.

Figura 2.11: Utilità Leontief



Le funzioni con una mappa così sono del tipo

$$u(x,y) = \min\{ax, by\}$$

che si chiamano di Leontief dall'economista che le ha considerate per primo. Questa funzione rappresenta preferenze su beni per cui si trae utilità dal consumarli insieme e in proporzioni fisse. Il termine tecnico è che i beni sono *perfetti complementi.* Un esempio può essere caffè x e zucchero y. Immaginiamo che al nostro consumatore piaccia il caffè zuccherato in modo che la proporzione tra i due sia sempre di $x/y = 1/2$ e che la sua utilità aumenta se può consumare più caffè zuccherato esattamente in questa proporzione. Quindi, ad esempio, se consuma una tazzina di caffè vuole due cucchiaini di zucchero, se consuma metà tazzina di caffè vuole un cucchiaino di zucchero, e se ne consuma due di tazzine vuole quattro cucchiaini di zucchero. Tutti questi punti sono sulla retta $y = 2x$. Ora partendo da uno di questi punti, ad esempio $(1, 2)$, dove sono le coppie indifferenti? Presto detto: se il caffè è1 tazzina qualunque quantità di zucchero superiore a 2 non viene utilizzata, l'utilità resta quella di $(1, 2)$; e analogamente se lo zucchero è due cucchiaini qualunque quantità di tazzine superiore ad uno non viene utilizzata. E così arriviamo alle curve di indifferenza come nella figura. Nota che che per ogni coppia (x, y) in questo esempio il numero di tazzine zuccherate al punto giusto che può consumare è $\min\{x, y/2\}$ e siccome è questo che gli dà utilità ha senso che la funzione di utilità abbia questa forma. Ricordando che trasformazioni monotone rappresentano le stesse preferenze, va bene anche $2 \cdot \min\{x, y/2\} = \min\{2x, y\}$. In generale, se il rapporto in cui il consumatore deve consumare i due beni è $x/y = b/a$ allora l'utilità è $u(x, y) = \min\{ax, by\}$, che è la forma generale per preferenze su beni complementi.

Come si risolve il problema di scelta del consumatore? Qui il procedimento di sopra non si può applicare perché le curve di indifferenza non sono ovunque differenziabili. Tuttavia guardando il grafico la soluzione è semplice. Il punto di ottimo è tale per cui $ax = by$, cioè un punto in cui il rapporto tra x ed y è esattamente quello desiderato, b/a. Questo ha senso economicamente: se così non fosse il consumatore starebbe acquistando delle unità di uno dei due beni che poi non usa per consumare (perché?) e quindi può aumentare la sua utilità spostandosi sul vincolo verso il punto $ax = by$ in cui la curva di indifferenza ha l'angolo. Ricordando che l'ottimo deve soddisfare anche il vincolo di bilancio abbiamo allora che la scelta soddisfa il sistema

$$\begin{cases} ax = by \\ px + qy = m \end{cases}$$

e risolvendo otteniamo $x = mb/(bp + aq), y = ma/(bp + aq)$. Nota qui la dipendenza dai prezzi. Il consumo di un bene è decrescente nel prezzo di quel bene, e anche dell'altro. Anche questo ha senso economicamente: i due beni vengono consumati assieme, quindi se aumenta il prezzo di uno diminuisce il consumo di tutti e due. Nell'esempio, se aumenta il prezzo dello zucchero diminuisce il consumo sia di zucchero che di caffè.

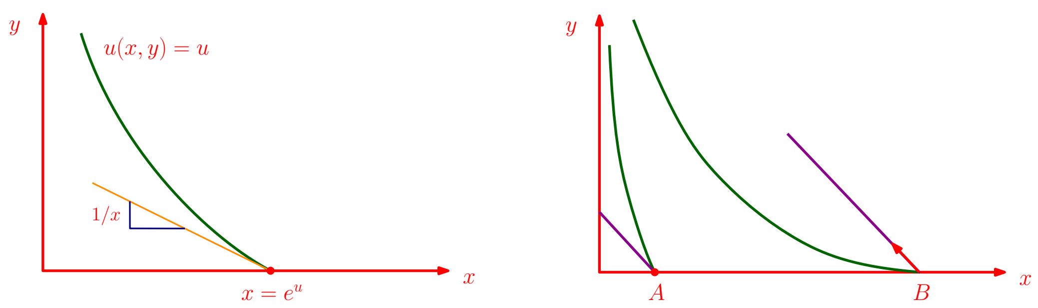
Per concludere: possiamo paragonare questo caso di "massima"convessità al caso diconvessità "minima" che è quello di utilità lineare $u(x, y) = ax + by$. In quel caso si parla di *perfetti sostituti* perché su ogni curva di indifferenza $ax + by = u$ i panieri $(0, u/b)$ e $(u/a, 0)$ sono indifferenti a loro combinazioni lineari $\lambda(0, u/b) + (1 - \lambda)(u/a, 0) = ((1 - \lambda)u/a, \lambda u/b)$ con $0 < \lambda < 1$.

Esempio (La u dei ricchi e poveri: beni di prima necessità e beni di lusso). In pratica i beni che abbiamo chiamato essenziali ($u_x/u_y \to \infty$ per $x \to 0$) sono i beni di prima necessità, mentre i non essenziali sono i beni di lusso. Il comportamento tipico, di ognuno di noi, è che se siamo poveri compriamo solo beni di prima necessità mentre se siamo ricchi compriamo anche beni di lusso. Una funzione che fa vedere questo molto chiaramente con due beni è

$$u(x,y) = \ln x + y$$

(questa è la nostra vera u). In questo caso che il bene essenziale sia x si intuisce subito dal fatto che l'utilità marginale $u_x = 1/x \to \infty$ se $x \to 0$, mentre $u_y = 1$ resta limitata anche per $y = 0$. Per confermare: il valore soggettivo di x è $u_x/u_y = 1/x$ che tende a infinito per $x \downarrow 0$, quindi x è essenziale; invece il bene y non lo è, perché dove la curva $u(x,y) = u$ tocca l'asse orizzontale, cioè dove $y = 0$, abbiamo $x = e^u$ quindi il valore di y è $u_y/u_x = e^u < \infty$. Per capire la scelta nota che la curva di indifferenza che incontra l'asse orizzontale in x lì ha pendenza $1/x$ - più piatto tanto più alto è x cioè tanto più alto è il livello di utilità, vedi pannello sinistro della figura 2.12. Ora guarda il pannello destro: quando sei ricco raggiungi utilità massima alta quindi quando $y = 0$ (punto B della figura) il valore di y è alto, per la precisione $e^u \to \infty$ per $u \to \infty$ quindi per $m \to \infty$ il valore di y a zero è sicuramente maggiore del suo prezzo q/p e un po' lo compri. Ma quando sei povero - il vincolo di bilancio è un triangolino minuscolo - l'utilità massima è bassa e il valore di y è basso anche ad $y = 0$ (punto A della figura) quindi ne compri zero; per la precisione per $m \to 0$ ogni (x,y) dentro il vincolo ha lunghezza che tende a zero cioè $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$; questo implica $x \to 0$ ed $y \to 0$, che a loro volta implicano $u \to -\infty$; da ciò, per il valore di y ad $y = 0$ troviamo $u_y/u_x = e^u \to 0$. La sostanza è tutta nel pannello destro della figura 2.12: in A sei povero e di y compri zero; in B sei ricco e se $y = 0$ ne vuoi comprare di sicuro un po'.

Figura 2.12: Beni di prima necessità e beni di lusso



Vediamo più precisamente. Sul vincolo $px + qy = m$ se $y = 0$ sarà $x = m/p$ quindi il valore soggettivo di y è $u_y/u_x = x = m/p$; se questo è maggiore del suo valore di mercato q/p compri y, altrimenti va bene $y = 0$; la soglia alla quale sei indifferente è dunque $m/p = q/p$ cioè $m = q$. Per $m \le q$ nel punto di ottimo $y = 0$ (ed $x = m/p$), per $m > q$ compri sia x che y, cioè la soluzione è interna e caratterizzata dalle solite due uguaglianze *(TG)* e *(VB)*. In questo caso risolvendo la condizione di tangenza $1/x = p/q$ assieme al vincolo di bilancio otteniamo $x = q/p$ e $y = m/q - 1$. Nota che per soluzioni interne il consumo di x è indipendente dal reddito; ovviamente se il consumatore spende tutto il reddito per x la quantità consumata dipende dal reddito.

Esempio (Utilità quasi-lineare). Le funzioni di utilità quasi-lineari hanno la forma

$$u(x,y) = v(x) + y$$

con $v(x)$ funzione crescente, concava e che assumiamo differenziabile per x strettamente positivi. Nota che la funzione dell'esempio precedente è quasi-lineare. La caratteristica che definisce la quasi-linearità è che l'utilità marginale di uno dei due beni è costante (e che possiamo fissare a 1, senza perdita di generalità, giusto?) mentre l'utilità marginale dell'altro è decrescente. Con la nostra funzione, $u_x = v'(x)$ e $u_y = 1$. Nota che sia l'utilità marginale del bene x che il rapporto tra le utilità marginali non dipendono dal consumo del bene y. La mappa delle curve di indifferenza è data dalle funzioni $y = k - v(x)$, che sono convesse siccome v è concava. La forma di v determina se ci sono soluzioni d'angolo o meno.[9] Supponiamo che la soluzione sia interna. In questo caso la condizione di tangenza è $v'(x) = p/q$; da questa la scelta di x è completamente determinata. In altri termini, la domanda di x dipende solo dai prezzi relativi *e non* dal reddito. Questa è la proprietà più importante delle preferenze quasi-lineari. La scelta di y si trova poi usando il vincolo di bilancio: $y = m/q - pv'^{-1}(p/q)/q$, e nota che y dipende anche dal reddito. Nota anche che se $q = 1$ in questo caso la scelta ottima dà esattamente $u_x = p$, utilità marginale uguale prezzo.

Esempio (Scelta intertemporale). Una scelta importante è quella di come distribuire il consumo nelle varie fasi della vita in funzione del reddito che ci si aspetta di guadagnare. Tipicamente quando si è giovani si prende a prestito per non consumare troppo poco quando ci si può godere la vita, pensando di guadagnare di più in futuro e poter ripagare i debiti contratti. Il caso generale è complicato, qui ne consideriamo una versione giocattolo. Ci sono due beni, consumo presente c_1 e consumo futuro c_2, quindi $u = u(c_1, c_2)$, che assumiamo con curve di indifferenza convesse. Il nostro ha un reddito di m_1 unità di consumo nel primo periodo ed m_2 nel secondo. Il prezzo interessante è quello di c_1 in termini di c_2, che dice quante unità di c_2 ottieni in cambio di una unità di c_1. In altre parole: se rinunzi a un'unità di consumo oggi quante te ne dànno domani? Se ci pensi stiamo parlando di *prestare* beni oggi in cambio di beni domani. Cosa ottieni domani? Quello che hai prestato più *gli interessi.* Se il tasso di interesse è r, se presti c_1 unità del bene oggi ti danno domani $c_2 = c_1 + r \cdot c_1 = (1 + r)c_1$. Dunque il prezzo di c_1 in termini di c_2 è $1 + r$. La stessa cosa vale qui per m_1 - che rappresenta m_1 unità di consumo oggi. Per scrivere il vincolo di bilancio dobbiamo scegliere un'unità di conto: consumo oggi o consumo domani. Scegliamo il consumo oggi. Il prezzo di c_2 in termini di c_1 è il reciproco di $1 + r$, quindi il vincolo è [10]

$$c_1 + (1 + r)^{-1}c_2 = m_1 + (1 + r)^{-1}m_2.$$

Nota che il punto $(c_1, c_2) = (m_1, m_2)$ soddisfa il vincolo: rappresenta la scelta possibile di consumare in ogni periodo esattamente quello che si guadagna. A questo punto vediamo che la pendenza del vincolo è proprio $1 + r$, e il problema si presenta come nel pannello sinistro della figura 2.13, dove è disegnato il caso in cui nel punto (m_1, m_2) il valore soggettivo di c_1 è più

[9] Per curiosità, le proprietà che generano la soluzione ricchi-poveri dell'esempio precedente sono:

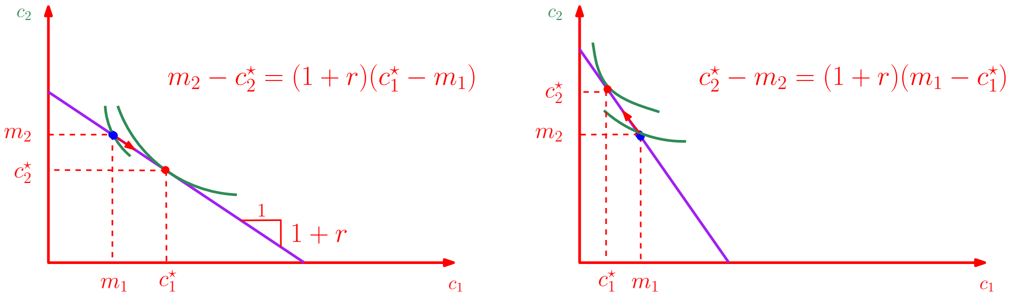
$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0} v'(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} v'(x) = 0$$

come succede per esempio per $v(x) = \ln x$.

[10] *Esercizio al volo:* scrivilo in termini di consumo domani.

alto del suo valore di mercato $1+r$ e il nostro prende a prestito $c_1^\star - m_1$. Nota dal vincolo che dovrà restituire $m_2 - c_2^\star = (1+r)(c_1^\star - m_1)$, quello che ha preso a prestito con gli interessi.

Figura 2.13: Scelta intertemporale



La scelta con curve convesse e soluzione interna è quindi caratterizzata dall'uguaglianza

$$\frac{\partial u/\partial c_1}{\partial u/\partial c_2} = 1+r$$

più ovviamente l'equazione del vincolo. Il significato del vincolo lineare qui è importante, vuol dire che puoi prestare o prendere a prestito agli stessi termini. È un'assunzione che può essere vera per piccole somme, ma in generale non è soddisfatta (quando andrai in banca a chiedere un prestito te ne accorgerai subito). Negli esercizi vedremo cosa succede con tasso attivo diverso da quello passivo.

Questo problema è in realtà un po' diverso da quelli considerati finora perché il reddito dipende dal prezzo relativo dei beni. Riscrivendo il vincolo come $c_2 - m_2 = -(1+r)(c_1 - m_1)$ ti rendi subito conto che se cambia r il vincolo *ruota* intorno al punto (m_1, m_2). All'aumentare di r prendere a prestito costa di più, e per r alto abbastanza il nostro consumatore presterà soldi lui - e nel secondo periodo potrà consumare $c_2^\star = m_2 + (1+r)(m_1 - c_1^\star)$.

2.6 Pozzanghere

Il caso tipico è quello delle curve di indifferenza convesse ma dobbiamo sapere anche come fare se non lo sono. E dopotutto per esempio curve *concave* - cioè con valore soggettivo crescente al crescere del peso relativo del bene nel paniere consumato - risultano dai beni che dànno dipendenza: più ne consumi più faresti di tutto per averne di più.

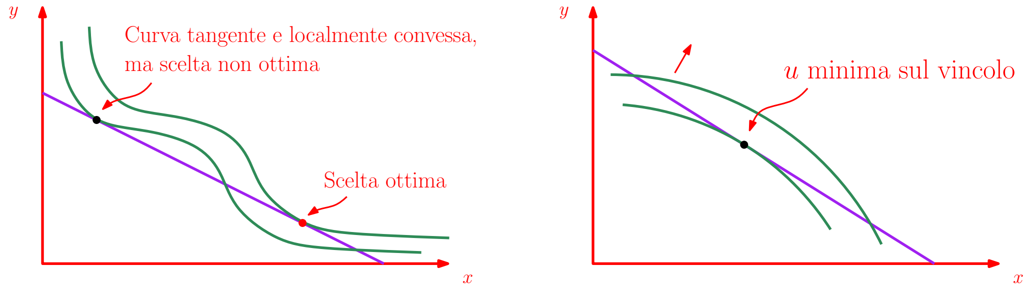
Intanto ricorda il caso di utilità lineare in cui le curve di indifferenza non sono *strettamente* convesse e la soluzione è di angolo (eccetto il caso in cui la pendenza delle curve è identica alla pendenza del vincolo nel qual caso tutti i punti sul vincolo hanno la stessa utilità).

Con u non lineare, se le curve di indifferenza non sono convesse i punti di tangenza fra curva e vincolo non sono necessariamente di massima utilità. Un esempio è nel pannello sinistro della figura 2.14. Se le curve sono così irregolari devi confrontare l'utilità nei punti di tangenza e negli angoli e vedere qual è quella più alta.

Se le curve sono *concave* (come nel pannello destro), il punto di tangenza è di *minima* utilità sul vincolo.[11] In questo caso la scelta ottima è necessariamente di angolo - dimostrazione: se è interna o è tangente ed è minima o non è tangente e allora ti vuoi spostare. Quindi devi solo

[11] Dimostrazione nella sezione 5.

Figura 2.14: Tangenza $\neq$ Massima u



confrontare i livelli di utilità nei due punti di angolo - $u(0, m/q)$ ed $u(m/p, 0)$, - e la più alta risolve il problema.

Esempio. Considera, per $x, y \geq 0$, l'utilità data da $u(x, y) = ax^2 + by^2$ con $a, b > 0$. È monotona, ma le curve di indifferenza sono archi di ellissi con centro l'origine, dunque concave. Da $u_x/u_y = ax/by$ vediamo subito che la loro pendenza *aumenta* se x sale ed y scende, quindi siamo nel caso del pannello destro della figura qui sopra. Dobbiamo confrontare $u(m/p, 0) = am^2/p^2$ ed $u(0, m/q) = bm^2/q^2$. Il nostro amico tossico comprerà solo x se $am^2/p^2 > bm^2/q^2$ cioè $p/q < \sqrt{a/b}$, eccetera. La soluzione in questi casi è banale.

2.7 Tangenza e utilità marginale della spesa

Torniamo all'idea di base di paragonare valore soggettivo locale e valore di mercato. Nota che

$$\frac{u_x}{u_y} \gtrless \frac{p}{q} \iff \frac{u_x}{p} \gtrless \frac{u_y}{q}.$$

Cos'è u_x/p? Per interpretarlo ricorda che u_x è (approssimativamente) l'incremento di utilità che si ottiene con una unità aggiuntiva di x - precisamente l'incremento lungo la tangente in direzione x. Un'unità di x costa p, dunque se la *spesa* su x aumenta di p allora $\Delta x = 1$ e $\Delta u \approx u_x$; se la spesa su x aumenta di δp unità si ottiene $\Delta x = \delta$ e l'incremento di utilità è $\Delta u \approx \delta u_x$. Se la spesa aumenta di *una* unità - $\frac{1}{p}p$ - si ottiene $\Delta x = \frac{1}{p}$ e $\Delta u \approx \frac{1}{p}u_x$. Dunque *$u_x/p_x$ è l'utilità marginale della spesa su x, cioè l'incremento di utilità che si ottiene con un incremento unitario di spesa su x.*

Il principio di base che abbiamo usato è che se il valore soggettivo di x è localmente maggiore del suo prezzo ti conviene comprare. Adesso vediamo che ciò equivale a dire che *ti conviene comprare x - cioè trasferire fondi da y ad x - se l'utilità marginale della spesa è maggiore su x che su y.* Il margine è calcolato sull'unità di spesa, che è naturale: se per esempio $u_x/p_x = 4$ e $u_y/p_y = 3$, trasferendo un'unità di spesa da y ad x si perde circa 3 di utilità su y e si guadagna 4 su x - che ovviamente conviene.

La condizione di tangenza fra curva e vincolo è che l'utilità marginale della spesa è uguale su x ed y. Se $u_x/p > u_y/q$ conviene trasferire fondi su x, e se le curve sono convesse così facendo le utilità marginali della spesa su x ed y si avvicinano. E finché sono diverse c'è margine di miglioramento, che va sfruttato. *In un massimo interno ci si ferma quando le UMS sono uguali, perché il margine di miglioramento è esaurito.*

Il principio è generale, vale per qualunque problema di scelta di allocazione di fondi limitati in cui x ed y danno un rendimento di qualche tipo - sia esso utilità o profitto. In generale, invece di utilità marginale della spesa si parla di *rendimento* marginale della spesa, e c'è margine di miglioramento finché al margine la spesa non ha lo stesso rendimento sulle due attività.

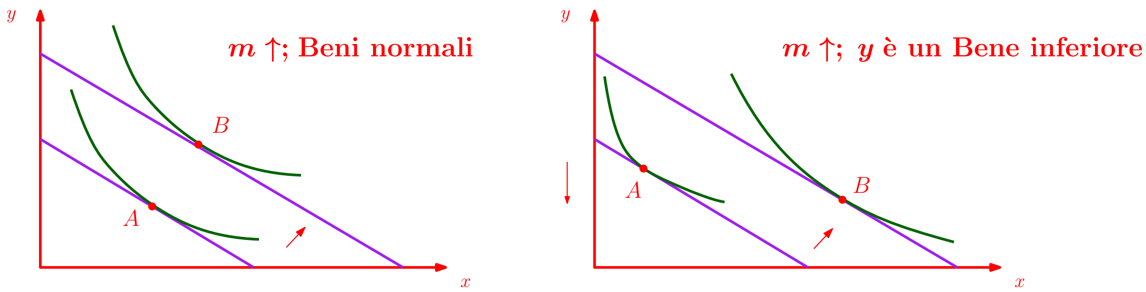
3 Effetto reddito, effetto sostituzione

Abbiamo detto nella sezione 1.3 che la soluzione del problema di scelta dipende dai parametri di contesto che sono i prezzi e il reddito. Vediamo meglio.

3.1 Beni normali e beni inferiori

Quando aumenta il reddito "normalmente" si consuma di più di entrambi i beni - come nel pannello sinistro della Figura 3.1. Per esempio nella Cobb-Douglas $x^\alpha y^\beta$ da $x(p,q,m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p}$ vediamo che il consumo di x aumenta linearmente con m; e lo stesso vale per y. Questi sono beni cosiddetti *normali.* Ma di alcuni beni se diventi più ricco ne consumi di meno, come nel pannello destro della figura - tipicamente compri meno roba di brutta qualità, e in economia questi beni si chiamano *inferiori.* Nel pannello destro della figura il bene inferiore è y, fanne un'altra in cui il bene inferiore è x per esercizio.

Figura 3.1: Effetto reddito



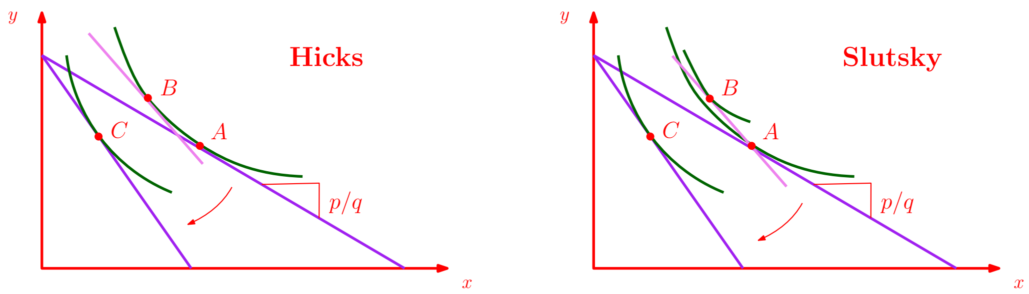
Nota che se ci sono due beni almeno uno deve essere normale, perché se aumenta il reddito aumenta la spesa totale (se consumassi di meno di entrambi i beni a prezzi invariati spenderesti di meno).

3.2 Decomposizione dell'effetto di una variazione di prezzo

Illustriamo graficamente l'idea nel caso di un aumento del prezzo p di x nella Figura 3.2. Il consumatore passa dal punto A al punto C. Il problema è che quando p aumenta succedono due cose: uno, x diventa più caro; due, tu diventi più povero nel senso che l'insieme delle scelte possibili si riduce. Assumendo che alla fine nel punto C il consumo di x si sia ridotto, quanto è dovuto al fatto che sei diventato più povero, e quanto alla "pura" variazione del prezzo? Il problema è come separare le due cose, e l'idea è che l'effetto della variazione di prezzo si vede "neutralizzando" l'effetto della contrazione dell'insieme di scelta, che si può ottenere vedendo cosa sceglieresti ai nuovi prezzi se restassi al livello di utilità originale, come nel pannello sinistro della Figura 3.2.

Dalla figura (in entrambi i casi) si vede che la tangente nel punto B è un vincolo di bilancio "ausiliare" parallelo a quello con prezzi nuovi (tangente a C) ma con reddito superiore. La differenza rispetto al nuovo vincolo è una compensazione monetaria per la contrazione dell'insieme delle scelte possibili conseguente all'aumento del prezzo di x. Il passaggio da A a B che si chiama *effetto sostituzione* è quello dovuto alla sola variazione dei prezzi relativi; il passaggio da B a C che si chiama *effetto reddito* è dovuto alla effettiva perdita di potere d'acquisto.

Figura 3.2: Effetto reddito e sostituzione, beni normali



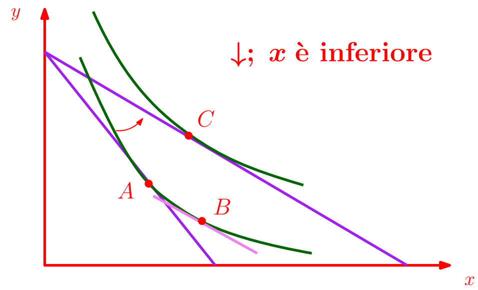
La differenza fra le parti sinistra e destra è l'ammontare della compensazione monetaria Δm. Con il metodo di Hicks la compensazione è calcolata in modo che il consumatore resti, a prezzi nuovi, sulla curva di indifferenza originaria. Con il metodo di Slutsky si mette il consumatore in grado di ricomprare a prezzi nuovi il paniere scelto prima della variazione del prezzo. Dalla figura è chiaro che con il metodo di Slutsky la compensazione è "eccessiva" nel senso che consente al consumatore di arrivare su una curva di indifferenza più alta di quella originale, ma per Δp piccolo la differenza fra i due metodi tende a zero, e il metodo di Slutsky è più facile da applicare come vedremo nell'esempio Cobb-Douglas qui sotto.[12]

In entrambi i casi con curve di indifferenza convesse l'effetto sostituzione è negativo, nel senso che se p aumenta il passaggio da A a B comporta una riduzione del consumo. Nel caso di Hicks questo è chiaro perché una curva di indifferenza ha pendenza maggiore solo se x diminuisce; nel caso di Slutsky nel punto A con il nuovo vincolo ti conviene vendere x perché il tuo valore diventa inferiore al prezzo di mercato. L'effetto reddito - da B a C - invece può essere positivo o negativo, nel senso che per beni normali si cumula con l'effetto sostituzione (come nella Figura 3.2), ma per beni inferiori va in direzione opposta: per esempio se x è inferiore se aumenta il suo prezzo per effetto sostituzione ne consumi di meno ma l'effetto reddito (che ti fa diventare più povero) te ne fa consumare di più; quindi l'effetto totale è ambiguo. Vedi Figura 3.3, dove p diminuisce; per effetto sostituzione se ne consuma di più - passaggio da A a B - ma per effetto

[12] Una storiella che può servire a chiarire l'effetto sostituzione è questa. Hai fatto la spesa e ti avvii alla cassa, con 10 barattoli di Nutella che hai comprato a 3 Euro e 50 perché il prezzo ti era sembrato particolarmente conveniente. Ma alla cassa arriva un commesso e ti dice che c'era uno sbaglio e la Nutella in realtà costa 4 Euro. "Cavolo", dici "così i soldi non mi bastano, mi mancano 5 Euro, devo tornare indietro e rifare tutto". Ma accanto a te c'è Slutzki e ti dice "Ehi, qui ci sono 5 Euro, te li regalo". Tu ringrazi, stai per pagare ma ci pensi meglio e capisci che a 4 Euro 10 barattoli non li vuoi più comprare, a quel prezzo preferisci comprarne meno e sostituirli con un po' più di altre cose. Quindi torni indietro, posi un po' di Nutella e metti in carrello più marmellata, prosciutto, banane... Quanta Nutella hai posato? Quella che hai posato l'hai posata per l'effetto sostituzione - di Slutzki. Non solo: siccome te la potevi permettere e hai cambiato paniere in verità stai anche meglio che col paniere originale, quindi per farti rimanere al livello di utilità originale bastavano meno di 5 Euro; se accanto a te c'era Hicks te ne regalava un po' meno - giusto quanto bastava a farti uscire con la stessa utilità che ti dava la spesa che avevi raggiunto prima della brutta notizia sull'aumento del prezzo della Nutella.

reddito il consumo si riduce - passaggio da B a C. L'effetto totale - da A a C - è comunque un aumento del consumo di x.

Figura 3.3: Effetto reddito e sostituzione con x inferiore



Normalmente l'effetto sostituzione è più forte, come nella figura, ma ci possono in linea di principio essere beni inferiori con effetto reddito così forte da più che bilanciare l'effetto sostituzione, col risultato che se diminuisce il prezzo di x ne consumi di meno. In questo caso si parla di beni *di Giffen* dall'economista che per primo ha fatto notare la cosa. Puoi fare una figura analoga alla 3.3 con effetto reddito forte abbastanza da far sì che il consumo di x *scenda* in conseguenza di una riduzione del suo prezzo.

Per calcolare la compensazione monetaria col metodo di Slutsky, partendo dal vincolo $px + qy = m$ supponiamo che p passi da p_0 a p_1; porremo $p_1 - p_0 = \Delta p$ (il livello iniziale del reddito è m). Poiché q è fisso omettiamo la dipendenza della scelta ottima da q e scriviamo $x = x(p, m), y = y(p, m)$. A prezzi nuovi il paniere originale costa

$$p_1 x(p_0, m) + qy(p_0, m) = (p_0 + \Delta p)x(p_0, m) + qy(p_0, m) = m + \Delta p \cdot x(p_0, m)$$

sicché $\Delta m = \Delta p \cdot x(p_0, m)$. Per calcolare il Δm col metodo di Hicks, ponendo $U(p, m) = u(x(p, m), y(p, m))$ - il livello di utilità nella scelta ottima - il Δm con il metodo di Hicks è definito dalla relazione $U(p_1, m + \Delta m) = U(p_0, m)$.

In entrambi i casi ***la scomposizione*** è ottenuta semplicemente aggiungendo e togliendo $x(p_1, m + \Delta m)$:

$$x(p_1, m) - x(p_0, m) = [x(p_1, m + \Delta m) - x(p_0, m)] + [x(p_1, m) - x(p_1, m + \Delta m)]$$

Il primo termine fra parentesi quadre è l'effetto sostituzione, il secondo l'effetto reddito. Nota che per beni normali se il prezzo aumenta entrambi i termini sono negativi.

Esempio (Cobb-Douglas). Calcoliamo effetti reddito e sostituzione con utilità Cobb-Douglas $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ secondo i due metodi. Sappiamo che $x(p, m) = \alpha \frac{m}{p}$. Osserviamo che l'effetto totale è

$$\Delta x \equiv \alpha \frac{m}{p_1} - \alpha \frac{m}{p_0} = -\frac{\alpha m \Delta p}{p_0 p_1} = -x(p_0, m)\frac{\Delta p}{p_1}$$

Cominciamo con Slutsky. Abbiamo $\Delta m = \alpha \Delta p \cdot m / p_0$ da cui $m + \Delta m = m(1 + \alpha \Delta p \cdot /p_0)$, quindi effetto sostituzione ed effetto reddito sono dati rispettivamente da

$$\alpha\frac{m(1+\alpha\Delta p\cdot/p_0)}{p_1}-\alpha\frac{m}{p_0}=\frac{\alpha m}{p_0}\frac{p_0+\alpha\Delta p-p_1}{p_1}=-(1-\alpha)\frac{\alpha m\Delta p}{p_0p_1}=(1-\alpha)\Delta x$$
$$\alpha\frac{m}{p_1}-\alpha\frac{m(1+\alpha\Delta p\cdot/p_0)}{p_1}=-\alpha\frac{\alpha m\Delta p}{p_0p_1}=\alpha\Delta x$$

Abbiamo visto che il Δm con il metodo di Hicks è definito dalla relazione $U(p_1,m+\Delta m)=U(p_0,m)$. Nel caso in esame abbiamo (sappiamo che $y(p,m)=(1-\alpha)m/q$)

$$U(p,m)=\Big(\alpha\frac{m}{p}\Big)^{\alpha}\Big((1-\alpha)\frac{m}{q}\Big)^{1-\alpha}=m\Big(\frac{\alpha}{p}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{q}\Big)^{1-\alpha}$$

quindi la relazione che vogliamo è

$$(m+\Delta m)\Big(\frac{\alpha}{p_1}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{q}\Big)^{1-\alpha}=m\Big(\frac{\alpha}{p_0}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{q}\Big)^{1-\alpha}$$
$$\Delta m=m\Big[\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}-1\Big]$$

da cui $m+\Delta m=m(p_1/p_0)^{\alpha}$. Le formule che danno effetto sostituzione ed effetto reddito non sono illuminanti, le mettiamo in nota.[13] Per concludere, abbiamo osservato che la compensazione monetaria con il metodo di Slutsky è più generosa che col metodo di Hicks. Lo possiamo verificare nel caso presente - ma è una curiosità matematica, anche questo lo mettiamo in nota.[14]

Esempio (Tasse su x o su m). Quando abbiamo parlato di tasse c'era solo un bene. Adesso capiamo che tassare il consumo di un bene, che equivale ad aumentarne il prezzo da p a $p+t$, fa ruotare il vincolo come nella figura 3.4 e quindi - se è un bene normale - ne fa ridurre il consumo non solo per l'effetto negativo sul reddito ma anche per l'effetto distorsivo sul suo prezzo in termini di y. Quindi è legittimo chiedersi se non si possa ottenere, con una tassa sul reddito, lo stesso gettito a costo inferiore in termini di utilità per il consumatore.

Come illustra la figura 3.4 la risposta è sì. Infatti la scelta con la tassa su x, diciamo $(x^\star,y^\star)$, soddisfa il vincolo $(p+t)x^\star+qy^\star=m$ quindi anche $px^\star+qy^\star=m-tx^\star$ che è quello ottenuto con tassa sul reddito con gettito uguale. Ma su questo vincolo ci sono panieri con utilità maggiore di $(x^\star,y^\star)$ perché in quel punto il valore soggettivo di x è $(p+t)/q>p/q$ quindi puoi far salire u comprando x, vedi figura.

Tornando a pensare in termini di tassa sulla domanda, da quanto detto possiamo dedurre che: se la quantità relativa del bene x è più o meno omogenea nelle scelte dei vari consumatori,

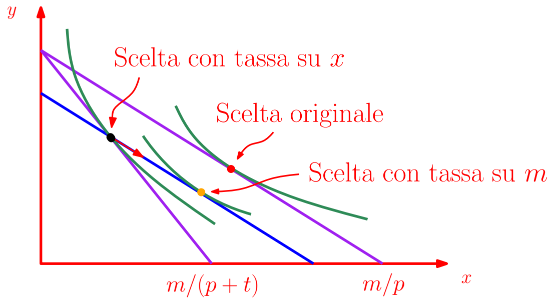
[13] Effetto sostituzione ed effetto reddito sono dati rispettivamente da

$$\alpha\frac{m(p_1/p_0)^{\alpha}}{p_1}-\alpha\frac{m}{p_0}=\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}x(p_1,m)-x(p_0,m)=-x(p_0,m)\Big[1-\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}\Big]$$
$$\alpha\frac{m}{p_1}-\alpha\frac{m}{p_1^{1-\alpha}}\frac{1}{p_0^{\alpha}}=\frac{\alpha m}{p_1}-\frac{\alpha m}{p_0}\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}=\frac{\alpha m}{p_0}\frac{p_0}{p_1}-\frac{\alpha m}{p_0}\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}=-x(p_0,m)\Big[\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}-\frac{p_0}{p_1}\Big]$$

Puoi verificare che la somma dei due effetti dà l'effetto totale.

[14] La disuguaglianza è $\alpha\Delta p\cdot m/p_0>m\Big[\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}-1\Big]$ che si può riscrivere come $\alpha(\frac{p_1}{p_0}-1)>\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}-1$. Ponendo $x\equiv p_1/p_0$ dobbiamo verificare che per $0<x\neq1$ e $0<\alpha<1$ vale $\alpha(x-1)>x^{\alpha}-1$. Le due funzioni sono uguali per $x=1$. Al primo membro abbiamo una retta di pendenza α; la curva al secondo membro ha derivata prima $\alpha x^{\alpha-1}$ che è uguale ad α per $x=1$ quindi la retta è la sua tangente; e ha derivata seconda negativa quindi è concava, sicché sta tutta sotto la tangente.

Figura 3.4: Tassa su x o su m



allora una tassa sul reddito raggiunge lo scopo a costi inferiori; se invece le scelte su x dei diversi consumatori hanno variabilità alta - c'è chi ne consuma tanto e chi niente - allora una tassa sul reddito calibrata sul consumatore "medio" di fatto favorisce chi di x consuma molto e penalizza chi ne consuma poco (per il consumatore limite con $x^\star = 0$ la tassa equivalente sul bene sarebbe zero). A questo punto possiamo pensare all'IVA, che è una tassa (imposta...) sul consumo. Sarebbe meglio eliminarla e sostituirla con una tassa sul reddito? No, perché dei vari beni c'è chi ne consuma molto e chi poco quindi variando l'aliquota da bene a bene puoi usarla a fini redistributivi: per esempio se vuoi favorire i poveri metti un'aliquota bassa sui beni di prima necessità e una alta sui beni di lusso - e in generale funziona esattamente così.

3.3 La Legge della Domanda

Ricorda che il problema che ci siamo posti all'inizio del capitolo era quello di verificare se la domanda di un bene è effettivamente decrescente, e a questo punto abiamo la risposta: la domanda di un bene può *non* essere decrescente nel suo prezzo. Questo è il caso dei beni di Giffen, che sono casi particolari - l'esempio tipico è un bene inferiore che "pesa" molto nel paniere consumato, tipo le patate nell'Irlanda dell'800: siccome ne consumi un sacco se diminuisce il prezzo anche di poco risparmi tanto (quindi l'effetto sostituzione è esiguo), e siccome non ne puoi più le sostituisci con qualcos'altro. Che l'effetto reddito è più forte per beni che "pesano" di più nel paniere scelto lo possiamo vedere nel caso Cobb-Douglas visto prima: con $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ la spesa su x è αm, e l'effetto reddito (Slutsky) è $\alpha \Delta x$ - più alta è la frazione di m spesa su x più forte è l'effetto reddito, e se α è vicino ad 1 l'effetto sostituzione è irrilevante.

Particolari per quanto siano questi esempi la conclusione è che la domanda non è *sempre* decrescente. Però - e questa è la cosiddetta ***legge della domanda*** - lo è nel caso dei beni normali. Perché in quel caso effetto sostituzione ed effetto reddito vanno nella stessa direzione, e se un prezzo scende si consuma di più sia per l'uno che per l'altro effetto. Conclusione: si può affermare che "normalmente" - cioè per beni normali - la domanda è decrescente. Questo è quello che assumeremo di norma nel seguito del corso.[15]

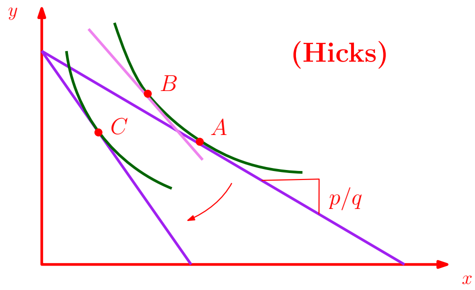
3.4 Variazioni di prezzo nelle tre scelte (x, y), (c, ℓ) e (c_1, c_2).

Ovviamente parliamo di: bene 1 e bene 2; consumo presente e consumo futuro; consumo e tempo libero. Vogliamo ricordare che le variazioni di prezzo nelle tre scelte hanno effetti diversi,

[15]Una proposizione più formale che asserisce che la derivata parziale della domanda di x_i rispetto al suo prezzo è negativa nel caso di un bene normale è alla fine della sezione 5.

assumendo che tutti i beni sono normali. La differenza fondamentale è che nel primo caso il reddito non dipende dai prezzi, mentre negli altri due sì - e questo cambia tutto.

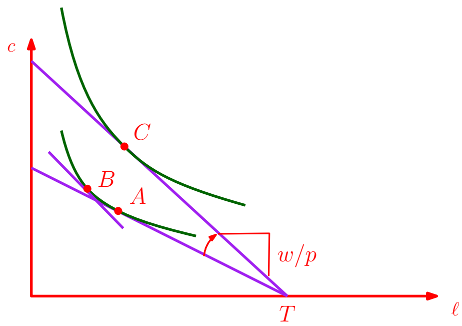
Figura 3.5: Beni Normali: effetto reddito e sostituzione si cumulano



Nella Figura 3.5 è rappresentata la variazione della scelta del bene normale x nel caso standard $px+qy=m$, in cui come sappiamo se p aumenta la quantità consumata di x si riduce per l'effetto sostituzione e anche per l'effetto reddito: si riduce da A a B ed anche da B a C. Gli effetti si cumulano, e il consumo del bene sicuramente decresce.

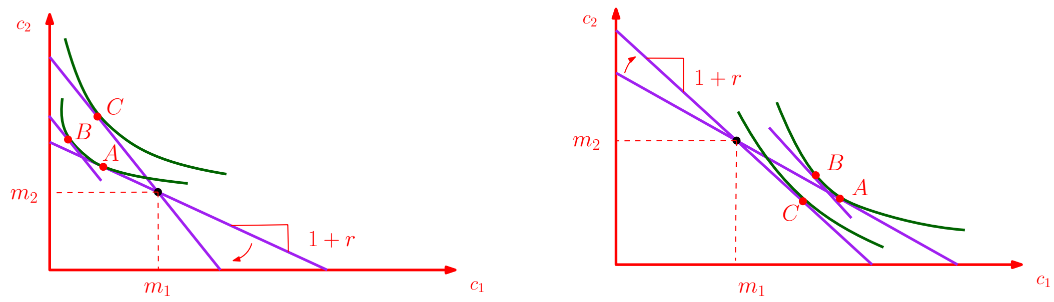
Nel caso della scelta fra consumo e tempo libero - coperta nell'esercizio 22 - anche se i beni sono normali l'effetto reddito e sostituzione vanno in direzione opposta. Questo dipende dal fatto che nel vincolo $pc+w\ell=wT$, dove p è il prezzo del consumo, w il prezzo del lavoro, ℓ è il tempo libero e T il tempo totale a disposizione, il reddito dipende dal prezzo w. Se w aumenta sale il prezzo di ℓ ma sale anche il reddito. Quindi l'effetto sostituzione fa ridurre ℓ ma l'effetto reddito lo fa aumentare, e l'effetto totale è ambiguo. Questo caso è rappresentato nella Figura 3.6: da A a B (effetto sostituzione) la quantità di ℓ si riduce; ma da B a C (effetto reddito) aumenta.

Figura 3.6: Consumo e tempo libero: effetto reddito e sostituzione sono opposti



Nel caso infine della scelta fra consumo presente e consumo futuro, con vincolo di bilancio $c_2-m_2=-(1+r)(c_1-m_1)$, l'effetto di un incremento di r cioè in pratica del prezzo di c_1 è diverso a seconda che al prezzo iniziale il consumatore risparmia o prende a prestito, perché il vincolo *ruota* intorno al punto (m_1,m_2). Per un consumatore che al livello iniziale di r risparmia, cioè $c_1<m_1$, l'effetto sostituzione fa ridurre c_1 ma l'effetto reddito lo fa aumentare (perché è avvantaggiato dall'aumento del rendimento del risparmio). Vedi Figura 3.7 pannello sinistro. Per un consumatore che prende a prestito, $c_1>m_1$, effetto reddito e sostituzione spingono entrambi verso una riduzione di c_1 perché l'aumento di r gli fa pesare di più il debito contratto, vedi pannello destro della figura.

Figura 3.7: Consumo presente e futuro



4 Il caso di *n* beni e l'utilità marginale del reddito

Nel caso di n beni (notazione x, p) dimostreremo nella sezione 5 che in un massimo interno - cioè con $x_i > 0$ per ogni i - l'utilità marginale della spesa u_i/p_i deve essere uguale su tutti i beni. Sotto ipotesi di convessità simili alla convessità delle curve di indifferenza nel caso di due beni, questa condizione è anche sufficiente. La dimostrazione di questo non è alla nostra portata, ma resta istruttivo vedere come si trova il paniere in questione e l'intuizione per la sua ottimalità. Il problema di cui parliamo è sempre (PC) di pagina 8.

Cerchiamo un paniere sul vincolo in cui le utilità marginali della spesa sono uguali su tutti i beni. Abbreviamole con $UMS(i) \equiv u_i(x)/p_i$, dove la x ti ricorda che tutto dipende da x. Ci sono n incognite, servono n equazioni. Una è il vincolo, le altre sono le condizioni che $UMS(i) = UMS(j)$ per tutte le coppie di i, j. Quante equazioni sono queste? Se ci pensi, sono $n-1$: $UMS(1) = UMS(i), i = 2, \ldots, n$. Per trovare x si deve dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_i}{p_i} & i = 2, 3, \ldots n \\ p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = m \end{cases}$$

Immaginiamo in concreto *il processo* di massimizzazione dell'utilità del consumatore sul vincolo di bilancio nel caso di tre beni x_1, x_2, x_3. Assumiamo che quando si trasferisce spesa da j a i il valore soggettivo di i in termini di j, cioè u_i/u_j, scende. Dunque se $UMS(i) > UMS(j)$ e si vende j per comprare i la differenza $UMS(i) - UMS(j)$ si riduce.

Per ogni i deve essere $0 \leq x_i \leq m/p_i$. Se c'è un i tale che per $x_i = m/p_i$ (quindi $x_j = 0, j \neq i$) si ha $UMS(i) > UMS(j),\ j \neq i$, chiaramente ti conviene comprare solo x_i e il paniere ottimo ha $x_j = 0$ per $j \neq i$. Se così non è il passo successivo è vedere se c'è un ottimo con *una* coordinata nulla; per far questo prendi x_i, ponilo uguale a zero, distribuisci il reddito fra gli altri due x_j e x_k in modo che $UMS(j) = UMS(k) \equiv \lambda_{jk}$ e calcola $UMS(i)$; se $UMS(i) \leq \lambda_{jk}$ allora $x_i = 0$ è un massimo locale; se c'è un solo massimo locale nullo quello è globale; se ce n'è più di uno paragona le utilità e scegli il migliore. Se invece hai trovato che non ci sono massimi locali con coordinate nulle il punto di ottimo sarà interno. Per arrivarci puoi procedere così: sappiamo che se $x_1 = m/p_1$ ed $x_2 = 0$ si ha $UMS(1) < UMS(2)$. Tieni per adesso $x_3 = 0$ e distribuisci il reddito fra x_1 e x_2 in modo che $UMS(1) = UMS(2) = \lambda_{12}$; in quel punto avremo $0 < x_i < m/p_i,\ i = 1, 2$ ed $UMS(3) > \lambda_{12}$;allora trasferisci spesa da x_1 e x_2 verso x_3, mantenendo $UMS(1) = UMS(2)$, finché questo valore comune non scende fino ad $UMS(3)$ che così facendo sta salendo; il processo termina in un panierein cui $UMS(1) = UMS(2) = UMS(3) \equiv \lambda$. Questo valore comune si chiama *utilità marginale del reddito.*

Il nome è appropriato, perché per quanto appena visto una unità marginale di spesa, indipendentemente dal bene in cui è impiegata, vale un incremento di utilità uguale a λ. Quindi tanto deve valere un incremento marginale del reddito. Su questo possiamo essere più precisi. La soluzione di (PC) dipende da m e da p; tralasciamo p e indichiamola con $x(m)$. L'utilità che si raggiunge in $x(m)$ è $u(x(m)) \equiv U(m)$. Quello che abbiamo appena detto sul valore comune $\lambda = UMS(i)$ è per la precisione che $U'(m) = \lambda$:

Proposizione 1 (Utilità marginale del reddito). *Assumi che in $x(m)$ è $UMS(i) = \lambda$ e che $x_i(m)$ sia derivabile per ogni i. Allora $U'(m) = \lambda$.*

Dimostrazione. Usiamo la derivazione di funzioni composte (vedi *GdT*). Poiché $x(m)$ sta sul vincolo abbiamo $\sum_i p_i x_i(m) = m$ per ogni m, il che implica $\sum_i p_i x_i'(m) = 1$. Dunque poiché l'ipotesi $UMS(i) = \lambda$ è che $\frac{\partial u(x(m))}{\partial x_i} = \lambda p_i$ otteniamo

$$U'(m) = \sum\nolimits_i \frac{\partial u(x(m))}{\partial x_i} \cdot x_i'(m) = \lambda \sum\nolimits_i p_i x_i'(m) = \lambda$$

che è quanto si voleva. □

5 Nero su bianco

Abbiamo intuito e argomentato, adesso mettiamo un po' mano a carta e penna. Ci servono un paio di cose da *GdT* che cominceremo col riassumere brevemente per poterle usare. Poi vedremo nero su bianco i risultati sulla scelta che abbiamo usato tutto il tempo.

5.1 Preliminari

Intanto la lunghezza in $\mathbb{R}^n$: in $\mathbb{R}$ è semplicemente il valore assoluto, per esempio la lunghezza del segmento da zero a -3 è $3 = |-3|$; così in $\mathbb{R}^n$ si continua ad usare il simbolo $|x|$ per indicare la lunghezza di $x = (x_1, \ldots, x_n)$. In $\mathbb{R}^2$ ce la dà il Teorema di Pitagora, vedi pannello sinistro in figura 5.1: $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; e in $\mathbb{R}^n$ la lunghezza di x è definita dalla versione in n coordinate della stessa formula:

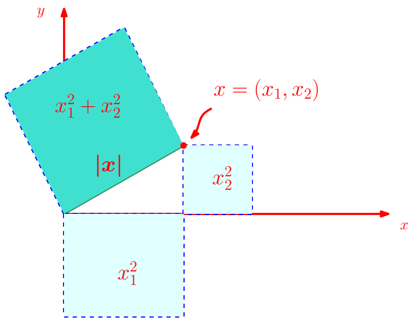
$$|x| := \sqrt{\sum\nolimits_i x_i^2}.$$

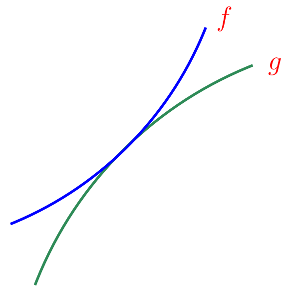
Poi il concetto di tangenza fra due funzioni in un punto. L'idea è raffigurata nel pannello destro della figura 5.1, e l'idea è la stessa che in $\mathbb{R}^2$: quando da x ci si sposta ad $x + \Delta x$ la corrispondente differenza $\Delta f - \Delta g$ va a zero più veloce della lunghezza $|\Delta x|$; formalmente, con $\Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$ e Δg analogo, abbiamo

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{\Delta f - \Delta g}{|\Delta x|} = 0.$$

In $\mathbb{R}^2$ quando g è una retta sappiamo che ciò equivale a dire che f è derivabile e la derivata nel punto di tangenza è uguale alla pendenza della retta (vedi *GdT* se vuoi ripassare). In $\mathbb{R}^n$ (vedi *GdT* per i dettagli) la situazione è la seguente: *se* in $x^0 \in \mathbb{R}^n$ un piano $p(x) =$

Figura 5.1: Sinistra Pitagora; Destra Tangenza





$f(x^0) + \sum_i a_i(x_i - x_i^0)$ è tangente ad f, *allora* necessariamente deve essere $a_i = f_i(x^0)$ (quindi sempre pendenze uguali a derivate come in $\mathbb{R}^2$); e se le derivate f_i esistono *e sono continue in* x^0 allora il piano tangente esiste (ed è l'unico candidato appena visto). In $\mathbb{R}^3$ possiamo visualizzare, f è una superficie e il piano è un piano in $\mathbb{R}^3$. Dunque il risultato è il seguente:

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali continue in x^0 allora il piano $p^t(x) = f(x^0) + \sum_i f_i(x^0)(x_i - x_i^0)$ è tangente ad f in x^0, cioè (definizione di tangenza)

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{\Delta f - \sum_i f_i(x^0)\Delta x_i}{|\Delta x|} = 0 \tag{PTg}$$

Questo limite dice che per Δx piccolo l'incremento $\Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$ della funzione è ben approssimato dall'incremento $\Delta p^t = \sum_i f_i(x^0)\Delta x_i$ del piano tangente.

5.2 Risultati sulla scelta del consumatore

La notazione che riprendiamo è quella della scelta in $\mathbb{R}^n$: x paniere di beni e p vettore dei prezzi; x nel vincolo se $px = m$. La prima cosa che confermeremo usando (PTg) è che effettivamente se il valore soggettivo di un bene in termini di un altro è maggiore del valore di mercato allora conviene comprare, se minore conviene vendere.

Più precisamente, l'affermazione è che se per un certo x sul vincolo di bilancio risulta $u_i/u_j \neq p_i/p_j$ allora conviene spostarsi sul vincolo sostituendo i con j almeno per piccole quantità - sempre che ciò sia fattibile, nel senso per esempio che se vuoi vendere i deve essere $x_i > 0$. Ovviamente ti devi sempre spostare *sul vincolo,* e conviene vedere come si scrive questo. Spostarsi vuol dire passare da x ad $x + \Delta x$ per qualche $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \neq 0$; e spostarsi sul vincolo vuol dire che anche $x + \Delta x$ deve stare sul vincolo, cioè la spesa totale deve restare invariata: $p \cdot (x + \Delta x) = px$. Scambiare i con j vuol dire considerare Δx con $\Delta x_k = 0$ per $k \neq i, j$; quindi la restrizione di spesa invariata (srotola le somme e lo vedi subito) diventa $p_i\Delta x_i + p_j\Delta x_j = 0$ che dice che quanto ti entra della vendita spendi per comprare. In termini di quantità $\Delta x_j = -(p_i/p_j)\Delta x_i$, e i conti tornano anche da questo punto di vista: analogamente a quanto visto con due beni, p_i/p_j è il valore di i in termini di j, che significa che puoi scambiare una unità di i con p_i/p_j unità di j - e per linearità, Δx_i unità di i con $(p_i/p_j)\Delta x_i$ unità di j; esattamente questo dice l'uguaglianza $\Delta x_j = -(p_i/p_j)\Delta x_i$.

Andando ad u, (PTg) dice che $\Delta u \approx \sum_i u_i(x^0)\Delta x_i \equiv \Delta p^t$ nel senso che $|\Delta u - \Delta p^t|/|\Delta x| \to 0$ con $|\Delta x|$. Nota che per lo scambio Δx appena visto abbiamo $\Delta p^t = u_i\Delta x_i + u_j\Delta x_j = \Delta x_i[u_i -$

$u_j \cdot (p_i/p_j)]$. La dimostrazione del risultato che segue usa il fatto che siccome $\Delta u \approx \Delta p^t$ di fatto per avere il segno di Δu localmente basta guardare a Δp^t.

Proposizione 2. *Supponi che x stia sul vincolo e che x_i ed x_j siano strettamente positivi. Se $u_i/u_j \neq p_i/p_j$ allora esiste $x + \Delta x \neq x$ sul vincolo con $u(x + \Delta x) > u(x)$, dove Δx_i ha lo stesso segno di $u_i/u_j - p_i/p_j$.*

Dimostrazione. Dato che $x_i, x_j > 0$ lo scambio Δx appena visto è fattibile; nota che $|\Delta x|^2 = \sum_i \Delta x_i^2 = \Delta x_i^2(1 + (p_i/p_j)^2)$, e che questo implica $|\Delta x| \to 0 \iff \Delta x_i \to 0$. Inoltre, moltiplicando e dividendo per $|\Delta x|$ otteniamo

$$\Delta u - \Delta p^t = \Delta x_i \cdot \left\{ \frac{|\Delta u - \Delta p^t|}{|\Delta x|} \sqrt{1 + (p_i/p_j)^2} \right\} \equiv \Delta x_i \cdot \eta$$

dove per (PTg) $\lim_{|\Delta x| \to 0} \eta = \lim_{\Delta x_i \to 0} \eta = 0$. Quindi

$$\Delta u = \Delta p^t + \Delta u - \Delta p^t = \Delta x_i [u_i - u_j \cdot \frac{p_i}{p_j} + \eta]$$

dove per il teorema della permanenza del segno, per Δx_i piccolo abbastanza il fattore in parentesi quadre ha il segno di $u_i - u_j \cdot (p_i/p_j)$ (perché η diventa più piccolo di questo in valore assoluto). E a questo punto il risultato è dimostrato: $u_i/u_j \neq p_i/p_j \iff u_i - u_j \cdot (p_i/p_j) \neq 0$, nel qual caso per ottenere $\Delta u > 0$ basta prendere un Δx del tipo considerato con Δx_i dello stesso segno di $u_i - u_j \cdot (p_i/p_j)$, piccolo abbastanza. □

Per contraddizione, da questa proposizione deriva direttamente che per ogni coppia di beni consumati in quantità positive il valore soggettivo deve essere uguale al prezzo; di fatto è la condizione di tangenza fra curva di indifferenza e vincolo che conosciamo (tieni fissi tutti gli altri beni e ti ritrovi in $\mathbb{R}^2$):

Corollario 1. *Se x è scelta ottima ed $x_i, x_j > 0$ allora $u_i/u_j = p_i/p_j$.*

Giusto per ricordarlo, sappiamo che questo equivale a dire che per ogni coppia di beni consumati in quantità positive l'utilità marginale della spesa sui due beni deve essere uguale. C'è d'altra parte da sottolineare che il risultato *assume* che il punto interno sia ottimo. La condizione di tangenza non implica ottimalità, come abbiamo visto nella sezione 2.6. Nel caso di due beni possiamo confermare che è sufficiente l'ipotesi di convessità:

Proposizione 3. *Nel caso di due beni e curve di indifferenza convesse, un punto sul vincolo in cui curva di indifferenza e vincolo sono tangenti è scelta ottima. Se le curve sono strettamente convesse il punto di tangenza sul vincolo è unico.*

Dimostrazione. Sia (x_0, y_0) il punto in questione. La curva di indifferenza passante per quel punto è decrescente, quindi la possiamo scrivere come $y = f(x)$. Nota che questo vuol dire $u(x, f(x)) = u(x_0, y_0)$. Per ipotesi questa f è tangente al vincolo in x_0, e poiché è convessa sta sopra la tangente; quindi per ogni altro punto (x, y) sul vincolo $y \leq f(x)$. Dalla monotonia di u segue allora che $u(x, y) \leq u(x, f(x)) = u(x_0, y_0)$. Nel caso di convessità stretta le curve stanno strettamente sopra le tangenti, quindi dall'argomento appena fatto segue che se per due punti

A e B sul vincolo passassero curve di indifferenza tangenti dovrebbe essere sia $u(A) > u(B)$ che $u(B) > u(A)$. $\square$

Come puoi indovinare lo stesso tipo di argomentazione vale per dimostrare che nel caso di curve di indifferenza *concave* (vedi figura 2.14) il punto di tangenza fra curva di indifferenza e vincolo è di utilità *minima*: le funzioni concave stanno sopra la tangente, quindi ogni altro punto sul vincolo ha utilità superiore al punto di tangenza.

Anche nel caso di n beni un'analoga ipotesi di convessità delle preferenze garantisce che un paniere strettamente positivo in cui le utilità marginali della spesa sono uguali è ottimo; però la dimostrazione richiede strumenti che noi non abbiamo. Tanto per saperlo, l'argomento è "quasi-concave programming".

5.3 Equazione di Slutsky e Legge della Domanda

Lo scopo qui è di dimostrare che la domanda di un bene normale è decrescente nel suo prezzo. Per far questo ci serviremo della cosiddetta equazione di Slutsky che è la forma locale "seria" degli effetti reddito e sostituzione.

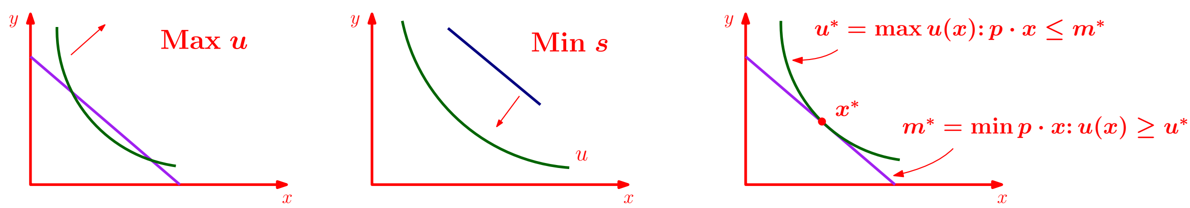
I panieri di scelta sono sempre $x \in \mathbb{R}^n_+$; e $p \cdot x \equiv \sum p_i x_i$, dove $p_i > 0\, \forall i$. Come sempre avremo una funzione di utilità u continua e monotona; e assumeremo anche che curve di indifferenza siano strettamente convesse e che entrambi i beni siano essenziali, così avremo soluzioni uniche interne. Assumeremo inoltre che tutte le funzioni che appaiono siano differenziabili e che le soluzioni di tutti i problemi considerati siano uniche.

Dobbiamo considerare i due problemi seguenti; il primo è quello che abbiamo visto sempre, il secondo è nuovo: minimizza la spesa necessaria ad ottenere un dato livello di utilità:

$$(\text{Max}u) \qquad \max u(x) \qquad\qquad (\text{Min}s) \qquad \min p \cdot x$$
$$s.a.\ p \cdot x \le m \qquad\qquad s.a.\ u(x) \ge u$$

Il secondo problema è fondamentale per isolare l'effetto sostituzione perché tiene l'utilità costante. Assumendo $m > 0$ ed $u > u(0)$, servirà dimostrare che se la spesa minima per raggiungere utilità u è m allora se hai m l'utilità massima che puoi raggiungere è u. In realtà, come è illustrato nella Figura 5.2, la soluzione dei due problemi è la stessa.

Figura 5.2: Max u, Min s



Indica con $x(p, m)$ la soluzione del problema Max$u$ e con $U(p, m) = u(x(p, m))$ l'utilità massima; analogamente per Min$s$ indica con $\tilde{x}(p, u)$ la soluzione e con $S(p, u) = p \cdot \tilde{x}(p, u)$ la relativa spesa minima. Nota che poiché $u > u(0)$ abbiamo $S(p, u) > 0$; e che dalla continuità di u segue che $u(\tilde{x}(p, u)) = u$, perché se $u(x) > u$ puoi raggiungere u con quantità inferiori di beni e quindi con spesa inferiore. Quanto sopra asserito è formalizzato nel seguente

Lemma. *(i)* $\tilde{x}(p,u) = x(p, S(p,u))$*; (ii)* $x(p,m) = \tilde{x}(p, U(p,m))$*; (iii)* $U(p, S(p,u)) = u$*.*

Dimostrazione. La parte (iii) segue direttamente dalla (i) perché $U(p, S(p,u)) = u(x(p, S(p,u))) = u(\tilde{x}(p,u)) = u$. Per la parte (i): supponi che $\tilde{x} \equiv \tilde{x}(p,u)$ non risolva Max$u$ con reddito $p \cdot \tilde{x}$; allora c'è x tale che $p \cdot x \leq p \cdot \tilde{x}$ ed $u(x) > u(\tilde{x})$; ma allora per $\alpha < 1$ sufficientemente vicino ad 1 avremmo $p \cdot \alpha x < p \cdot \tilde{x}$ ed $u(\alpha x) > u(\tilde{x})$ (continuità di u), contraddizione dell'ottimalità di $\tilde{x}$. La (ii) si dimostra analogamente. □

Differenziando la (i), ponendo $m = S(p,u)$ e sostituendo $u = U(p,m)$ dalla (iii), otteniamo

$$\left.\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right|_{p,m} + \left.\frac{\partial x_i}{\partial m}\right|_{p,m} \cdot \left.\frac{\partial S}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)}$$

Nota che la derivata al primo membro esprime bene l'effetto sostituzione perché $\tilde{x}$ risolve il problema con u costante - e dimostreremo che è sempre negativa. La derivata che ci interessa è la $\partial x_i / \partial p_i$ al secondo membro, ma per esprimerla in modo conveniente dobbiamo lavorare un minimo sull'ultimo termine.

Lemma. *Abbiamo*

$$(i)\ \left.\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} \leq 0\,; \qquad (ii)\ \left.\frac{\partial S}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} = x_i(p,m)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che S è concava in p, che cioè $S(\lambda p + (1-\lambda)p', u) \geq \lambda S(p,u) + (1-\lambda) S(p',u)$ per $0 \leq \lambda \leq 1$; ponendo $\tilde{x} = \tilde{x}(\lambda p + (1-\lambda)p', u)$ abbiamo $S(\lambda p + (1-\lambda)p', u) = (\lambda p + (1-\lambda)p') \cdot \tilde{x} = \lambda p \cdot \tilde{x} + (1-\lambda)p' \cdot \tilde{x}$, ma $p \cdot \tilde{x} \geq p \cdot \tilde{x}(p,m) = S(p,m)$ e $p' \cdot \tilde{x} \geq p' \cdot \tilde{x}(p',m) = S(p',m)$ da cui il risultato. Adesso la (ii): fissa $\tilde{x}^0 = \tilde{x}(p^0, u)$ e considera la funzione $\phi(p) = S(p,u) - px^0$; abbiamo $\phi(p) \leq \phi(p^0) = 0$, da cui $0 = \frac{\partial \phi}{\partial p_i}(p^0) = \frac{\partial S}{\partial p_i}(p^0, u) - \tilde{x}_i^0$; togliendo il soprascritto questo si legge $\left.\frac{\partial S}{\partial p_i}\right|_{p,u} = \tilde{x}_i(p,u)$; sostituendo $x(p,m) = \tilde{x}(p, U(p,m))$ dal lemma precedente otteniamo quanto voluto. Derivando adesso otteniamo $\partial \tilde{x}_i(p,u)/\partial p_i = \partial^2 S(p,u)/\partial p_i^2$, che è negativo per la concavità di S. □

Usando questo lemma e riarrangiando sopra otteniamo la ***equazione di Slutsky***:

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right|_{p,m} = \left.\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} - x_i(p,m) \cdot \left.\frac{\partial x_i}{\partial m}\right|_{p,m}$$

Questa è l'equazione che isola sostituzione e reddito: il primo termine a destra è l'effetto sostituzione - che abbiamo dimostrato essere sempre negativo - e il secondo l'effetto reddito - che può essere positivo se $\partial x_i / \partial m < 0$ e forte se $x_i(p,m)$ è grande. Ricordando che un bene normale è caratterizzato dalla $\partial x_i(p,m)/\partial m > 0$, l'equazione di Slutsky e la parte (i) dell'ultimo lemma implicano direttamente la ***legge della domanda:***

Teorema. *La domanda di un bene normale è decrescente nel suo prezzo.*

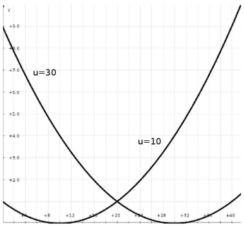
6 Esercizi

6.1 Utilità e vincolo di bilancio

Esercizio 1 (Curve di indifferenza). Dimostra che due curve di indifferenza non possono incontrarsi.

Esercizio 2. Disegna qualche curva di indifferenza della funzione di utilità $u(x, y) = 100 - (x - 10)^2 - (y - 10)^2$. Ti viene in mente qualche assunzione comune che le preferenze rappresentate da questa funzione *non* soddisfano?

Esercizio 3. Sia $u(x, y) = x + \sqrt{y}$. Considera la seguente costruzione delle curve di indifferenza $u = c$: $x + \sqrt{y} = c \Leftrightarrow \sqrt{y} = c - x \Leftrightarrow y = (c - x)^2 = (x - c)^2$. Per $c = 10, 30$ le curve così costruite sono riportate (riscalate per comodità di visualizzazione) nella figura di sotto. Ovviamente c'è errore, perché non sono decrescenti, si incrociano e d'altra parte se calcolo la pendenza è $-u_x/u_y = -2\sqrt{y} < 0$ (come deve essere). Dov'è l'errore? Trovalo e traccia approssimativamente la mappa giusta (diciamo per $c = 10, 20, 30$).



Esercizio 4 (Vincoli Multipli). Cercare lavoro costa tempo e denaro. Supponi di poter dedicare allo scopo, in una certa settimana, 30 ore e 75 Euro, e che ci sono due tipi di ricerca possibile: andare di persona o spedire una lettera. Ogni visita costa 7.5 Euro e 5 ore di tempo, e ogni lettera costa 1.5 Euro e mezz'ora di tempo. Supponendo che visite v e lettere ℓ possano assumere valori reali qualunque descrivi l'insieme delle scelte (v, ℓ) possibili.

Esercizio 5 (Ancora Vincoli Multipli). Una persona deve decidere come impiegare il suo tempo e il suo denaro in due attività a e b. Ha 20 ore e 50 Euro. Una unità di a prende un'ora e costa 10 Euro, una di b prende mezz'ora e costa 1 Euro. Descrivi l'insieme di scelte possibili nel piano (a, b).

Esercizio 6. Una giovane coppia che ha appena acquistato casa spende tutto il suo reddito, pari a 12.000 Euro, in spese di ristrutturazione dell'immobile e spese per l'acquisto di altri beni e servizi. Indichiamo con x le spese in ristrutturazioni e con y le altre spese. I prezzi dei due beni compositi siano $p_x = p_y = 1$). (a) Scrivi e disegna l'insieme delle scelte possibili (quelle al di sotto del vincolo di bilancio). (b) Il Governo offra adesso un rimborso del 50% della somma spesa per i lavori di ristrutturazione, rimborso che non può in ogni caso superare i 3000 Euro. Scrivi e disegna il nuovo insieme di scelte possibili.

6.2 Scelta

Esercizio 7 (Costi e benefici marginali). La mensa all'università costa 200€/mese, pagati ad inizio mese se si decide di usufruire del servizio, e si mangia quanto si vuole. Gli studenti consumano 6kg di cibo a testa. Cosa succede al consumo di cibo se (a) il costo mensile aumenta a 250€/mese a parità di condizioni (b) il costo mensile rimane invariato ma ogni etto di cibo costa 2€ alla cassa.

Esercizio 8. Trova la scelta ottima nei seguenti casi: (a) $u(x, y) = xy, p = 2, q = 3, m = 5$; (b) $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, p = 3, q = 2, m = 9000$; (c) $u(x, y) = y + \ln x, p = 2, q = 3, m = 10$ (*R:* $(x, y) = (\frac{5}{4}, \frac{5}{6}); (1200, 2700); (\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$)

Esercizio 9. Considera la scelta del consumatore con utilità $u(x, y) = xy^2$ e prezzi $p = 2, q = 1$ al variare di m. Sono entrambi beni normali? (*Sugg.* Trova $x(m), y(m)$ e lo vedi subito)

Esercizio 10. Considera un consumatore Cobb Douglas $u(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$con prezzi $p = (p_x, p_y)$ e tassa proporzionale t sul reddito m (cioè con vincolo $xp_x + yp_y = (1 - t)m$). (a) Ricava la scelta $x(p, m, t)$. (b) Scrivi l'espressione dell'elasticità di x rispetto a t, diciamo η.

Esercizio 11. Considera un consumatore con utilità $u(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ e reddito $m = 10$. Mostra che ottiene utilità maggiore con prezzi $(1, 5)$ che con prezzi $(2, 3)$.

Esercizio 12. (a) Assumi utilità $u(x, y) = xy$ e vincolo di bilancio $x + y = 10$. Il punto $(3, 7)$ risolve il problema di ottimo vincolato di questo consumatore? Se no, di quale bene si consuma troppo poco in quel punto? (b) Qual è il punto di ottimo sul vincolo $4x + 6y = 10$?

Esercizio 13. Assumi che la scelta ottima sia data dalla condizione di tangenza. Supponi che il nostro consumatore abbia $u_x/u_y = y/(x + 1)$ e che $q = 2, m = 10$. trova la scelta di x in funzione di p (*R:* $x = \frac{5}{p} - \frac{1}{2}$)

Esercizio 14. Un consumatore ha utilità $u(x, y) = x^{1/3} + y^{2/3}$ e vincolo $x + 2y = m > 0$. Determina la scelta ottima in funzione di m.

Esercizio 15. Sia $u(x, y) = 2xy, p = 10, q = 5$. Quanto deve spendere questa persona per ottenere un'utilità di 400? Assumi come prima che la soluzione sia nel punto di tangenza fra curva di utilità e retta della spesa (*R:* 200)

Esercizio 16. (a) Maria ha un reddito $m = 100$ e deve scegliere una combinazione di due tipi di vacanza: x giorni del tipo più caro, $p_x = 4$ e y giorni del tipo più economico, $p_y = 1$. Disegna le possibilità di scelta (delimitate dagli assi e dal vincolo di bilancio). (b) Il dottore le prescrive almeno 30 giorni di vacanza. Disegna le possibilità di scelta con questo ulteriore vincolo. (c) Se l'utilità è $u(x, y) = 5x + y$, Maria cambia la scelta in conseguenza della prescrizione del dottore?

Esercizio 17. Calcola l'utilità nel punto di ottimo del consumatore che massimizza $u(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_1^2$ sul vincolo $x_1 + 2x_2 = 8$.

Esercizio 18 (Scelta Intertemporale). Un consumatore ha reddito 50 e 100 rispettivamente nei periodi 1 e 2; il tasso di interesse è del 5%, e la sua funzione di utilità è $u(c_1, c_2) = c_1^{0.2}c_2^{0.8}$. Quanto risparmia nel primo periodo? (*R.* circa 21, è CD standard)

Esercizio 19. Considera un consumatore con utilità Cobb-Douglas $u(x, y) = \sqrt{xy}$ su due beni. Supponi che al tempo t prezzi e reddito siano p, q ed m, e al tempo $t + \Delta t$ diventino p', q' ed m'. Chiama U ed U' le utilità che il consumatore raggiunge nei due periodi. Dimostra che $U' > U$ se l'incremento relativo del reddito $(m' - m)/m$ è maggiore della media degli incrementi relativi dei due prezzi - che sono $(p' - p)/p$ e $(q' - q)/q$. Usa l'approssimazione $\ln x \approx x - 1$. (*Sugg.* Ti basta ottenere una disuguaglianza $m'/m > \dots$ e prendere i logaritmi)

Esercizio 20. Per il consumatore con utilità $u(x, y) = \min\{x, y\} + y$ disegna la mappa delle curve di indifferenza e trova la scelta ottima in funzione di $p_x/p_y \neq 1$.

Esercizio 21. Trova valori di prezzi e reddito per i quali le seguenti due funzioni dànno luogo a scelte diverse:

$$u_1(x, y) = \min\{x, y\} + y\,, \quad u_2(x, y) = 3\min\{x, y\} + y$$

(*Suggerimento:* Disegna)

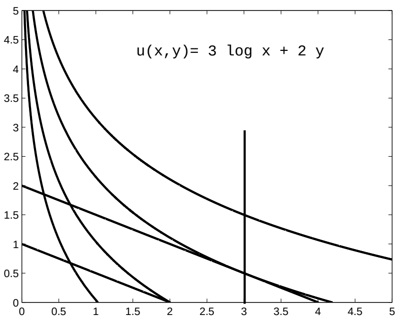
Esercizio 22 (Lavoro e tempo libero). Considera la funzione di utilità $u(c, L) = L(48+c-L)$ dove c è il consumo giornaliero ed L le ore di tempo libero. Sia $H = T - L$, con $T = 24$ (H indica ore di lavoro). Il prezzo del consumo è 1, il salario orario w. Il vincolo di bilancio è $c \leq wH$. Esprimi la scelta ottima di H in funzione di w e verifica che H cresce da 0 a 12 quando w cresce da 0 ad infinito.

Esercizio 23. Considera il consumatore con utilità $u(x, y) = x + \ln y$, con vincolo di bilancio $2x + y = m$, dove $m > 0$. Disegna le funzioni $x(m), y(m)$. (*Suggerimento:* se $m < 2$, $y(m) = m$. Per dimostrare questo osserva che $y \leq m$ sul vincolo, e che per tali valori le curve di indifferenza che intersecano il vincolo sono sempre meno ripide del vincolo stesso)

Esercizio 24. (lo stesso del precedente, in generale) Considera il problema di scelta del consumatore con $u(x, y) = x + \sqrt{y}$ sul vincolo $18x + y = m$. Mostra che esiste m_0 tale che per $m \geq m_0$ la soluzione è interna, per $m < m_0$ la scelta ottima ha $x = 0$.

Esercizio 25. Utilità $u(x, y) = \ln x + y$, vincolo $2x + qy = 20$. Dimostra che per q sufficientemente alto si ha $y = 0$. (*R.* $q \geq 20$)

Esercizio 26. Considera il consumatore con utilità $u(x, y) = 3\ln x + 2y$, reddito m e prezzi $p_x = 0.5$, $p_y = 1$. Il suo problema di scelta è $\max_{(x,y)}\ 3\ln x + 2y$ sul vincolo $0.5\,x + y = m$. (a) Trova la scelta ottima $(x(m), y(m))$ in funzione di m. Alcune curve di indifferenza e i vincoli per $m = 1, 2$ sono disegnate nella figura qui sotto. (b) Disegna $x(m)$ ed $y(m)$ in due grafici. (c) Trova adesso le scelte ottime come funzioni di domanda, $x(p_x)$ ed $y(p_y)$. (*Sugg.* la disuguaglianza da cui dipendono le soluzioni è $m \lesseqgtr 1.5p_y$).



Esercizio 27. $u(x, y) = a\log x + by$, prezzi e reddito p, q, m. Mostra che esiste m_0 tale che per $m \leq m_0$ la soluzione ha $y^{eq} = 0$ (compri solo x), per $m > m_0$ la soluzione è interna al vincolo. (*Sugg.* Disegna la mappa di u e capisci cosa succede)

Esercizio 28. $u(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$, $p_x = 20, p_y = 1$, $m = 300$. Quanto pagheresti per vedere p_x dimezzato? (Approssima: $1/\sqrt[3]{4} \approx 0.63$)

Esercizio 29. Consumo, due beni. Prezzi $p_1 = 10, p_2 = 5$. Dotazione iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt{80}, \sqrt{20})$, dunque reddito $m = 10 \cdot \sqrt{80} + 5\sqrt{20}$. Utilità $u(x,y) = \sqrt{xy}$. Nella soluzione del relativo problema di massimo vincolato, il presente individuo è un acquirente netto di quale bene? Di quanto? (*Suggerimento:* scrivi tutti i numeri come multipli di $\sqrt{5}$, e semplifica).

Esercizio 30. (a) (Facile) Le preferenze dei dirigenti di un istituto scolastico possono essere rappresentate dalla funzione di utilità $u(c,x) = cx^2$, dove c è la spesa in attrezzature informatiche ed x è la spesa in altri beni. L'istituto dispone di 60.000 Euro, sicché il vincolo di bilancio è $c + x = 60.000$. Determina la scelta ottima e illustra graficamente nel piano (c,x), verificando che il saggio marginale di sostituzione fra i due beni è decrescente. (b) (Più difficile) Sia quella del punto (a) la situazione fino all'anno t_0. Nell'anno t_1 il ministero dell'istruzione concede una sovvenzione di 10.000 Euro condizionata alla realizzazione di un incremento di almeno 10.000 Euro della spesa su c rispetto agli anni precedenti. Rappresenta graficamente il vincolo di bilancio al tempo t_1 e determina la scelta ottima, in particolare stabilendo se all'istituto conviene o meno avvalersi della sovvenzione.

Esercizio 31 (Somma di domande individuali). Considera due consumatori di due beni, con funzioni di utilità $u_1(x,y) = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$ ed $u_2(x,y) = xy$; hanno entrambi in dotazione 10 unità del bene y. Il prezzo di x è p, quello di y è 2. Trova la domanda aggregata del bene x, cioè $x_1(p) + x_2(p)$. E' decrescente?

Esercizio 32. Considera il problema di scelta intertemporale per il consumatore con $u(c_1, c_2) = c_1c_2, r = 0.05, m_1 = 400, m_2 = 0, p_1 = p_2 = 1$. (a) Trova la scelta ottima; (b) Quanto risparmia nel primo periodo?; (c) Se r passa a 0.08 ti aspetti un rapporto c_2/c_1 più alto o più basso di prima? Controlla.

Esercizio 33. Calcola la scelta intertemporale ottima con $u(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}, r = 0.05, m_1 = 8000, m_2 = 7400$.

Esercizio 34 (Scelta intertemporale). (a) Scrivi in termini di moneta al tempo 2 il vincolo di bilancio intertemporale su (c_1, c_2), consumo oggi e domani, di un consumatore con redditi m_1, m_2 nei due periodi, dove il prezzo di c_1 è 1, quello di c_2 è $1 + \pi$ con π tasso di inflazione, e i tassi nominali attivi e passivi sono $i_a < i_p$ (il tasso attivo si applica quando tu presti, quello passivo quando prendi a prestito). Denota con r_a, r_p i relativi tassi reali. Non ne abbiamo ancora parlato ma il tasso reale r è definito in termini di tasso nominale i ed inflazione π dalla relazione

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + \pi}$$

(a1) Se non ti piace $i_a < i_p$, fai il caso $i = i_a = i_p$. Che pendenza ha il vincolo? (b) Indica graficamente la natura della soluzione del problema della massimizzazione dell'utilità sul vincolo in (a).

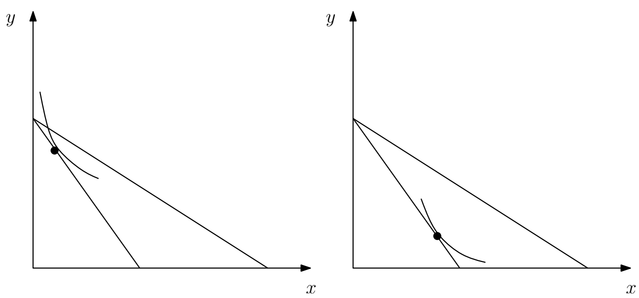
6.3 Effetto reddito, effetto sostituzione

Esercizio 35. Sia $u(x, y) = \ln x + y$, $p = 2$, $q = 3$, $m = 10$ inizialmente, e $\Delta q = -1$; scomponi $y(p, q + \Delta q, m) - y(p, q, m)$ nella parte dovuta all'effetto reddito e quella dovuta all'effetto sostituzione usando il metodo di Slutsky..

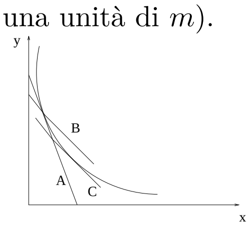
Esercizio 36. Utilità $u(x, y) = x^2 y$, prezzi $p = 4, q = 10$, reddito $m = 360$. Supponi che q scenda ad 8, e calcola effetto reddito e sostituzione nella variazione della scelta di y.

Esercizio 37. (a) Sia $u(x, y) = \sqrt{xy}, p^0 = (p_x, p_y) = (3, 2), m = 50, \Delta p = (\Delta p_x, \Delta p_y) = (0, 0.5)$. Calcola effetto reddito ed effetto sostituzione sul consumo di y con $\Delta m = y(p, m)\Delta p_y$. (b) Calcola il $\Delta^* m$ effettivamente necessario a lasciare il consumatore sulla curva di indifferenza iniziale. (c) Dimostra che per $\Delta q \to 0$ la differenza $\Delta^* m - \Delta m$ tende a zero più velocemente di Δq, cioè che $(\Delta^* m - \Delta m)/\Delta q \to 0$.

Esercizio 38. (a) Sia $u(x, y) = x + \sqrt{y}, p^0 = (p_x^0, p_y^0) = (18, 1), m^0 = 99, \Delta p = (\Delta p_x, \Delta p_y) = (-2, 0)$. Calcola effetto reddito ed effetto sostituzione con $\Delta m = x(p^0, m^0)\Delta p_x$. (b) Si vede in (a) che l'effetto sostituzione è preponderante. Pensi che la situazione iniziale del consumatore sia quella del pannello sinistro o quello destro della figura di sotto? A sinistra consuma poco x, a destra vicino al massimo che si può premettere. Verifica se l'intuizione è giusta calcolando $p_x^0 x/m^0, p_y^0 y/m^0$.



Esercizio 39. Con riferimento alla figura: siamo sul vincolo di bilancio A, poi p_x scende, e per calcolare l'effetto sostituzione poniamo $\Delta m = x^\star \Delta p_x$, per permettergli di ricomprare il paniere iniziale ai nuovi prezzi; graficamente lo portiamo sul vincolo B. Questo come sappiamo è una approssimazione della Δm che dovremmo attribuirgli, che dovrebbe essere tale da mantenerlo sulla stessa curva di indifferenza ai prezzi nuovi, portandolo sul vincolo C. Come si vede siamo "troppo generosi". Calcola di quanto nel caso seguente (la risposta è che in questo caso sbagliamo di una unità di m).



Utilità $u(x, y) = x + \sqrt{y}$, prezzi iniziali $p \equiv (p_x, p_y) = (18, 1)$, reddito $m = 99$. Poi $\Delta p = (-2, 0)$, cioè p_x scende di 2. Per controllare le risposte: $x(p)\Delta p_x = -2$, $u(x(p, m), y(p, m)) = 10$, mentre la Δm che lo porta sul vincolo C è -3.

Esercizio 40 (Beni inferiori). Un bene si dice *inferiore* se il suo consumo si riduce al crescere del reddito m. Supponi ci siano soltanto due beni x, y e che l'utilità sia monotona (se $x' > x, y' > y$ allora $u(x', y') > u(x, y)$). Anche i prezzi p_x, p_y siano dati. Dimostra che i due beni non possono essere entrambi inferiori. (*Sugg.* Fallo per contraddizione)

Esercizio 41. Sia $u(x, y) = \min\{x, 2y\}, q = 1, m = 15$. Supponi che p passi da 1 a 2. Trova le scelte ottime e dì quale parte della riduzione di domanda di x è dovuta all'effetto sostituzione.

Esercizio 42. Lo stesso di prima con $u(x, y) = x$.

Esercizio 43 (Utilità CES). Considera un consumatore con utilità $u(x, y) = (x^r + y^r)^{1/r}, r < 1$. (a) Trova la scelta di x che risolve $\max u$ sul vincolo $px + qy = m$, cioè trova $x(p, q, m)$. La scelta è interna. Puoi porre per convenienza $\sigma = 1/(1 - r) > 0$. (b) Prendi $r = -1$ e calcola l'effetto sostituzione (metodo Slutsky) dovuto ad una variazione di p da $p = 1$ a $p = 1.2$ (cioè $\Delta p = 0.2$), con $q = 1$ fisso, in funzione di m. Per saperlo: $1.1/(1.2 + \sqrt{1.2}) \approx 0.48$. ($R.$ $-0.02m$)

7 Appendice: Scambio competitivo e Pareto efficienza

In questa appendice torniamo sull'efficienza dell'equilibrio competitivo. Quello che abbiamo visto è che in un mercato competitivo si realizzano tutti e soli gli scambi reciprocamente vantaggiosi: dopo lo scambio compratore e venditore stanno meglio che prima. Questa proprietà la possiamo vedere così: per $q < q^{eq}$ compratori e venditori stanno entrambi peggio, perché aumentando q guadagnano entrambi; per $q > q^{eq}$, se p è il prezzo al quale avviene lo scambio, poiché $D(q) < S(q)$, se $p \leq D(q)$ - condizione necessaria perché il compratore stia meglio che senza lo scambio - sarà necessariamente $p < S(q)$ - che vuol dire che il venditore sta peggio. E analogamente puoi migliorare la posizione del venditore, ma solo peggiorando quella del compratore. La conclusione è che spostandoti dall'equilibrio competitivo *non puoi migliorare la posizione di qualcuno senza peggiorare quella di qualcun altro.* Questo è esattamente il criterio di efficienza che l'equilibrio competitivo soddisfa. Si chiama *Pareto efficienza*, da Vilfredo Pareto che l'ha inventato.

Considereremo adesso un'economia di scambio, cioè: ci mettiamo alle spalle la produzione, ognuno va al mercato col suo paniere di beni, fa gli scambi che gli conviene fare, e torna a casa. Tutti sono quindi venditori e compratori, e tutti prendono i prezzi come dati.

Ci sono n beni, quindi panieri e prezzi sono in $\mathbb{R}^n_+$.[16] Ci sono H individui, il signor h ha utilità $u^h : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ che assumiamo crescente in ogni variabile, e parte con una dotazione iniziale $w^h \in \mathbb{R}^n_+$. Il totale delle risorse dell'economia è quindi $\sum_h w^h \in \mathbb{R}^n_+$. A prezzi $p \in \mathbb{R}^n_+$ il signor h sceglie $x^h(p)$ che massimizza $u^h(x^h)$ sul vincolo di bilancio $px^h \leq pw^h$.

Definizione. Un vettore di panieri $x = (x^1, \dots, x^H) \in \mathbb{R}^{nH}_+$ è una *allocazione competitiva* se esiste p tale che $x^h = x^h(p)$ ed $\sum_h x^h(p) = \sum_h w^h$. Un vettore di panieri x è una *allocazione Pareto efficiente* se $\sum_h x^h = \sum_h w^h$ e non esiste un altro vettore z tale che $\sum_h z^h = \sum_h w^h$ e per ogni h sia $u^h(z^h) \geq u^h(x^h)$ con disuguaglianza stretta per qualche h.

Proposizione. *Una allocazione competitiva è Pareto efficiente.*

Dimostrazione. Supponi che l'allocazione competitiva x non lo sia, e prendi un vettore z che la batte. Per ogni h deve essere $pz^h \geq px^h$ con disuguaglianza stretta per qualche h (perché gli x^h sono scelte ottime sui vincoli di bilancio). Ma allora $p \sum_h z^h = \sum_h pz^h > \sum_h pw^h = p \sum_h w^h$, che contraddice $\sum_h z^h = \sum_h w^h$. □

[16] La notazione e le altre proprietà di base di $\mathbb{R}^n_+$ le prendiamo dal capitolo *Geometria della Tangenza.*