

Integrale di convoluzione

Prof. G. Miano

Si consideri un circuito lineare tempo-invariante N in evoluzione forzata, costituito da elementi lineari e tempo-invarianti e con un solo generatore indipendente. Lo si consideri, per descriverne il funzionamento, come un sistema *ingresso-uscita*, vale a dire che, si sceglie una coppia di morsetti da cui alimentare il circuito con, ad esempio, un generatore di tensione indipendente, e sia, ad esempio, la tensione di un determinato lato, la grandezza di uscita di interesse, figura 3. La tensione $e=e(t)$ imposta dal generatore svolge il ruolo di ingresso, mentre la $v=v(t)$ quello di uscita: la tensione v è la risposta forzata (risposta con stato zero) del circuito al segnale $e(t)$ applicato in ingresso.

Il circuito di figura 3 può essere considerato come un doppio bipolo. Il generatore indipendente rappresenta una tensione applicata alla porta di ingresso e prodotta da un altro circuito. Il più delle volte esso è un “segnale” che deve essere “elaborato”. A sua volta, la tensione della porta di uscita va a sollecitare un altro circuito.

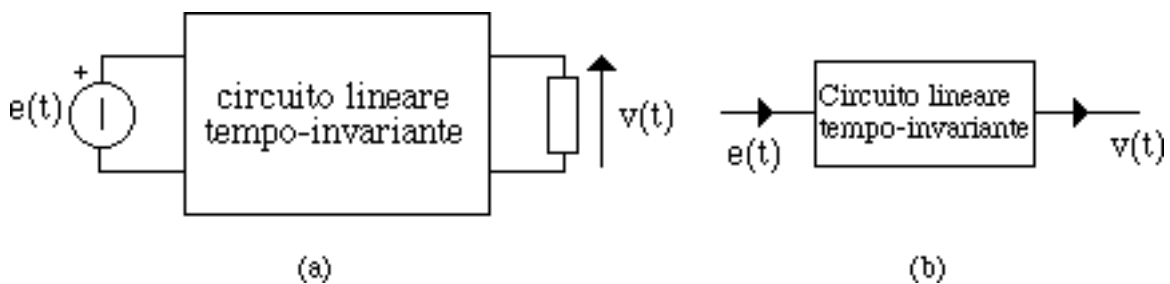


Figura 3 Il circuito N è sollecitato dal generatore di tensione $e(t)$ e $v(t)$ è l'uscita di interesse (a); relativo schema a blocchi (b).

Si consideri la funzione $e_{\Delta}^* = e_{\Delta}^*(t)$ data dalla seguente espressione

$$e_{\Delta}^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(t_k) \Pi_{\Delta}(t - t_k) \Delta, \quad (1)$$

dove $\Pi_{\Delta}(t)$ è la funzione impulso rettangolare

$$\Pi_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} < t < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & t < -\frac{\Delta}{2} \text{ e } \frac{\Delta}{2} < t \end{cases} = \frac{1}{\Delta} \left[u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right], \quad (2)$$

e $t_k = k\Delta$ con k intero. La funzione $e_{\Delta}^*(t)$ è un approssimante della funzione di ingresso $e(t)$. La (1) è stata ottenuta partizionando l'intervallo di definizione della $e(t)$ in tante parti uguali di ampiezza Δ , e in ognuno di questi intervalli $e(t)$ viene approssimata con un impulso rettangolare di ampiezza pari al valore che la funzione assume al centro dell'intervallo, così come mostrato in figura 4. Infatti, dalla (1) si ha:

$$e_{\Delta}^*(t_k) = e(t_k). \quad (3)$$

Si consideri, ora, la (1) per valori di Δ sempre più piccoli. Si intuisce immediatamente che quanto più piccolo è Δ , tanto meglio $e_{\Delta}^*(t)$ approssima la funzione $e=e(t)$. Quando $\Delta \rightarrow 0$, $e_{\Delta}^*(t)$ tende, in “qualche modo”, alla funzione $e(t)$. Infatti, dalla (1) si ottiene, passando al limite $\Delta \rightarrow 0$, (la sommatoria di *infiniti termini infinitesimi* si tramuta in un integrale e la funzione impulso rettangolare è diventata un impulso di Dirac ¹):

$$e_{\Delta}^*(t) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) dt = e(t); \quad (4)$$

nella (4) è stata usata la proprietà di campionamento della funzione impulsiva di Dirac.

L'idea, che è alla base dell'integrale di convoluzione, è sostanzialmente questa: determinare la risposta del circuito quando è applicato l'ingresso $e_{\Delta}^*(t)$, (approssimante l'ingresso vero $e(t)$), e poi considerarne il limite $\Delta \rightarrow 0$. La risposta a $e_{\Delta}^*(t)$ viene determinata usando la sovrapposizione degli effetti.

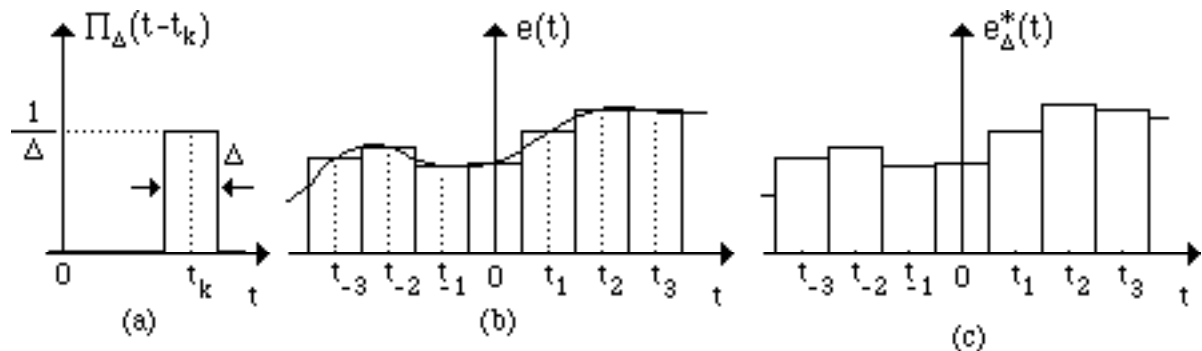


Figura 4

- Risposta all'impulso rettangolare

Si indichi con $h_{\Delta} = h_{\Delta}(t)$ la risposta forzata del circuito, quando in ingresso agisce un impulso rettangolare $\Pi_{\Delta}(t)$. Essa viene denominata risposta all'impulso rettangolare. Esaminiamo alcune proprietà della funzione $h_{\Delta} = h_{\Delta}(t)$, implicite nella sua definizione.

Innanzitutto, si noti che ²:

$$h_{\Delta}(t) = 0 \quad \text{per } t < -\frac{\Delta}{2}, \quad (5)$$

perché, in questo caso, l'ingresso è identicamente nullo per $t < -\Delta/2$ e il circuito è a riposo all'istante “remoto” $t_0 = -\infty$. Inoltre per la linearità del circuito la risposta forzata all'ingresso $\alpha \Pi_{\Delta}(t)$ deve essere $\alpha h_{\Delta}(t)$. Si noti che, questa proprietà non sarebbe verificata se il circuito non fosse inizialmente a riposo. Si supponga, ora, che l'ingresso sia un impulso rettangolare traslato di τ_k nel tempo $\Pi_{\Delta}(t - \tau_k)$. Allora per l'ipotesi di tempo-invarianza del circuito, la risposta forzata è quella che si otterrebbe traslando di τ_k nel tempo la risposta all'impulso $\Pi_{\Delta}(t)$, e quindi si ha $h_{\Delta}(t - \tau_k)$. Se il circuito fosse tempo-variante tale proprietà non sarebbe valida, in quanto la forma

¹ Un'analisi rigorosa di questo problema richiede l'uso della teoria delle distribuzioni.

² Questa proprietà in letteratura viene, spesso, denominata *proprietà di causalità*.

d'onda della risposta dipenderebbe anche dall'istante di applicazione dell'ingresso. In questo caso la risposta all'impulso sarebbe del tipo $h_{\Delta}(t; \tau_k)$. Si noti che la possibilità di traslare l'uscita, per avere la risposta a un ingresso traslato non dipende affatto dalla linearità. Si assuma ora un ingresso del tipo $\alpha_k \Pi_{\Delta}(t - \tau_k) + \alpha_h \Pi_{\Delta}(t - \tau_h)$. Per la linearità e per le proprietà della funzione $h_{\Delta}(t - \tau_k)$ appena descritte, la risposta forzata del circuito vale $\alpha_k h_{\Delta}(t - \tau_k) + \alpha_h h_{\Delta}(t - \tau_h)$. Tutte queste proprietà sono riassunte in figura 5.

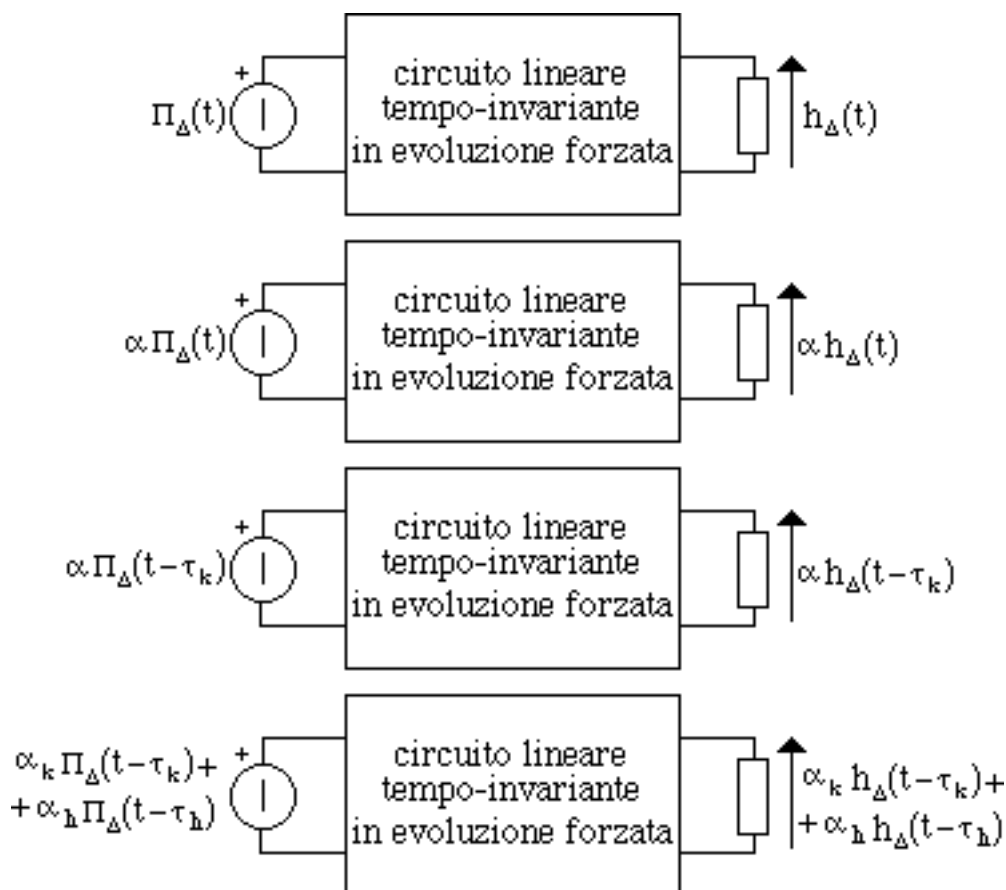


Figura 5

Usando la risposta all'impulso rettangolare $h_{\Delta}(t)$ e le sue proprietà, è possibile determinare la risposta forzata $v_{\Delta}(t)$ all'ingresso $e_{\Delta}^*(t)$ dato dalla (1): essa rappresenta un approssimante della risposta forzata del circuito all'ingresso $e(t)$. Pertanto, in virtù della linearità e della tempo-invarianza del circuito, la funzione $v_{\Delta}(t)$ approssimante la risposta forzata del circuito $v(t)$ all'ingresso $e(t)$, è data da

$$v_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(t_k) h_{\Delta}(t - t_k) \Delta. \quad (6)$$

Al tendere di Δ a zero, l'impulso rettangolare $\Pi_{\Delta}(t)$ tende all'impulso di Dirac $\delta(t)$, $e_{\Delta}^*(t)$ tende all'ingresso $e(t)$, la risposta all'impulso rettangolare $h_{\Delta}(t)$ tende alla risposta $h(t)$, che si avrebbe se in ingresso vi fosse un impulso di Dirac, la $v_{\Delta}(t)$ tende all'uscita $v(t)$ e la somma (6) si trasforma nell'integrale

$$v_{\Delta}(t) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (7)$$

e quindi ³

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (8)$$

La funzione $h=h(t)$ è la risposta forzata del circuito quando l'ingresso è l'impulso di Dirac $\delta(t)$. Una volta stabiliti l'ingresso e l'uscita del circuito, $h(t)$ dipende solo dai parametri degli elementi che costituiscono il circuito e da come sono connessi.

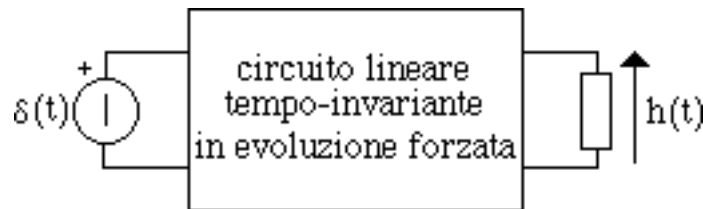


Figura 6

La (7) mostra che il valore di v all'istante t è un integrale - nella variabile τ - calcolato nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, del prodotto $h(t - \tau)e(\tau)$: $v(\cdot)$ è la convoluzione della risposta all'impulso $h(\cdot)$ con l'ingresso $e(\cdot)$ ⁴.

Riassumendo, per i circuiti lineari tempo-invarianti in evoluzione forzata e con un solo generatore indipendente si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Risposta} \\ \text{forzata} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Risposta} \\ \text{all'impulso} \end{array} \right\} * \{ \text{ingresso} \}$$

(Al simbolo $(f_1 * f_2)$ si dà il nome di prodotto di convoluzione). Se vi fossero più generatori, è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti: in generale a ingressi diversi corrisponde una diversa risposta all'impulso.

La risposta $h(t)$ all'impulso di Dirac è uguale a zero per t minore di zero:

$$h(t) = 0 \quad \text{per } t \leq 0^-; \quad (9)$$

la (9) si ottiene direttamente dalla (5) per $\Delta \rightarrow 0$. Usando la proprietà (9), l'integrale (8) diventa

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t^+} e(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (10)$$

Il problema della convergenza dell'integrale improprio (10) verrà affrontato in seguito; per ora si assuma che esso converga. Nel caso in cui l'ingresso è identicamente nullo per $t < t_0$, l'integrale (10) diventa ⁵:

³ Il problema della convergenza di $h_\Delta(t)$ alla risposta all'impulso di Dirac $h(t)$, di $v_\Delta(t)$ alla $v(t)$ e della "somma" (6) all'integrale (7), per $\Delta \rightarrow 0$, non viene affrontato in queste lezioni. Comunque le condizioni che la assicurano sono così ampie da poterle ritenere sempre verificate nei casi di interesse.

⁴ Siano $f_1(t)$ e $f_2(t)$ due funzioni definite in $(-\infty, +\infty)$: la convoluzione delle funzioni del tempo $f_1(t)$ e $f_2(t)$ è una nuova funzione del tempo denotata con $(f_1 * f_2)(t)$ e definita, per ogni t , da: $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau$.

⁵ I limiti di integrazione sono appositamente selezionati come t_0^- e t^+ perché $h(t)$ e/o $e(t)$ potrebbero avere un impulso di Dirac all'istante t_0 .

$$v(t) = \int_{t_0}^{t^+} e(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (11)$$

(È sempre possibile traslare l'origine del riferimento per il tempo in modo tale da farlo coincidere con l'istante iniziale t_0 se t_0 è finito, e quindi porre $t_0 = 0$).

L'integrale di convoluzione (10) (oppure la versione particolare (11)) dà la risposta forzata del circuito a qualsiasi ingresso $e(t)$, a condizione che si conosca la funzione $h(t)$, cioè la risposta all'impulso. Questo risultato è, in effetti, del tutto generale: la risposta forzata di un sistema lineare e tempo-invariante ad una sollecitazione impulsiva, applicata nell'istante $t=0$, contiene tutte informazioni necessarie a caratterizzare il sistema stesso. A questo punto la soluzione del problema è ricondotta allo studio della risposta all'impulso di Dirac.

Prima di passare a descrivere i metodi di calcolo e le proprietà della risposta impulsiva, è utile illustrarne il significato attraverso un'applicazione.

Esempio

Si consideri il circuito di figura 7 e si determini la risposta all'ingresso illustrato in figura 7b usando l'integrale di convoluzione (si assuma come uscita la tensione del condensatore). Si determini la risposta all'impulso unitario come limite della risposta all'impulso rettangolare per $\Delta \rightarrow 0$ figura 7a.

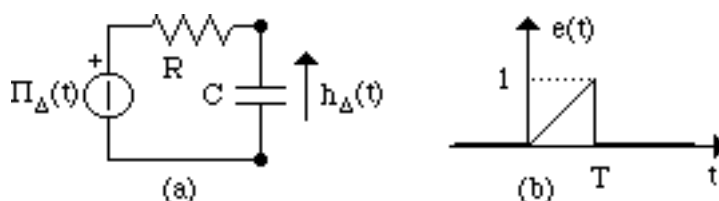


Figura 7

Il circuito in esame è del primo ordine e l'equazione di stato è:

$$\tau_R \frac{dh_{\Delta}}{dt} + h_{\Delta} = \begin{cases} 0 & t < -\Delta/2 \\ 1/\Delta & -\Delta/2 < t < \Delta/2 \\ 0 & \Delta/2 < t \end{cases}; \quad (12)$$

$\tau_R = RC$ è la costante di tempo del circuito. La tensione del condensatore $h_{\Delta}(t)$ è continua perché il generatore di tensione è limitato.

Per $t < -\Delta/2$ il circuito è a riposo, quindi la tensione del condensatore è uguale a zero all'istante $t = -\Delta/2$. Pertanto $h_{\Delta}(t)$ nell'intervallo $-\Delta/2 < t < \Delta/2$ deve essere soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dh_{\Delta}}{dt} + \frac{h_{\Delta}}{\tau_R} = \frac{1}{\tau_R \Delta}, \\ h_{\Delta}(t = -\Delta/2) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

La soluzione del problema (13) vale (per $-\Delta/2 < t < \Delta/2$)

$$h_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} [1 - e^{-(t+\Delta/2)/\tau_R}]. \quad (14)$$

Siccome la tensione del condensatore è continua, si ha

$$h_{\Delta}(t = \Delta / 2) = \frac{1}{\Delta}(1 - e^{-\Delta/\tau_R}). \quad (15)$$

Per $t > \Delta / 2$ il circuito è in evoluzione libera, quindi si ha

$$h_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta}(1 - e^{-\Delta/\tau_R})e^{-(t-\Delta/2)/\tau_R}. \quad (16)$$

Riassumendo, la risposta $h_{\Delta}(t)$ del circuito illustrato in figura 7a vale

$$h_{\Delta}(t) = u(t + \Delta / 2) \begin{cases} \frac{1}{\Delta}[1 - e^{-(t+\Delta/2)/\tau_R}] & t < \Delta / 2 \\ \frac{1}{\Delta}(1 - e^{-\Delta/\tau_R})e^{-(t-\Delta/2)/\tau_R} & \Delta / 2 < t \end{cases}. \quad (17)$$

Cosa accade quando $\Delta \rightarrow 0$? Facendo il limite si ha

$$h_{\Delta}(t) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} h(t) = u(t) \left(\frac{1}{\tau_R} e^{-t/\tau_R} \right). \quad (18)$$

Nel limite $\Delta \rightarrow 0$ la (18), e quindi la tensione del condensatore, presenta un salto di discontinuità a $t=0$. Pur essendo per $\Delta \rightarrow 0$ la durata dell'applicazione della sollecitazione sempre più piccola, l'intensità di quest'ultima cresce come $1/\Delta$ (l'impulso rettangolare ha area unitaria per qualsiasi Δ), e quindi è in grado di modificare istantaneamente lo stato del circuito, figura 8. Per $t>0$ il circuito è in evoluzione libera.

È immediato verificare che la (18) coincide con la risposta forzata che si avrebbe nel caso in cui l'ingresso fosse un impulso di Dirac unitario applicato all'istante $t=0$. Infatti, l'impulso di tensione produce un impulso di corrente $\delta(t)/R$ nel circuito, che carica istantaneamente il condensatore alla tensione $v(0^+) = 1/\tau_R$. Come già abbiamo visto, per $t \geq 0^+$ il circuito è in evoluzione libera.

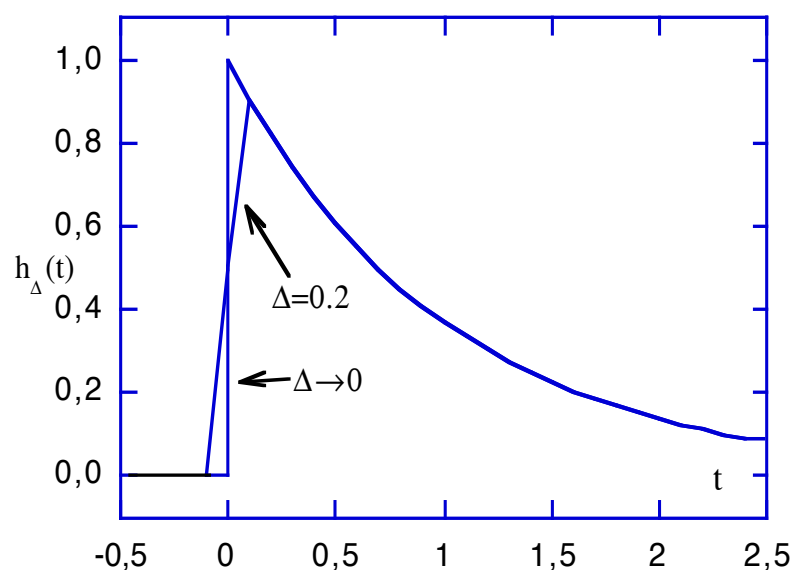


Figura 8 Andamento di $h_{\Delta}(t)$ con $\tau_R = 1$ e per $\Delta=0.2$ e $\Delta \rightarrow 0$.

Ora bisogna determinare la risposta nel caso in cui l'ingresso è il segnale descritto in figura 7b. La sua espressione analitica è

$$e(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ t/T & 0 \leq t \leq T, \\ 0 & t > T. \end{cases} \quad (19)$$

Sostituendo la (18) nell'integrale di convoluzione (11) si ottiene per $t \geq 0$:

$$v(t) = e^{-t/\tau_R} \int_0^t e^{\tau/\tau_R} e(\tau) d\tau; \quad (20)$$

sostituendo, ora, la (19) nella (20) e integrando si ha

$$v(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t/\tau_R}}{T} \int_0^t (e^{\tau/\tau_R} \tau) d\tau = \tau_R [\tau_R e^{-t/\tau_R} + (t - \tau_R)] & 0 \leq t \leq T \\ \frac{e^{-t/\tau_R}}{T} \int_0^T (e^{\tau/\tau_R} \tau) d\tau = \tau_R [\tau_R + e^{T/\tau_R} (T - \tau_R)] e^{-t/\tau_R} & t \geq T \end{cases}. \quad (21)$$

9.3 Risposta all'impulso: metodi di calcolo e proprietà

Per determinare la risposta all'impulso è possibile utilizzare diversi metodi. Il metodo fondamentale consiste nel risolvere direttamente un circuito in evoluzione forzata con generatore impulsivo.

9.3.1 Soluzione di un circuito con generatori impulsivi attraverso la determinazione delle condizioni iniziali a $t = 0^+$

Si consideri la risposta forzata di un circuito lineare tempo-invariante a un generatore impulsivo applicato all'istante $t=0$, ad esempio, il circuito di figura 9; si assuma la tensione del condensatore come uscita. Nel caso in cui la grandezza di uscita non coincida con una grandezza di stato, conviene ricondurre la soluzione del circuito alla soluzione delle equazioni di stato. Una volta determinato lo stato si calcola la grandezza di interesse (non di stato), usando il circuito resistivo associato.

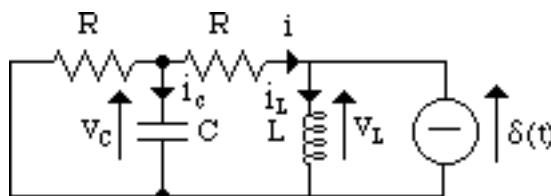


Figura 9 Un esempio di circuito in evoluzione forzata con generatore impulsivo di corrente.

Per $t < 0$ il circuito è nello stato di riposo (tutte le grandezze sono nulle e quindi anche le grandezze di stato). All'istante $t=0$ è applicata una corrente (o tensione) impulsiva attraverso un generatore di corrente (rispettivamente, un generatore di tensione) impulsivo. Di conseguenza, le correnti che circolano nei condensatori e le tensioni degli induttori possono essere impulsive all'istante $t=0$ e le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori (cioè le grandezze di stato del circuito), possono essere discontinue in quell'istante: le grandezze di stato pur essendo identicamente nulle per $t < 0$, possono essere diverse da zero all'istante $t = 0^+$. Per $t \geq 0^+$ il circuito è in evoluzione libera, perché

il generatore impulsivo si spegne immediatamente dopo l'istante di applicazione $t=0$. Se si conoscessero le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori all'istante $t = 0^+$, la soluzione del problema potrebbe essere ottenuta risolvendo il circuito in evoluzione libera a partire dall'istante $t = 0^+$.

Per determinare il salto di discontinuità delle tensioni dei condensatori e delle correnti negli induttori all'istante $t=0$, bisogna usare le loro relazioni caratteristiche. Per esemplificare, si consideri il circuito rappresentato in figura 9. Le equazioni caratteristiche dei bipoli dinamici sono:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_c}{dt} &= i_c, \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_L. \end{aligned} \quad (22)$$

I valori delle grandezze di stato sono noti all'istante $t = 0^-$, e sono:

$$v_c(0^-) = 0, \quad i_L(0^-) = 0. \quad (23)$$

Per determinare i valori che esse assumono all'istante $t = 0^+$, bisogna considerare l'integrale definito, nel dominio $(0^-, 0^+)$, di ambo i membri delle equazioni (22). Operando in questo modo e usando le (23), si ottiene:

$$\begin{aligned} v_c(0^+) &= \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_c(\tau) d\tau, \\ i_L(0^+) &= \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_L(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

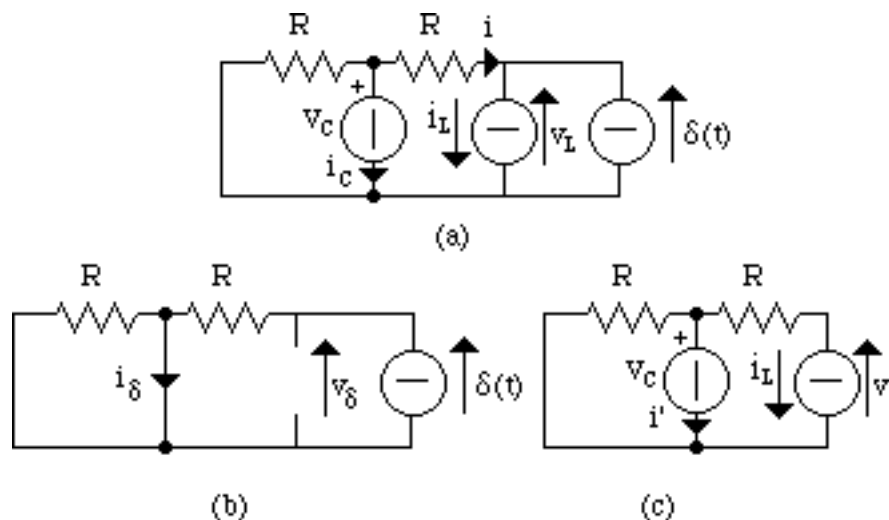


Figura 10 Circuito resistivo associato al circuito dinamico di figura 8 (a) e circuiti ausiliari per la soluzione del circuito resistivo associato tramite la sovrapposizione degli effetti (b) e (c).

Ora bisogna esprimere la corrente nel condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato e della corrente del generatore impulsivo. A tale scopo è utile considerare il circuito resistivo associato, cioè il circuito ottenuto sostituendo in quello in esame, al posto del condensatore un generatore di tensione con tensione pari a v_c e al posto dell'induttore un generatore di corrente con corrente pari a i_L , figura 10a. Si può risolvere il circuito resistivo associato usando la sovrapposizione degli effetti. Operando in questo modo si ha per i_c e v_L :

$$\begin{aligned} i_c &= i_\delta + i', \\ v_L &= v_\delta + v', \end{aligned} \quad (25)$$

dove i_δ e v_δ sono, rispettivamente, i contributi del generatore impulsivo alla corrente nel condensatore e alla tensione dell'induttore e i' e v' sono i contributi dei generatori di sostituzione: i_δ e v_δ sono soluzione del circuito che si ottiene spegnendo i generatori di sostituzione e lasciando acceso solo quello impulsivo (figura 10b), e quindi sono certamente funzioni impulsive; i' e v' sono soluzione del circuito che si ottiene spegnendo il generatore impulsivo e lasciando accesi solo quelli di sostituzione (figura 10c).

Se si esclude il caso molto particolare e anche poco significativo in cui generatori impulsivi di tensione sono in parallelo ai condensatori o generatori impulsivi di corrente sono in serie agli induttori, le grandezze di stato si mantengono limitate per ogni t , pur presentando dei punti di discontinuità di prima specie. Di conseguenza la soluzione del circuito di figura 10c è limitata e quindi sono limitate anche i' e v' . È immediato, allora, che qualunque siano i valori (limitati) di i' e v' nell'intorno di $t=0$, essi non danno nessun contributo agli integrali nelle equazioni (24). L'unico contributo diverso da zero può venire dai termini i_δ e v_δ . Pertanto si ha

$$\begin{aligned} v_c(0^+) &= \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_\delta(\tau) d\tau, \\ i_L(0^+) &= \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_\delta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Risolvendo il circuito di figura 10b si ottiene:

$$i_\delta = \delta(t), \quad v_\delta = R\delta(t); \quad (27)$$

dopo avere sostituito le (27) nelle (26), si ha:

$$v_c(0^+) = \frac{1}{C}, \quad i_L(0^+) = \frac{R}{L}. \quad (28)$$

A questo punto bisogna risolvere un circuito in evoluzione libera con le condizioni iniziali (28) per lo stato. Per determinare le equazioni di stato per $t \geq 0^+$, bisogna esprimere la corrente nel condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato v_c e i_L . Ciò può essere fatto risolvendo il circuito di figura 10c. In questo modo si ottiene per $t \geq 0^+$

$$\begin{aligned} C \frac{dv_c}{dt} &= -\frac{v_c}{R} - i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_c - Ri_L. \end{aligned} \quad (29)$$

Il sistema (29) è omogeneo. Dovendo calcolare la tensione del condensatore, conviene ridurlo a una equazione scalare del secondo ordine nella funzione incognita $v_c(t)$. Derivando ambo i membri della prima equazione di stato rispetto al tempo e usando la seconda, si ottiene

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dv_c}{dt} + \frac{2}{LC} v_c = 0 \quad \text{per } t \geq 0^+. \quad (30)$$

L'integrale generale dell'equazione (31) è

$$v_c(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}, \quad (31)$$

dove λ_+ e λ_- sono le due pulsazioni naturali del circuito (si assuma che siano distinte), soluzioni dell'equazione algebrica:

$$\lambda^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \lambda + \frac{2}{LC} = 0, \quad (32)$$

e K_+ e K_- sono le due costanti di integrazione, che bisogna determinare imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} K_+ + K_- &= v_c(0^+) = \frac{1}{C}, \\ \lambda_+ K_+ + \lambda_- K_- &= \left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

La seconda delle (33) è stata ottenuta usando la prima equazione del sistema (29) e le condizioni iniziali per lo stato (28). Pertanto, la risposta all'impulso del circuito in esame vale:

$$h(t) = (K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}) u(t). \quad (34)$$

Si assumano, ora, i seguenti valori per i parametri del circuito $R=1$, $C=1\mu\text{F}$, $L=1\mu\text{H}$. Le radici dell'equazione algebrica caratteristica sono in questo caso complesse coniugate e valgono

$$\lambda_{\pm} = 10^6 (-1 \pm i), \quad (35)$$

e l'integrale generale dell'equazione (30) può essere posto nella forma

$$v_c(t) = A e^{-10^6 t} \cos(10^6 t + \vartheta) \quad (t \geq 0^+). \quad (36)$$

Per determinare le due costanti di integrazione A e ϑ c'è bisogno di imporre $v_c(0^+)$ e $\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0^+}$.

Esse valgono

$$v_c(0^+) = 10^6, \quad \left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0^+} = -2 \cdot 10^{12}. \quad (37)$$

Imponendo alla (36) le condizioni iniziali (37), si ottiene il sistema di equazioni per le due costanti di integrazione A e ϑ ,

$$\begin{aligned} A \cos(\vartheta) &= 10^6, \\ A \cos(\vartheta) + A \sin(\vartheta) &= 2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (38)$$

Risolvendo il sistema (38), si ha:

$$A = \sqrt{2} 10^6, \quad \vartheta = \pi / 4. \quad (39)$$

In definitiva, la risposta all'impulso di Dirac di ampiezza unitaria vale, per il caso in esame:

$$h(t) = [\sqrt{2} 10^6 e^{-10^6 t} \cos(10^6 t + \pi / 4)] u(t). \quad (40)$$

Se la grandezza di uscita fosse diversa da quelle di stato, ad esempio la corrente nel condensatore oppure la corrente nel resistore che collega il condensatore all'induttore, allora, bisognerebbe determinare prima l'evoluzione delle grandezze di stato e poi usando il circuito resistivo associato determinare la grandezza di interesse. Ad esempio si assuma come grandezza di uscita la corrente $i=i(t)$ che circola nel resistore (figura 9). Applicando la prima legge di Kirchhoff si ha

$$i(t) = i_L(t) - \delta(t). \quad (41)$$

La corrente che circola nell'induttore è uguale a zero per $t < 0$ e per $t > 0$ è legata alla tensione del condensatore tramite l'equazione

$$i_L = -C \frac{dv_c}{dt} - \frac{v_c}{R}. \quad (42)$$

La (42) è stata ottenuta dalla prima equazione del sistema (29). Sostituendo nella (42) l'espressione (31), si ottiene:

$$i_L = -(C\lambda_+ + \frac{1}{R})K_+e^{\lambda_+t} - (C\lambda_- + \frac{1}{R})K_-e^{\lambda_-t} \quad \text{per } t > 0. \quad (43)$$

Pertanto la risposta all'impulso vale:

$$h(t) = -[(C\lambda_+ + \frac{1}{R})K_+e^{\lambda_+t} + (C\lambda_- + \frac{1}{R})K_-e^{\lambda_-t}]u(t) - \delta(t). \quad (44)$$

Quando l'uscita non è una variabile di stato, la risposta all'impulso può contenere un impulso di Dirac, applicato all'istante $t=0$.

La procedura che è stata descritta è generale e può essere usata per qualsiasi circuito. Si consideri un circuito con N_c condensatori e N_L induttori (quindi l'ordine del circuito è $n = N_c + N_L$).

Procedura per determinare la risposta impulsiva di un circuito

- Passo 1.* Si determini il contributo del generatore impulsivo alle correnti nei condensatori e alle tensioni degli induttori, risolvendo il circuito resistivo ottenuto sostituendo a ogni condensatore un corto circuito e a ogni induttore un circuito aperto.
- Passo 2.* Si determinino i valori delle tensioni dei condensatori e delle correnti negli induttori all'istante $t = 0^+$ usando le loro equazioni caratteristiche e i risultati del passo 1 (le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori sono identicamente nulle per $t \geq 0^-$).
- Passo 3.* Si risolva il circuito in evoluzione libera a partire dall'istante $t = 0^+$ con le condizioni iniziali per le grandezze di stato determinate al passo precedente.

9.3.2 Proprietà della risposta all'impulso di Dirac

Se la grandezza di uscita è una variabile di stato, allora la risposta all'impulso $h(t)$ non contiene funzioni singolari, invece dh/dt può contenere un impulso applicato all'istante $t=0$, come richiesto

dalle equazioni circuitali. Per $t > 0$ la risposta all'impulso è soluzione dell'equazione omogenea, e quindi può essere espressa attraverso gli n modi naturali di evoluzione del circuito. Supponendo, per semplicità (e anche perché è il caso più significativo), che tutte le frequenze naturali del circuito siano distinte, si ha

$$h(t) = \sum_{h=1}^n K_h e^{\lambda_h t} \quad t > 0. \quad (45)$$

Le costanti K_h dipendono dal valore delle grandezze di stato all'istante $t = 0^+$. Poiché, per $t < 0$ il circuito è nello stato di riposo, e poiché $h(t)$ non include funzioni singolari, si può scrivere (per ogni t)

$$h(t) = \left(\sum_{h=1}^n K_h e^{\lambda_h t} \right) u(t). \quad (46)$$

Nel caso in cui l'uscita non sia una grandezza di stato, la risposta all'impulso potrebbe includere un impulso applicato nell'origine,

$$h(t) = \left(\sum_{h=1}^n K_h e^{\lambda_h t} \right) u(t) + k_0 \delta(t). \quad (47)$$

dove k_0 è una costante. La risposta all'impulso include anche un impulso del primo ordine quando l'ingresso è la tensione del condensatore (rispettivamente, la corrente dell'induttore) e l'uscita è la corrente nel condensatore (rispettivamente, la tensione dell'induttore).

Si assuma che l'uscita del circuito sia una grandezza di stato. Allora è facile verificare che, esiste sempre una costante K positiva tale che:

$$|h(t)| \leq K e^{\alpha t} \quad 0 \leq t < +\infty \quad (\text{per } t < 0 \quad h(t) = 0), \quad (48)$$

dove la costante α è data da

$$\alpha = \max_{h=1, n} (\operatorname{Re}\{\lambda_h\}). \quad (49)$$

Se il circuito è passivo, tutte le frequenze naturali sono a parte reale non positiva, è $\alpha \leq 0$ e la risposta all'impulso è limitata per ogni t . Se il circuito contenesse elementi lineari attivi, il circuito potrebbe avere frequenze naturali a parte reale positiva e quindi $\alpha > 0$; in questi casi la risposta all'impulso divergerebbe con legge esponenziale per $t \rightarrow \infty$. Invece la risposta impulsiva di un circuito dissipativo è limitata per ogni t e tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow \infty$, perché tutte le frequenze naturali sono a parte reale minore di zero (e quindi deve essere $\alpha < 0$).

Osservazione

Da queste proprietà si intuisce che l'integrale improprio (10) è certamente convergente se il circuito è dissipativo e l'ingresso è limitato; nel caso in cui il circuito fosse stabile ma non asintoticamente stabile, allora la convergenza è assicurata solo nel senso delle distribuzioni.

Se l'uscita non fosse una grandezza di stato, la risposta all'impulso potrebbe contenere funzioni impulsive applicate nell'origine e la (48) potrebbe non essere verificata in $t=0$; in questi casi la (48) è verificata per $t \neq 0$.

9.3.3 Risposta al gradino unitario

Si consideri un circuito lineare inizialmente a riposo, sollecitato con una sorgente (di tensione o di corrente) a gradino unitario applicata all'istante zero. La risposta del circuito a un ingresso di questo tipo prende il nome di **risposta al gradino unitario** e viene indicata con $g=g(t)$.

Per la linearità e la tempo-invarianza del circuito, la risposta $h_{\Delta}(t)$ all'impulso rettangolare $\Pi_{\Delta}(t)$ si può esprimere come

$$h_{\Delta}(t) = \frac{g(t + \Delta/2) - g(t - \Delta/2)}{\Delta}. \quad (50)$$

Considerando, ora, il limite per $\Delta \rightarrow 0$ della (50), si ottiene ⁶

$$h(t) = \frac{dg}{dt}, \quad (51)$$

ovvero la risposta alla funzione impulsiva unitaria coincide con la derivata della risposta alla funzione gradino unitario.

⁶ In questo caso l'operazione di derivata va intesa nel senso della teoria delle distribuzioni.