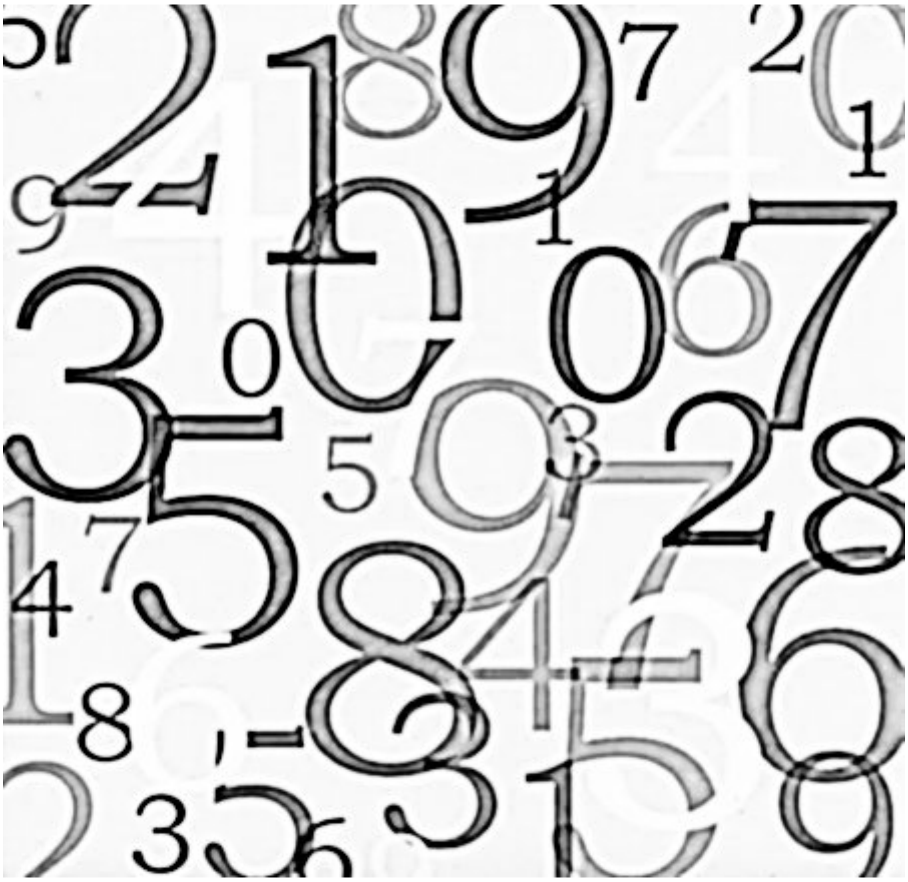
I quaderni didattici della
Facoltà di Agraria
Attività di Tutorato

Eserciziario di Matematica



Facoltà di Agraria
Università di Napoli Federico II

a cura de "i matematici" della Facoltà di Agraria

Prefazione

Questo quaderno è una raccolta di esercizi proposti nei diversi corsi di Matematica della Facoltà di Agraria dell'Università degli Studi di Napoli Federico II, e vuole essere una semplice guida pratica per indirizzare lo studente nella risoluzione degli esercizi di Matematica di base.

Vengono proposti un numero considerevole di esercizi relativi alle principali nozioni di analisi matematica (limiti, domini, integrali, …); in alcuni dei quali è riportato lo svolgimento [S], in altri il risultato [R]. Nei primi esercizi svolti di ogni capitolo viene riportato anche una breve descrizione e una spiegazione dei passaggi matematici, cosi da essere da esempio e rendere più chiaro lo svolgimento di quel tipo di esercizio.

Il quaderno è a cura di Francesco Giannino, Valeria Monetti, Loredana Randazzo, Gerardo Toraldo e Fernando Tuccillo, ed è stato realizzato nella sua forma elettronica dalla dott. Nicoletta Antonella Miele, all'interno del programma di tutorato coordinato dal prof. Luca Scalfi e dalla prof. Paola Adamo.

Napoli 12 ottobre 2010 I matematici della facoltà di Agraria

Indice

1. Disequazioni valore assoluto

Risolvere le seguenti disequazioni con il valore assoluto:

1.1. $|x-3|<4$ [R][S]

1.2. $|x+6|<3$

1.3. $|5-2x|\geq 4$ [R][S]

1.4. $|7-x|\leq 5$

1.5. $|x-7|<2$

1.6. $|x+5|>3$

1.7. $|2x-3|<4$ [R][S]

1.8. $|x+4|<6$

1.9. $|x^2-5x+2|<2$ [R][S]

1.10. $|x^2+x+2|>1$ [R][S]

1.11. $|x^2+6x|<-3$

1.12. $|x^2+8x+1|>-5$

1.13. $|x^2+8x+13|\geq 3$

1.14. $\left|\frac{2x-1}{5}\right|>3$

1.15. $\left|\frac{2x+1}{x-3}\right|<2$

1.16. $\left|\frac{x-1}{2}-\frac{3x-6}{3}\right|<1$

1.17. $|x-1|\leq 3x-2$

1.18. $|3x-1|<x+4$

1.19. $|x-1|<|x+3|$

1.20. $\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|>-1$

Rappresentare graficamente le seguenti funzioni valore assoluto:

1.21. $f(x)=|4x+7|$ [S]

1.22. $f(x)=\left|\frac{1}{2}x+1\right|$ [S]

RISULTATI

1.1. $R: x < -1; x > 7$

1.3. $R: x \le \frac{1}{2}$ e $x \ge \frac{9}{2}$

1.7. $R: -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

1.9. $R: 0 < x < 1$ e $4 < x < 5$

1.10. $R: \forall x \in \Re$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.1.

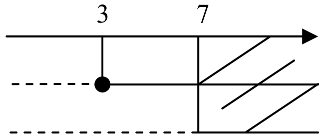
$|x-3|>4$

Dalla definizione di valore assoluto tale disequazione è equivalente all'unione di dei sistemi:

$$(a)\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-3>4 \end{cases} \cup (b)\begin{cases} x-3<0 \\ x-3<-4 \end{cases}$$

Risolvo il sistema (a)

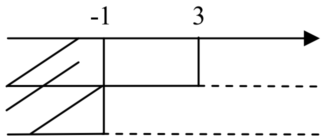
$$(a)\begin{cases} x\geq 3 \\ x>7 \end{cases}$$



$x>7$

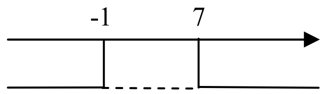
Risolvo il sistema (b)

$$(b)\begin{cases} x<3 \\ x<-1 \end{cases}$$



$x<-1$

Unisco le soluzioni:



Le soluzioni della disequazione sono:

$x<-1, x>7$

Questa disequazione poteva essere risolta equivalentemente elevando al quadrato entrambi i membri:

$|x-3|>4 \Leftrightarrow (x-3)^2>16 \Leftrightarrow x^2+9-6x-16>0 \Leftrightarrow x^2-6x-7>0 \Leftrightarrow x<-1$ e $x>7$

Esercizio 1.3.

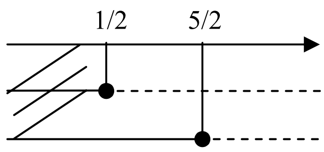
$|5-2x|\geq 4$

Dalla definizione di valore assoluto tale disequazione è equivalente all'unione di dei sistemi:

$$(a)\begin{cases} 5-2x\geq 4 \\ 5-2x\geq 0 \end{cases} \cup (b)\begin{cases} 5-2x\leq -4 \\ 5-2x<0 \end{cases}$$

Risolvo il sistema (a)

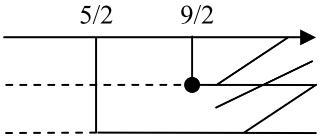
$$(a)\begin{cases} x\leq \dfrac{1}{2} \\ x\leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$



$x\leq \dfrac{1}{2}$

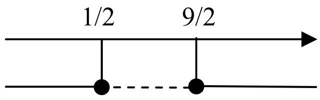
Risolvo il sistema (b)

$$(b)\begin{cases} x \geq \dfrac{9}{2} \\ x > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$



$$x \geq \frac{9}{2}$$

Unisco le soluzioni:



Le soluzioni della disequazione sono:
$x \leq \dfrac{1}{2}, x \geq \dfrac{9}{2}$

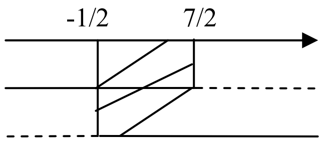
Questa disequazione poteva essere risolta equivalentemente elevando al quadrato entrambi i membri:

$$|5-2x| \geq 4 \Leftrightarrow 25-20+4x^2 \geq 16 \Leftrightarrow 4x^2-20+9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ e } x \geq \frac{9}{2}$$

Esercizio 1.7.
$|2x-3| < 4$

Dalla definizione di valore assoluto tale disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x-3<4 \\ 2x-3>-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x<-7 \\ 2x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{7}{2} \\ x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Le soluzioni della disequazione sono $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{2}$

Equivalentemente:
$$|2x-3| < 4 \Leftrightarrow 4x^2-12x+9<16 \Leftrightarrow 4x^2-12x-7<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

Esercizio 1.9.

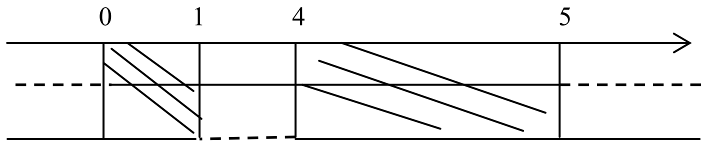
$\left|x^2-5x+2\right|<2 \Leftrightarrow -2<x^2-5x+2<2$

$$\begin{cases} x^2-5x+2<2 \\ x^2-5x+2>-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix} \begin{cases} x^2-5x>0 \\ x^2-5x+4>0 \end{cases}$$

$(a)\ x^2-5x<0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=0;5 \quad \Rightarrow \quad 0<x<5$

$(b)\ x^2-5x+4>0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=1;4 \Rightarrow x<1 \quad \text{e} \quad x>4$

$$\begin{cases} 0<x<5 \\ x<1 \quad \text{e} \quad x>4 \end{cases}$$



$R: 0<x<1 \quad e \quad 4<x<5$

Esercizio 1.10.

$\left|x^2+x+2\right|>1$

$x^2+x+2<-1 \quad \cup \quad x^2+x+2>1$

$x^2+x+3<0 \quad \cup \quad x^2+x+1>0$

$x^2+x+3<0 \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2} \quad \Delta<0 \quad \nexists x \in \Re$

$x^2+x+1>0 \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \quad \Delta<0$

$R: \forall x \in \Re$

Esercizio 1.13.

$f(x)=\left|4x+7\right|$

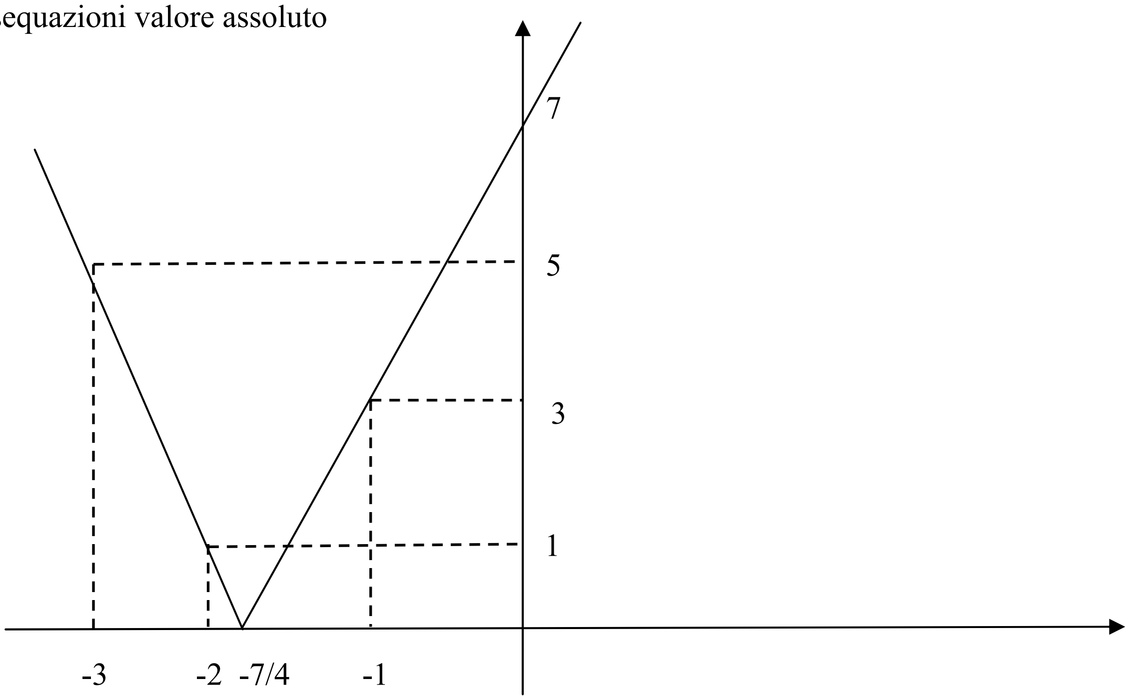
$$f(x)=\left|4x+7\right|=\begin{cases} 4x+7 & se \quad 4x+7\geq 0 \\ -4x-7 & se \quad 4x+7<0 \end{cases}=\begin{cases} 4x+7 & \text{se} \quad x\geq -\frac{7}{4} \\ -4x-7 & \text{se} \quad x<-\frac{7}{4} \end{cases}$$

y=4x+7

x	y
0	7
-1	3

y=-4x-7

x	y
-2	1
-3	5



Esercizio 1.14.

$$f(x)=\left|\frac{1}{2}x+1\right|$$

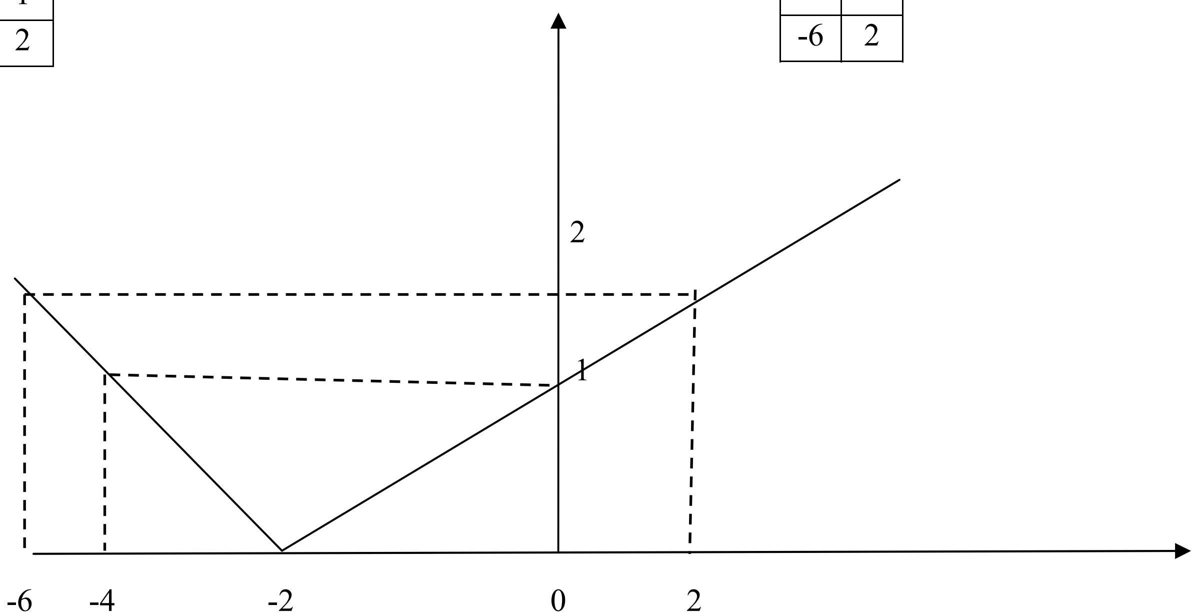
$$f(x)=\left|\frac{1}{2}x+1\right|=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1 & \text{se}\quad \frac{1}{2}x+1\geq 0\\ -\frac{1}{2x}-1 & \text{se}\quad \frac{1}{2x}+1<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1 & se\quad x\geq -2\\ -\frac{1}{2}x-1 & se\quad x<-2\end{cases}$$

y=1/2x+1

x	y
0	1
2	2

y=-1/2x-1

x	y
-4	1
-6	2



2. Disequazioni irrazionali

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

2.1. $\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x>1 \quad [R][S]$

2.2. $1-\sqrt[5]{x^3+x^2+1}>0$

2.3. $\sqrt[3]{x^3-2}-x>0 \quad [R][S]$

2.4. $x+1>\sqrt{x^2+x-2}$

2.5. $3\sqrt{x-1}+1>x \quad [R][S]$

2.6. $x-3<\sqrt{x^2-2x}$

2.7. $\sqrt{10+3x-x^2}>x+2$

2.8. $6x+3<\sqrt{-x^2-x+6}$

2.9. $8x-3\geq\sqrt{x^2-15x+54}$

2.10. $3x+5\geq\sqrt{9x^2-6x-8}$

2.11. $2x+1\leq\sqrt{4x^2-4x-15}$

2.12. $\sqrt[3]{1-3x^2+3x}>x-1$

2.13. $\sqrt[3]{x(x^2-4)}\leq x+1$

2.14. $3x+4\geq\sqrt[3]{27x^3+45x+46}$

2.15. $\sqrt[3]{x^3+2}<x-1$

2.16. $\sqrt{x^2+4x-5}>\sqrt{x^2+4x-21}$

2.17. $\sqrt{x+2}\leq 8+\sqrt{x-6}$

2.18. $\sqrt[5]{(x^2-3x)^3}<\sqrt[5]{-8}$

2.19. $(x^2-3x)^{3/5}<\sqrt[5]{-8}$

2.20. $x-\sqrt{1-x^2}>0$

RISULTATI

2.1. $R: x < -\frac{1}{3}$

2.4. $R: x > 1$

2.5. $R: 1 < x < 10$

SVOLGIMENTO

Esercizio 2.1.

$\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x>1$

Isoliamo il termine irrazionale

$\sqrt[3]{x^3+3x^2}>x+1$

Essendo una radice con indice dispari eleviamo entrambi i membri al cubo

$\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}\right)^3>(x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad x^3+3x^2>x^3+3x^2+3x+1 \quad \Rightarrow \quad 3x+1<0$

$R: x<-\dfrac{1}{3}$

Esercizio 2.4.

$x+1>\sqrt{x^2+x-2}$

$$\sqrt{x^2+x-2}<x+1 \quad \Rightarrow \begin{matrix}(a)\\(b)\\(c)\end{matrix} \begin{cases} x^2+x-2\geq 0 \\ x+1>0 \\ x^2+x-2<(x+1)^2 \end{cases}$$

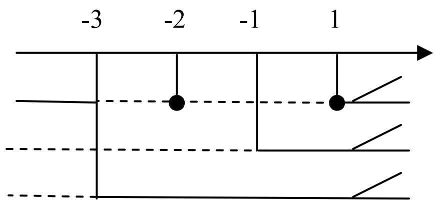
$(a)\ x^2+x-2\geq 0$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=-2;1 \quad \Rightarrow \quad x\leq -2 \quad e \quad x\geq 1$

$(b)\ x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1$

$(c)\ \cancel{x^2}+x-2<\cancel{x^2}+2x+1 \quad \Rightarrow \quad x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$$\begin{cases} x\leq -2; x\geq 1 \\ x>-1 \\ x>-3 \end{cases}$$



$R: x>1$

Esercizio 2.5.

$3\sqrt{x-1}+1>x$

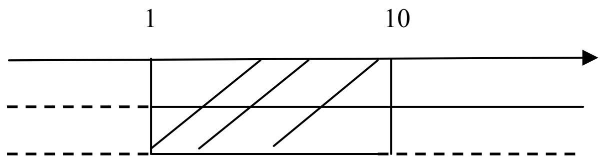
$$\sqrt{x-1}>\frac{x-1}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-1\geq 0 \\ \frac{x-1}{3}<0 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{x-1}{3}\geq 0 \\ x-1>\frac{(x-1)^2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x<1 \end{cases} \cup \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \begin{cases} x\geq 1 \\ 9x-9>x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x<1 \end{cases} \cup \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-11x+10<0 \end{cases}$$

$$(b)\ x^2-11+10<0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{2}=\frac{11\pm 9}{2};\ x_1=1, \text{e } x_2=10 \quad \Rightarrow \quad 1<x<10$$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x<1 \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq 1 \\ 1<x<10 \end{cases} \quad \Rightarrow \emptyset \quad \cup \begin{cases} x\geq 1 \\ 1<x<10 \end{cases}$$



$\emptyset$ e $1<x<10$

$R: 1<x<10$

3. Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali e logaritmiche

3.1. $10^x > 25$ $[R][S]$

3.2. $10^x > -10$ $[R][S]$

3.3. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$ $[R][S]$

3.4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > 25$ $[R][S]$

3.5. $2^{x+7} + 4 > 0$

3.6. $(0.5)^{x+1} \leq 4$ $[R][S]$

3.7. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < 1$ $[R][S]$

3.8. $\log_{10} x - 1 > \frac{2}{\log_{10} x}$ $[R][S]$

3.9. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2\right) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ $[R][S]$

3.10. $3 \cdot 2^x - 5 > 0$

3.11. $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 7$

3.12. $3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 > 0$

3.13. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} < 2$

3.14. $e^{x^2-5x+1} > 1$

3.15. $\log x\left(x^2-1\right) < 0$

3.16. $\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}} 5$

3.17. $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 \geq 0$

3.18. $3^{2x} - 11 \cdot 3^x + 28 < 0$

3.19. $\log_2 (x+4)^2 > \log_2 (13x+10)$

3.20. $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x^2-x+1}{x+1} > -2$

3.21. $\log\left(\frac{x-1}{5} - \frac{x+1}{2}\right) < 0$

3.22. $\log\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \leq 0$

3.23. $\log \frac{x-\sqrt{x}}{x} > 0$

3.24. $\log_{\frac{1}{3}} 5x > 0$

3.25. $2^{\sqrt{x^2-4}} \geq 0$

3.26. $\log_9 (x+3) \leq \log_3 (x-5)$

3.27. $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2-5} \geq 1$

3.28. $\log(x-8) + \log(11-x) > \log 2$

3.29. $20\log^2 x + 31\log x - 9 > 0$

RISULTATI

3.1. $R: x > \log_{10} 25$

3.2. $R: \forall x \in \Re$

3.3. $R: x < 3$

3.4. $R: -\frac{4}{3} < x < 0$

3.6. $R: x \geq -3$

3.7. $R: x > \frac{2}{3}$

3.8. $R: \frac{1}{10} < x < 1 \quad e \quad x > 100$

3.9. $R: x > 2$

SVOLGIMENTO

Esercizio 3.1.

$10^x > 25$

Essendoci un'esponenziale con base 10>1, applichiamo la funzione logaritmo di base 10 ad entrambi i membri della disequazione

$\log_{10} 10^x > \log_{10} 25$

Dalla proprietà dei logaritmi

$R: x > \log_{10} 25$

Esercizio 3.2.

$10^x > -10$

La funzione esponenziale è sempre positiva e quindi sempre maggiore di un numero negativo.

$R: \forall x \in \Re$

Esercizio 3.3.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$$

Scriviamo il secondo membro come esponenziale di base (1/2)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Essendo la funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1 una funzione decrescente, si ha:

$R: x < 3$

Esercizio 3.4.

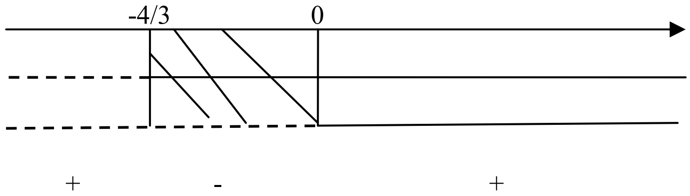
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > 25$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > 5^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-4}{x} < -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+4}{x} + 2 < 0$$

$$\frac{x+4+2x}{x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x+4}{x} < 0$$

$$N > 0 \quad : \quad x > -\frac{4}{3}$$

$$D > 0 \quad : \quad x > 0$$



Prendiamo la parte con segno negativo

$R: -\frac{4}{3} < x < 0$

Esercizio 3.6.

$(0.5)^{x+1} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq 2^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \Rightarrow \quad x+1 \geq -2$

$R: x \geq -3$

Esercizio 3.7.

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < 1$

Affinché la funzione logaritmo abbia senso, deve sussistere la condizione :

(*) $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Dalle proprietà dei logaritmi $\quad 1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \quad$ per cui:

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

Essendo la funzione logaritmo con base compresa tra 0 e 1 una funzione decrescente:

$2x - 1 > \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 2x > 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow \quad 2x > \frac{4}{3} \quad \Rightarrow x > \frac{2}{3}$

Tale soluzione è accettabile perché rientra nelle condizioni di esistenza (*)

$R: x > \frac{2}{3}$

Esercizio 3.8.

$\log_{10} x - 1 > \frac{2}{\log_{10} x} \quad$ con $\quad x > 0 \quad e \quad x \neq 1$

$\frac{\log_{10}^2 - \log_{10} x - 2}{\log_{10} x} > 0$

$N>0:\log_{10}^2 x-\log_{10}x-2>0$

pongo $\quad \log_{10}x=t$

$t^2-t-2>0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2};\ t_1=-1,t_2=2$

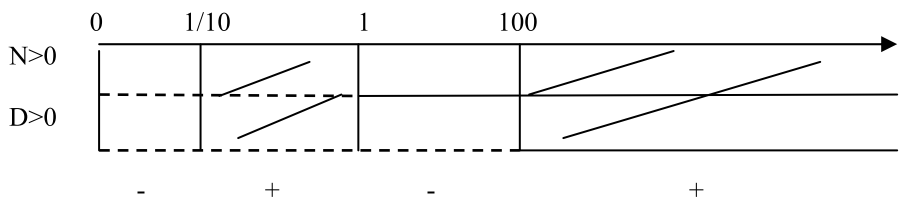
$t<-1$ e $t>2 \quad \Rightarrow \quad \log_{10}x<-1$ e $\log_{10}x>2$

$\log_{10}x<\log_{10}\dfrac{1}{10}$ e $\log_{10}x>\log_{10}100$

$x<\dfrac{1}{10}$ e $x>100$

$D>0:\log_{10}x>0 \quad \Rightarrow \quad \log_{10}x>\log_{10}1$

$x>1$



$R:\dfrac{1}{10}<x<1$ e $x>100$

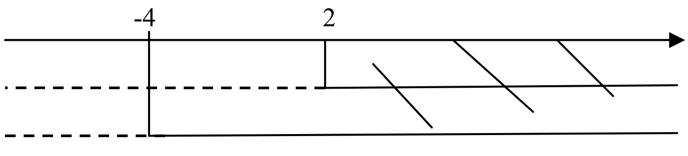
Esercizio 3. 9.

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)\le\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ con $\begin{cases}x^2+2>0\\x+1>0\\x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in\Re\\x>-1\\x>2\end{cases}\Rightarrow(*)x>2$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)\le\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2)$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)\le\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \quad \Rightarrow \quad x^2+2\ge x^2-x-2 \quad \Rightarrow \quad x\ge-4$

Intersechiamo con (*)



$R:x>2$

4. Dominio

Esercizio: determinare il dominio delle seguenti funzioni

4.1. $f(x)=\sqrt{\log_{1/2}x-2}$ [R][S]

4.2. $f(x)=3^{x^2-9}$

4.3. $f(x)=\log\left(\frac{x-3}{2-7x}\right)$ [R][S]

4.4. $f(x)=\log\left(2x-\sqrt{3}\right)$

4.5. $f(x)=\sqrt[6]{3-\log_2 x}$ [R][S]

4.6. $f(x)=\log\left(3^x-1\right)$

4.7. $f(x)=\sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$

4.8. $f(x)=\left(3^{2x}-5\cdot 3^x+6\right)^{\pi}$ [R][S]

4.9. $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^x+7}$

4.10. $f(x)=\sqrt{\log_2{}^2 x+\log_2 x+3}$ [R][S]

4.11. $f(x)=\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x-3\right)}$ [R][S]

4.12. $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+10)-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+4x\right)}$ [R][S]

4.13. $f(x)=\log\left(|x-8|-|x-3|\right)$ [R][S]

4.14. $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x+5}$ [R][S]

4.15. $f(x)=\sqrt{3-\log_2 x}+(10-x)^{\sqrt{2}}$

4.16. $f(x)=\sqrt{\frac{4-3x}{x^2-3x}-1}$

4.17. $f(x)=(2\log x-1)^{-\sqrt{3}}$

4.18. $f(x)=\sqrt{\log\left(\sqrt{x^2-2x}\right)-\log(-5x)}$ [R][S]

4.19. $f(x)=\frac{x-2}{\cos 2x}$ [R][S]

4.20. $f(x)=\sqrt{x^4+x^2}$

4.21. $f(x)=\frac{x+1}{x}+arctgx$ [R][S]

4.22. $f(x)=(2\arccos x-\pi)^{-\sqrt{3}}$

4.23. $f(x)=\log\left(\log_5\left(\frac{x-5}{3-x}\right)\right)$

4.24. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|6x-5|-x^2}}$ [R][S]

4.25. $f(x)=\log\left(\sqrt{3x-x^2-2}-\sqrt{x^2-3x}\right)$ [R][S]

4.26. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2-5}-x+2}}$

4.27. $f(x)=\log\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4-x^2}\right)$

4.28. $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-5x^2}}$ [R][S]

4.29. $f(x)=\log\left(3^{\frac{3x-3x^2-4}{x^2-9}}-9\right)$ [R][S]

4.30. $f(x)=\frac{\sqrt{\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{2x}}}{\log_2 x}$

4.31. $f(x)=\log\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x-\frac{x^2}{2}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{|-3x|}\right]$

4.32. $f(x)=\log\left(3e^{2x}+2e^{3x}\right)$

4.33. $f(x)=\sqrt{\log(x+1)+\log(x-1)-\log x}$ [R][S]

4.34. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ [R][S]

4.35. $f(x)=(\cos x)^{\log x}$ [R][S]

4.36. $f(x)=\sqrt{3^{senx}-\sqrt{3}}$ [R][S]

4.37. $f(x)=\dfrac{\log\left(3^{x^2}-1\right)}{\log\left(4x-x^2\right)}$

4.38. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2^{x^2}-1}}{2x}$

4.39. $f(x)=(x)^{\log x}$

4.40. $f(x)=\sqrt{3^{2x}-\sqrt{3}}$

4.41. $f(x)=\dfrac{x-2}{2x+1}$

4.42. $f(x)=\dfrac{x+1}{x}+\log\left(x^2+1\right)$

4.43. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$

4.44. $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$

4.45. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$

4.46. $f(x)=\dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}$

4.47. $f(x)=\left(1-x^2\right)^{-\sqrt{2}}$

4.48. $f(x)=\left(9-x^2\right)^{\sqrt{3}}$

4.49. $f(x)=\log\dfrac{2+x}{2-x}$

4.50. $f(x)=\log\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$

4.51. $f(x)=\dfrac{1}{\log(e^{2x}+e^x)}$

4.52. $f(x)=\dfrac{1}{xe^x}$

4.53. $f(x)=\log(x-\sqrt{1-x^2})$ [R][S]

4.54. $f(x)=\sqrt{\log(x^2-8x+8)}$ [R][S]

4.55. $f(x)=\sqrt{sen2x}$ [R][S]

4.56. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

4.57. $f(x)=e^{\sqrt{1-x^2}}$ [R][S]

4.58. $f(x)=\sqrt{1+\left|x^2-1\right|}$ [R][S]

4.59. $f(x)=\sqrt{|x|e^{-x}}$ [R][S]

4.60. $f(x)=\log^2|x|-\lg x^2-3$ [R][S]

4.61. $f(x)=\sqrt{2+\log|x|}$ [R][S]

4.62. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{|x-1|}+\log|x-1|$ [R][S]

4. Dominio

4.63. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3^x-1}{9-3^x}}$ $[R][S]$

4.64. $f(x)=\sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{6}}(2-x)}{2x+1}}$ $[R][S]$

4.65. $f(x)=\sqrt{\log_3(x^2-4x)-\log_3(x^2-1)}$ $[R][S]$

RISULTATI

4.1. $0 < x \le \frac{1}{4}$

4.3. $\frac{2}{7} < x \le 3$

4.7. $\frac{2}{7} < x \le 3$

4.8. $x < \log_3^2$ e $x > 4$

4.10. $x > 0$

4.11. $x < 1$ e $x > 3$

4.12. $-10 < x \le -5$ e $x \ge 2$

4.13. $x < \frac{11}{2}$

4.14. $\forall x \in \Re$

4.18. $-\frac{1}{12} \le x < 0$

4.19. $x \ne \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z$

4.21. $x \ne 0$

4.22. $-1 \le x < 0$

4.24. $-3-\sqrt{14} < x < -3\sqrt{14}$ e $1 < x < 5$

4.25. $\nexists x \in \Re$

4.28. $0 \le x \le \frac{1}{3}$

4.29. $-3 < x < \frac{7}{5}$ e $2 < x < 3$

4.33. $x \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4.34. $x \ne 1$ e $x \ne 2$

4.35. $2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in N$

4.36. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in Z$

4.53. $\frac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1$

4.54. $x \le 1$ e $x \ge 7$

4.55. $k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

4.57. $-1 \le x \le 1$

4.58. $\forall x \in \Re$

4.59. $\forall x \in \Re$

4.60. $x \ne 0$

4.61. $x \le -\frac{1}{e^2}$ e $x \ge \frac{1}{e^x}$

4.62. $x \ne 1$

4.63. $0 \le x \le 2$

4.64. $x < -\frac{1}{2}$ e $1 \le x < 2$

4.65. $x < -1$

4. Dominio

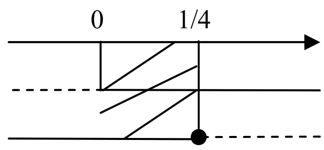
SVOLGIMENTO

Esercizio 4.1.

$f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x-2}$

Essendo una funzione composta, il dominio si determina risolvendo il sistema costituito dalle condizioni di esistenza della funzione logaritmo e della funzione irrazionale

$$\begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\leq \frac{1}{4} \end{cases}$$



La soluzione del sistema è data dall'intersezione dei tratti comuni

$D: 0<x\leq \frac{1}{4}$

Esercizio 4.3.

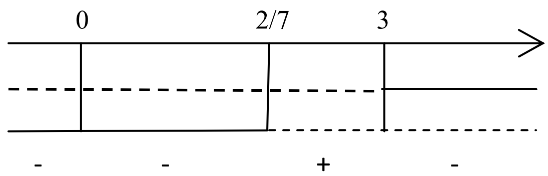
$f(x)=\log\left(\frac{x-3}{2-7x}\right)$

Essendo una funzione composta, il dominio si determina risolvendo il sistema costituito dalla condizione di esistenza della funzione logaritmo e della funzione razionale fratta

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2-7x}>0 \Rightarrow \frac{x-3}{2-7x}>0 \\ 2-7x\neq 0 \end{cases}$$

$N>0 \;\; x-3>0 \Rightarrow x>3$

$D>0 \;\; 2-7x>0 \Rightarrow 7x-2<0 \Rightarrow x<\frac{2}{7}$



Essendo una funzione razionale fratta, il risultato si ottiene considerando il prodotto dei segni

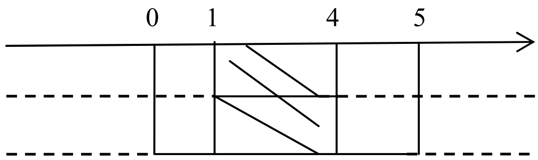
$D: \frac{2}{7}<x<3$

Esercizio 4.7.

$$f(x)=\sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$$

$$\begin{cases}\log\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)\geq 0\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 1\\ 5x-x^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-5x+4\leq 0\\ 0<x\leq 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2};x_1=1,x_2=4\\ 0<x\leq 5\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\leq x\leq 4\\ 0<x<5\end{cases}$$



$D:1\leq x\leq 4$

Esercizio 4.8.

$$f(x)=\left(3^{2x}-5\cdot 3^x+6\right)^{\pi}$$

$3^{2x}-5\cdot 3^x+6\geq 0$

Pongo $t=3^x\Rightarrow\qquad t^2-5t+6>0\qquad t_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2};t_1=2,t_2=3$

$\Rightarrow t<2\quad e\quad t>3\Rightarrow 3^x<2\quad e\quad 3^x>3$

$D:x<\log_3 2\quad\cup\quad x>1$

Esercizio 4.10.

$$f(x)=\sqrt{\log_2^2 x+\log_2 x+3}$$

$$\begin{cases}x>0\\ \log_2^2 x+\log_2 x+3\geq 0\end{cases}$$

Pongo $t=\log_2 x\Rightarrow t^2+t+3\geq 0\qquad t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}\Rightarrow\forall t\in\Re$

$$\begin{cases}x>0\\ \forall x\in\Re\end{cases}$$

$D:x>0$

Esercizio 4.11.

$$f(x) = \sqrt{\log_2\left(2x^2 - 1\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x\right) - 3}$$

$$\begin{cases} (a) & 2x^2 - 1 > 0 \\ (b) & x^2 - 2x - 3 > 0 \\ (c) & \log_2\left(2x^2 - 1\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x - 3\right) \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo (a)

$$2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Risolviamo (b)

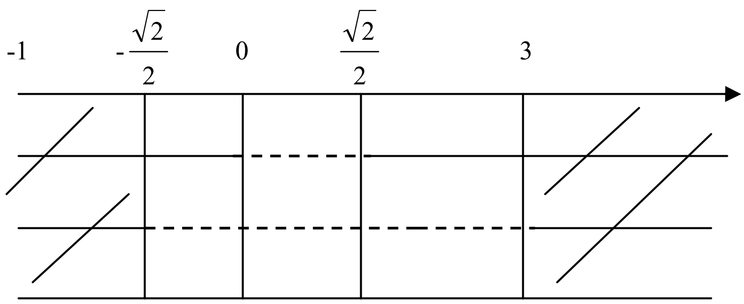
$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}; x_1 = -1, x_2 = 3 \Rightarrow x < -1 \quad \cup \quad x > 3$$

Risolviamo (c)

$$\log_2(2x^2 - 1) \geq -\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x - 3\right) \Rightarrow \log_2\left(2x^2 - 1\right) \geq \log_2\left(x^2 - 2x - 3\right) \Rightarrow 2x^2 - 1 \geq x^2 - 2x - 3 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 2 \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 8}}{2} \Rightarrow \forall x \in \Re$$

$$\begin{cases} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x < 1 \qquad\quad x > 3 \\ \forall x \in \Re \end{cases}$$



$$D: x < -1 \quad \text{e} \quad x > 3$$

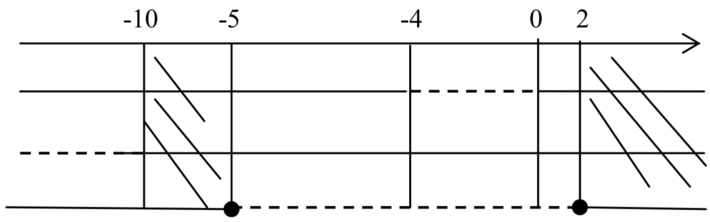
Esercizio 4.12.

$$f(x)\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x + 10) - \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 4x\right)}$$

$$\begin{cases} x + 10 > 0 \\ x^2 + 4x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x + 10) - \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 4x\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -10 \\ x < -4 \quad \text{e} \quad x > 0 \Rightarrow \\ x + 10 \le x^2 + 4x \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -10 \\ x < -4 \quad \text{e} \quad x > 0 \\ x^2 + 3x - 10 \ge 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+50}}{2}; x_1 = -5, x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -10 \\ x < -4 \quad \text{e} \quad x > 0 \\ x \le -5 \quad \text{e} \quad x \ge 2 \end{cases}$$



$D: -10 < x \le -5 \quad \text{e} \quad x \ge 2$

Esercizio 4.13.

$f(x) = \log(|x-8| - |x-3|)$

$|x-8| - |x-3| > 0 \Rightarrow \qquad |x-8| > |x-3|$

$(|x-8|)^2 > (|x-3|)^2$

$\cancel{x^2} - 16x + 64 > \cancel{x^2} - 6x + 9$

$-10x + 55 > 0 \quad \Rightarrow \quad 10x - 55 < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 11 < 0$

$D: x < \dfrac{11}{2}$

Esercizio 4.14.

$f(x) = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 5}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 5 \ge 0 \Rightarrow$ poichè la funzione esponenziale è sempre positiva $\forall x \in \Re$

$D: \forall x \in \Re$

Esercizio 4.18.

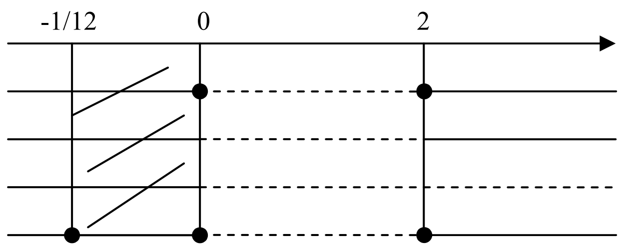
$f(x)=\sqrt{\log\left(\sqrt{x^2-2x}\right)-\log((-5x)}$

$$\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ \sqrt{x^2-2x}>0 \\ -5x>0 \\ \log\left(\sqrt{x^2-2x}\right)-\log(-5x)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq 0 \quad \cup \quad x\geq 2 \\ x<0 \quad \cup \quad x>2 \\ 5x<0 \quad \Rightarrow \quad x<0 \\ \sqrt{x^2-2x}\geq -5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 0 \quad \text{e} \quad x\geq 2 \\ x<0 \quad \text{e} \quad x>2 \\ x<0 \\ \begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ -5x<0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2-2x\geq 25x^2 \\ -5x\geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 0 \quad \text{e} \quad x\geq 2 \\ x<0 \quad \text{e} \quad x>2 \\ x<0 \\ \begin{cases} x\leq 0, x\geq 2 \\ x>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 24x^2-2x\leq 0 \Rightarrow 12x^2+x\leq 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{12}\leq x\leq 0 \\ x\leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 0 \ \text{e} \ x\geq 2 \\ x<0 \ \text{e} \ x>2 \\ x<0 \\ x\geq 2 \ \text{e} \ -\dfrac{1}{12}\leq x\leq 0 \end{cases}$$



$R: -\dfrac{1}{12}\leq x<0 \ \text{ e } \ x>2$

Esercizio 4.19.

$f(x)=\dfrac{x-2}{\cos 2x}$

$\cos 2x\neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \qquad k\in Z$

$x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \qquad k\in Z$

Esercizio 4.21.

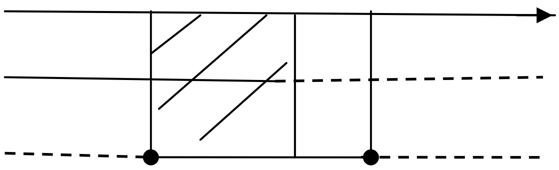
$$f(x)=\frac{x+1}{x}+\arctan x$$

$$\begin{cases} x\neq o \\ \forall x\in\Re \end{cases} \Rightarrow \quad D:\forall x\in\Re \qquad x\neq 0$$

Esercizio 4.22.

$$f(x)=(2\arccos x-\pi)^{-\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} 2\arccos x-\pi>0 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \arccos x>\dfrac{\pi}{2} \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x<0$$



$$D:-1\leq x<0$$

Esercizio 4.24.

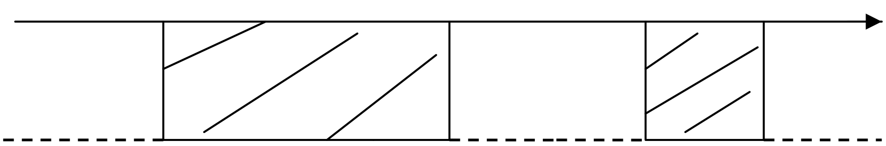
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|6x-5|-x^2}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{|6x-5|-x^2}\neq 0 \\ |6x-5|-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad |6x-5|-x^2>0$$

$$|6x-5|>x^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} 6x-5\geq 0 \\ 6x-5>x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 6x-5<0 \\ -6x+5>x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq \dfrac{5}{6} \\ 1<x<5 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x<\dfrac{5}{6} \\ x^2+6x-5<0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+20}}{2}=-3\pm\sqrt{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq \dfrac{5}{6} \\ 1<x<5 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x<\dfrac{5}{6} \\ -3-\sqrt{14}<x<-3+\sqrt{14} \end{cases}$$



$$D:-3-\sqrt{14}<x<-3+\sqrt{14} \quad \cup \quad 1<x<5$$

Esercizio 4.25.

$f(x)=\log\left(\sqrt{3x-x^2-2}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

$$\begin{cases}\sqrt{3x-x^2-2}-\sqrt{x^2-3x}>0\\ 3x-x^2-2\geq 0\\ x^2-3x\geq 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\sqrt{3x-x^2-2}>\sqrt{x^2-3x}\\ 3x-x^2-2\geq 0\\ x^2-3x\geq 0\end{cases}$$

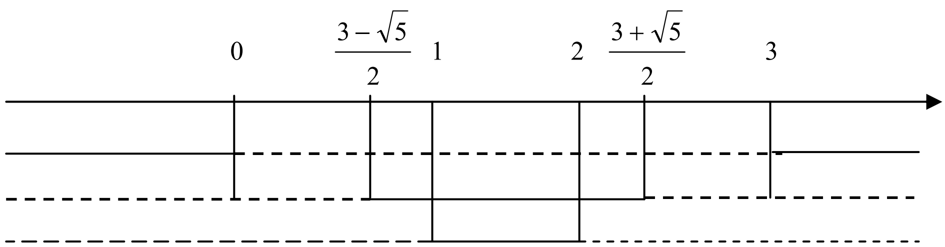
$$\begin{cases}3x-x^2-2>x^2-3x\\ x^2-3x+2\leq 0\\ x^2-3x\geq 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}1\leq x\leq 2\\ x\leq 0\quad\cup\quad x\geq 3\\ 3x-x^2-2-x^2+3x>0\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}(a)\\(b)\\(c)\end{array}\begin{cases}1\leq x\leq 2\\ x\leq 0\quad \text{e}\quad x\geq 3\\ -2x^2+6x-2>0\quad\Rightarrow\quad 2x^2-6x+2<0\quad\Rightarrow\quad x^2-3x+1<0\end{cases}$$

Risolviamo (c)

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases}1\leq x\leq 2\\ x\leq 0\quad\cup\quad x\geq 3\\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$



$D:\nexists x\in\Re$

Esercizio 4.28.

$$f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-5x^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-5x^2}\geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{-5x^2}$$

$$x^2-2x\leq -5x^2\Rightarrow 6x^2-2x\leq 0\Rightarrow 3x^2-x\leq 0\Rightarrow 0\leq x\leq\frac{1}{3}$$

$D:0\leq x\leq\frac{1}{3}$

Esercizio 4.29.

$$f(x)=\log\left(3^{\frac{3x-3x^2-4}{x^2-9}}-9\right)$$

$$\begin{cases} x^2-9\neq 0 \\ 3^{\frac{3x-3x^2-4}{x^2-9}}-9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\begin{cases} x\neq \pm 3 \\ 3^{\frac{3x-3x^2-4}{x^2-9}}>3^2 \end{cases}$$

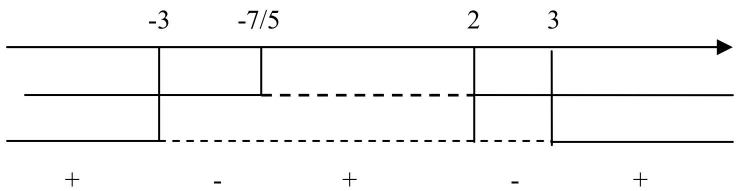
Risolvo (b)

$$\frac{3x-3x^2-4}{x^2-9}>2\Rightarrow \frac{3x-3x^2-4-2x^2+18}{x^2-9}>0\Rightarrow$$

$$\frac{-5x^2+3x+14}{x^2-9}>0\Rightarrow \frac{5x^2-3x-14}{x^2-9}<0\Rightarrow$$

$N>0:\ 5x^2-3x-14>0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+280}}{10}=\frac{3\pm 17}{10};\ x_1=-\frac{7}{5}, x_2=2\Rightarrow x<-\frac{7}{5}$ e $x>2$

$D>0:\ x^2-9>0\Rightarrow x<-3$ e $x>3$



D: $-3<x<-\frac{7}{5}$ e $2<x<3$

Esercizio 4.33.

$f(x)=\sqrt{\log(x+1)+\log(x-1)-\log x}$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ x>0 \\ \log(x+1)+\log(x-1)-\log x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

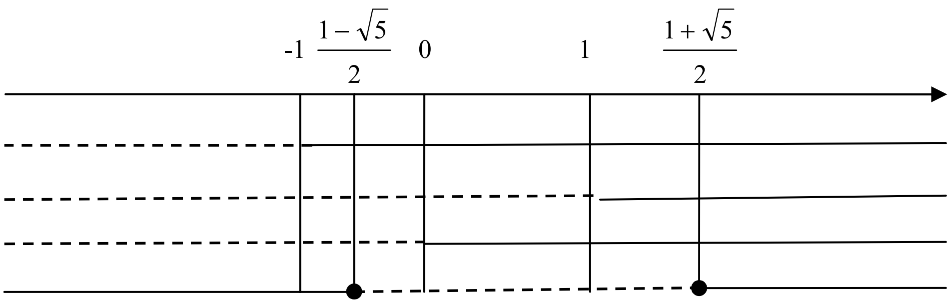
$$\begin{cases} x>-1 \\ x>1 \\ x>0 \\ \log(x+1)+\log(x-1) \geq \log x \quad \Rightarrow \quad \log[(x+1)(x-1)] \geq \log x \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array} \begin{cases} x>-1 \\ x>1 \\ x>0 \\ (x+1)(x-1) \geq x \quad \Rightarrow \quad x^2 \cancel{-x}+x-1 \geq x \quad \Rightarrow \quad x^2-x-1 \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo (d)

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x>-1 \\ x>1 \\ x>0 \\ x \leq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



D: $x \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Esercizio 4.34.

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$x^2-3x+2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}; x_1=1, x_2=2$$

$$D:\forall x\in\Re : x\neq 1 \quad \text{e} \quad x\neq 2$$

Esercizio 4.35.

$$f(x)=(\cos x)^{\log x}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ \cos x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2k\pi<x<\pi+2k\pi,\ k\in Z \end{cases}$$

$$D:\{x\in\Re$$

Esercizio 4.36.

$$f(x)=\sqrt{3^{senx}-\sqrt{3}}$$

$$3^{senx}-\sqrt{3}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3^{senx}\geq\sqrt{3}$$

$$3^{senx}\geq 3^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad senx\geq\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2k\pi \qquad k\in Z$$

$$D:\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{5}{6}\pi+2k\pi \qquad k\in Z$$

Esercizio 4.53.

$$f(x)=\log\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\begin{cases} x-\sqrt{1-x^2}>0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\begin{cases} \sqrt{1-x^2}<x \\ 1-x^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-1\leq 0 \qquad -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

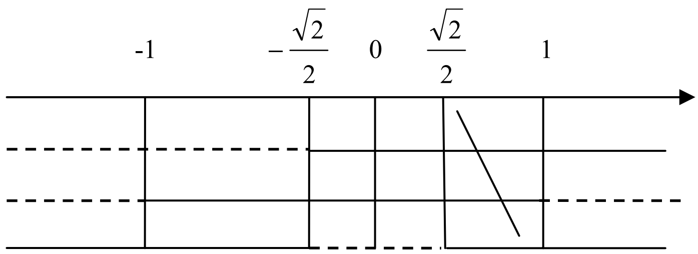
Risolviamo la disequazione (a)

$$\sqrt{1-x^2}<x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ 1-x^2\geq 0 \\ 1-x^2<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-1\leq 0 \\ 2x^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ -1\leq x\leq 1 \\ x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad x>\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$R_a:\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leq 1$$

$$\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}<x\leq 1 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

4. Dominio



$D: \frac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1$

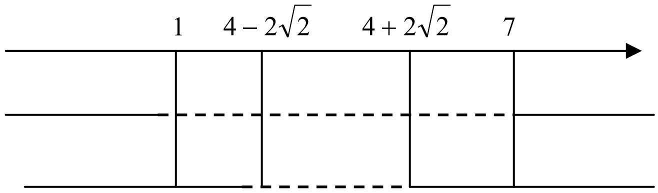
Esercizio 4.54.

$f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 8x + 8)}$

$\begin{cases} \log(x^2 - 8x + 8) \ge 0 \\ x^2 - 8x + 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 8 \ge 1 \\ x^2 - 8x + 8 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 7 \ge 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm 3; x_1 = 1, x_2 = 7$

$\begin{cases} x \le 1 \quad e \quad x \ge 7 \\ x < 4 - 2\sqrt{2} \quad e \quad x > 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}$



$D: x \le 1$ e $x \ge 7$

Esercizio 4.55.

$f(x) = \sqrt{sen 2x}$

$sen 2x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2k\pi \le 2x \le \pi + 2k\pi \qquad k \in Z$

$k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in Z$

$D: k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in Z$

Esercizio 4.57.

$f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$

$1 - x^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \le x \le 1$

$D: -1 \le x \le 1$

Esercizio 4.58.

$f(x)=\sqrt{1+\left|x^2-1\right|}$

$1+\left|x^2-1\right|\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left|x^2-1\right|\geq -1 \quad \Rightarrow \quad \forall x\in\Re$

$D:\forall x\in\Re$

Esercizio 4.59.

$f(x)=\sqrt{|x|}e^{-x}$

$|x|\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x\in\Re$

$D:\forall x\in\Re$

Esercizio 4.60.

$f(x)=\log^2|x|-\log x^2-3$

$\begin{cases}|x|>0\\ x^2>0\end{cases}$

$D:x\neq 0$

Esercizio 4.61.

$f(x)=\sqrt{2+\log|x|}$

$\begin{cases}|x|>0\\ 2+\log|x|\geq 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x\neq 0\\ \log|x|\geq -2\end{cases}$

$\begin{cases}x\neq 0\\ |x|\geq e^{-2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x\neq 0\\ |x|\geq \dfrac{1}{e^2}\end{cases}$

$\begin{cases}x\neq 0\\ x\leq -\dfrac{1}{e} \quad \text{e} \quad x\geq \dfrac{1}{e}\end{cases}$

$D:x\leq -\dfrac{1}{e} \quad \text{e} \quad x\geq \dfrac{1}{e}$

Esercizio 4.62.

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{|x-1|}+\log|x-1|$

$\begin{cases}|x-1|\neq 0\\ |x-1|>0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad x\neq 1$

$D:x\neq 1$

Esercizio 4.63.

$$f(x)=\sqrt{\frac{3^x-1}{9-3^x}}$$

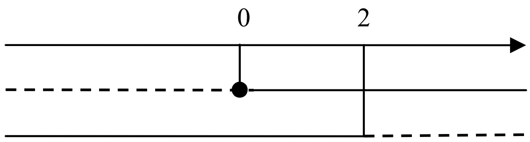
$$\begin{cases} 9-3^x \neq 0 \\ \dfrac{3^x-1}{9-3^x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\begin{cases} 3^x \neq 3^2 & \Rightarrow \quad x \neq 2 \\ \dfrac{3^x-1}{9-3^x} \geq 0 \end{cases}$$

Risolvo (b)

$$\frac{3^x-1}{9-3^x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N \geq 0:\ 3^x-1 \geq 0 \\ D > 0: 9-3^x > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix}N\\D\end{matrix}\begin{cases} 3^x \geq 1 \\ 3^x < 3^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}N\\D\end{matrix}\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

Ritornando al nostro sistema abbiamo quindi

$$\begin{cases} x \neq 2 \\ 0 \leq x < 2 \end{cases}$$



$D: 0 \leq x < 2$

Esercizio 4.64.

$$f(x)=\sqrt{\frac{\log_{\frac{1}{6}}(2-x)}{2x+1}}$$

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 \neq 0 \\ \dfrac{\log_{\frac{1}{6}}(2-x)}{2x+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(a)\\(b)\\(c)\end{matrix}\begin{cases} x < 2 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\log_{\frac{1}{6}}(2-x)}{2x+1} \geq 0 \end{cases}$$

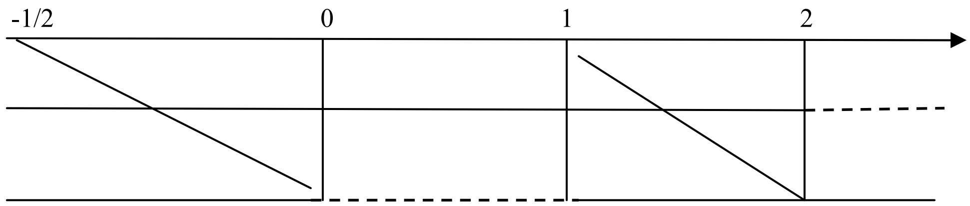
Risolvo (c)

$$\frac{\log_{\frac{1}{6}}(2-x)}{2x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{6}}(2-x) \geq 0$$

$$\begin{cases} 2-x \leq 1 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq -1 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$x < -\dfrac{1}{2} \quad$ e $\quad x \geq 1$

$$\begin{cases} x<2 \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \\ x<-\dfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<-\dfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad x\geq 1 \end{cases}$$



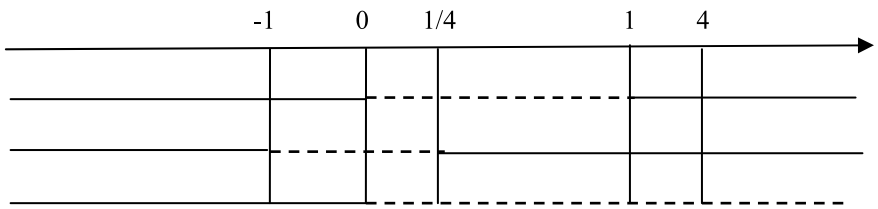
$$D: x<-\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 1\leq x<2$$

Esercizio 4.65.

$$f(x)=\sqrt{\log_3\left(x^2-4x\right)-\log_3\left(x^2-1\right)}$$

$$\begin{cases} x^2-4x>0 \\ x^2-1>0 \\ \log_3\left(x^2-4x\right)-\log_3\left(x^2-1\right)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-4)>0 \quad \Rightarrow \quad x<0 \quad e \quad x>4 \\ x<-1 \quad e \quad x>1 \\ \log_3\left(x^2-4x\right)\geq \log_3\left(x^2-1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \quad e \quad x>4 \\ x<-1 \quad e \quad x>1 \\ x\leq \dfrac{1}{4} \end{cases}$$



$$D: x<-1$$

5. Limiti di funzione

Calcolare i seguenti limiti:

5.1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{5-2x}{3x-7}$ [R]

5.2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x+5}$ [R]

5.3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x+5}{9x^3+x-2}$ [R]

5.4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{e^x}$ [R]

5.5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2^x}{2x^2+3^x}$ [R][S]

5.6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+3^x}{3x^4+2^x}$ [R][S]

5.7. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x^2+2^{-x}}{\log x^3+3^{-x}}$ [R]

5.8. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ [R][S]

5.9. $\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{\log x}{x^2+x}}$ [R][S]

5.10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\sqrt{x}+1}{1-x-3x^2}$ [R]

5.11. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+\log(-x)}$ [R]

5.12. $\lim_{x\to+\infty}\log_2\left(\frac{4x^2+1}{x^2-x}\right)$ [R]

5.13. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ [R]

5.14. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}+\log x}{2e^{3x}+1}$ [R]

5.15. $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$ [R]

5.16. $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}$ [R]

5.17. $\lim_{x\to0^+}x^2e^{\frac{1}{x}}$ [R]

5.18. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x^4-e^{-x}+\frac{1}{x}}{3\log x^3+e^{-2x}+\frac{2}{x^2}}$ [R][S]

5.19. $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+e^{3x}}{x^4+e^{2x}}$ [R][S]

5.20. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+2^x}{2x^4+e^x}$ [R][S]

5.21. $\lim_{x\to0}x^5\log x^4$ [R]

5.22. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5\log x+2}{x-e^x}$ [R]

5.23. $\lim_{x\to0^+}\frac{2x^3-3x^5}{x^8+\sqrt{x^7}}$ [R]

5.24. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^8+2}}{x^3}$ [R][S]

5.25. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1-x^5}{\sqrt{x^3}-x^2}$ [R]

5.26. $\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x^3+2}{x^3-2x+5}\right)$ [R][S]

5.27. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{e^{2x}+4}$ [R]

5.28. $\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{4}{3}}+2x^2+5x}{x^5-x^3-\sqrt{xx}}$ [R][S]

5.29. $\lim_{x\to0^+}\log\left(\frac{x^4+3x^2}{x-x^7}\right)$ [R]

5.30. $\lim_{x\to0}2^{\left(\frac{5x^3+2x^2}{x^7-x^2}\right)}$ [R]

5.31. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}x}$ [R][S]

5.32. $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\log(1+x)}$ [R][S]

5.33. $\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$ [R][S]

5.34. $\lim_{x\to1}\frac{\log x}{1-x}$ [R][S]

5.35. $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\log(1-4x)}$ [R][S]

5.36. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$ [R][S]

5.37. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\operatorname{sen}x+1}{\cos x}$ [R][S]

5.38. $\lim_{x\to0^+}\log\operatorname{sen}x$ [R]

5.39. $\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{1+e^x}$ [R]

5.40. $\lim_{x\to-\infty}\arctan(1+e^x)$ [R]

5.41. $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arcsen}\frac{1}{(2+e^x)}$ [R]

5.42. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ [R][S]

5.43. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$ [R][S]

5.44. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-x+5}{2x^2+4x+1}$ [R][S]

5.45. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+5}{2x^3-3x^2+9}$ [R][S]

5.46. $\lim_{x\to0}\frac{sen^3x}{x-x^3}$ [R][S]

5.47. $\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x^2-x}$ [R][S]

5.48. $\lim_{x\to0}\frac{x+4x^3}{senx+x^2}$ [R][S]

5.49. $\lim_{x\to2}(x^3-2x+5)$ [R]

5.50. $\lim_{x\to4}(2x+\sqrt{x}-1)$ [R]

5.51. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}}{2x}$ [R]

5.52. $\lim_{x\to2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$ [R]

5.53. $\lim_{x\to0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$ [R]

5.54. $\lim_{x\to\sqrt{3}}\left(\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}\right)$ [R]

5.55. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sin x-2\cos x}{x}$ [R]

5.56. $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}$ [R]

5.57. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x+1}{\cos x}[R]$

5.58. $\lim_{x\to\pi} \frac{3+\cos x}{\tan\frac{x}{2}}[R]$

5.59. $\lim_{x\to 0^+} \log\sin x[R]$

5.60. $\lim_{x\to+\infty} x\log x[R]$

5.61. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1+e^x}[R]$

5.62. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\log x}[R]$

5.63. $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$

5.64. $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{\log x}[R]$

5.65. $\lim_{x\to+\infty} e^{2-x}[R]$

5.66. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\log x\right)[R]$

5.67. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{1+x}}{\sin\frac{1}{x}}[R]$

5.68. $\lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{tgx}$

5.69. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\log 3x}}$

5.70. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)$

5.71. $\lim_{x\to 0} \frac{tgx-x}{e^x-1}$

5.72. $\lim_{x\to e} \frac{1-\log x}{x-e}$

5.73. $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2-1}-x}{\log x}$

5.74. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{(x^2-1)^2}-\frac{1}{\log x}\right)$

5.75. $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

RISULTATI

5.1. -2/3

5.2. $+\infty$

5.3. 4/9

5.4 0

5.5. 0

5.6. 1/3

5.7. 2/3

5.8. 2

5.9. 1

5-10. -1/3

5.11. -1

5.12. 2

5.13. 1

5.14 1/2

5.15. 0

5.16. 0

5.17. $+\infty$

5.18. 8/9

5.19. $+\infty$

5.20. 0

5.21. 0

5.22. 0

5.23. $+\infty$

5.24. $-\infty$

5.25. $+\infty$

5.26. 0

5.27. $-\infty$

5.28. $-\infty$

5.29. $-\infty$

5.30. 1/4

5.31. 1

5.32. 0

5.33. 4

5.34. -1

5.35. -1/2

5.36. 1

5.37. non esiste

5.38. $-\infty$

5.39. $-\infty$

5.40. $\pi/4$

5.41. $\pi/6$

5.42. 1/5

5.43. non esiste

5.44. 3/2

5.45. 0

5.46. -1

5.47. -1/2

5.48. 1

5.49. 9

5.50. 9

5.51. 3/4

5.52. 9

5.53. 3/4

5.54. 0

5.55. $3/2\pi$

5.56. non esiste

5.57. non esiste

5.58. 0

5.59. $-\infty$

5.60. $+\infty$

5.61. $-\infty$

5.62. 0

5.64. 0

5.65. 0

5.66. $+\infty$

5.67. $+\infty$

SVOLGIMENTO

Esercizio 5.5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2^x}{2x^2+3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(\frac{x^3}{2^x}+1\right)}{3^x\left(\frac{2x^2}{3^x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\frac{\left(\frac{x^3}{2^x}+1\right)}{\left(\frac{2x^2}{3^x}+1\right)}=0$$

Esercizio 5.6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+3^x}{3x^4+2^x}=\frac{x^4\left(1+\overbrace{\frac{3^x}{x^4}}^{0}\right)}{3x^4\left(1+\underbrace{\frac{2^x}{3x^4}}_{0}\right)}=\frac{1}{3}$$

Esercizio 5.8.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|\sqrt{1+\overbrace{\frac{1}{4x^2}}^{0}}}{x}=2$$

Esercizio 5.9.

$$\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{\log x}{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}2^{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1$$

Esercizio 5.18.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x^4-e^{-x}+\frac{1}{x}}{3\log x^3+e^{-2x}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\log x\left(1-\overbrace{\frac{1}{2e^x\log x^4}}^{0}+\overbrace{\frac{1}{2x\log x^4}}^{0}\right)}{9\log x\left(1+\underbrace{\frac{1}{3e^{2x}\log x^3}}_{0}+\underbrace{\frac{2}{3\log x^3\cdot x^2}}_{0}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{9}\frac{\log x}{\log x}=\frac{8}{9}$$

Esercizio 5.19.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+e^{3x}}{x^4+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\cancel{3x}}\left(\frac{4x^3}{e^{3x}}+1\right)}{e^{\cancel{2x}}\left(\frac{x^4}{e^{2x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\overbrace{\frac{4x^3}{e^{3x}}}^{0}+1\right)}{\left(\underbrace{\frac{x^4}{e^{2x}}}_{0}+1\right)}=$$

Per la gerarchia degli infiniti $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{e^{3x}}=0$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^{2x}}=0$

Quindi possiamo scrivere: $+\infty$

Esercizio 5.20.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+2^x}{2x^4+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(\frac{3x^5}{2^x}+1\right)}{e^x\left(\frac{2x^4}{e^x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x\cdot\frac{\left(\frac{3x^5}{2^x}+1\right)}{\left(\frac{2x^4}{e^x}+1\right)}$$

Per la gerarchia degli infiniti vale che $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5}{2^x}=0$ $\quad e \quad$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{e^x}=0$

Inoltre $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x=0$ in quanto $0<\frac{2}{e}<1$ e quindi il limite è =0

Esercizio 5.24.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^8+2}}{x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^8\left(1+\frac{2}{x^8}\right)}}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^8}\right)}}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}x\sqrt{1+\frac{2}{x^8}}=-\infty$$

Esercizio 5.26.

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x^3+2}{x^3-2x+5}\right)=\log\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Applicando la proprietà dei limiti, per $x\to\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x^3+2}{x^3-2x+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\log 1=0$$

Esercizio 5.28.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{4}{3}}+2x^2+5x}{x^5-x^3-\sqrt{x}\cdot x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{5x}}{-\sqrt{x}\cancel{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{5}{-\sqrt{x}}=-\infty$$

Esercizio 5.31.

$$\lim_{x\to o}\frac{e^x-1}{senx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{senx}\right)=1\cdot 1=1$$

Esercizio 5.32.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\log(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)}\cdot x=1\cdot 0=0$$

Esercizio 5.33.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}^{1/2}\cdot\frac{x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1-\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\cdot 4\cdot\underbrace{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1-\cos\frac{x}{2}}}_{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$$

Esercizio 5.34.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\log(x-1+1)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\left\{-\frac{\log[(x-1)+1]}{x-1}\right\}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\log[1+(x-1)]}{x-1}=-1$$

Esercizio 5.35.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Dividiamo e moltiplichiamo per $\frac{2x}{-4x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}^{1}\cdot\frac{2x}{(-4x)}\cdot\underbrace{\frac{(-4x)}{\log[1+(-4x)]}}_{1}=$

Applichiamo i limiti naturali $=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=-\frac{1}{2}$

Esercizio 5.36.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2-1}}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Esercizio 5.37.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3senx+1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{3senx+1}{\cos x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{3senx+1}{\cos x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Esercizio 5.42.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2};\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

$$x^2+x+6=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2};\ x_1 = -3,\ x_2 = 2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{(x-2)\cancel{(x+3)}} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

Esercizio 5.43.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2};\ x_1 = 3,\ x_2 = -1$$

$$x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Esercizio 5.44.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+5}{2x^2+4x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{2}x^2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x+5}{2x^2+4x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{2}x^2}=\frac{3}{2}$$

Esercizio 5.45.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+5}{2x^3-3x^2+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{2x^{\cancel{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^3-3x^2+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$$

Esercizio 5.46.

$$\lim_{x\to0}\frac{sen^3x}{x-x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{sen^3x}{x^3\left(\frac{x}{x^3}-1\right)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{senx}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}=0$$

Esercizio 5.47.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}_{1/2}\cdot\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{0}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 5.48.

$$\lim_{x\to0}\frac{x+4x^3}{senx+x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1+\overset{0}{4x^2}\right)}{senx\left(1+\frac{x\cdot x}{senx}\right)}=1$$

6. Asintoti

Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni.

6.1. $f(x) = x(x^2-1)^2$ $[R][S]$

6.2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $[R][S]$

6.3. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x}$ $[R][S]$

6.4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $[R][S]$

6.5. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+4}$ $[R][S]$

6.6. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ $[R][S]$

6.7. $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$ $[R][S]$

6.8. $f(x) = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$ $[R][S]$

6.9. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ $[R]$

6.10. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$

6.11. $f(x) = \dfrac{x^3+2x-1}{x+2}$

6.12. $f(x) = xe^{\frac{2x+1}{x+3}}$

6.13. $f(x) = \dfrac{\log x}{e^x}$ $[R][S]$

6.14. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ $[R][S]$

6.15. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6.16. $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

6.17. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-9}}$ $[R][S]$

6.18. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$

6.19. $f(x) = x^2 e^x$

6.20. $f(x) = x \log x$

6.21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

6.22. $f(x) = \dfrac{1-\log x}{1+\log x}$

6.23. $f(x) = e^{3x^2-x+1}$

6.24. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3^{\sqrt{x}}$

6.25. $f(x) = \log(x^4 - x^3)$

6.26. $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$

6.27. $f(x) = e^{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

6.28. $f(x) = \dfrac{\log x}{1-\log x}$

6.29. $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

6.30. $f(x) = e^x + senx$

RISULTATI

6.1. $\nexists$ asintoto verticale
$\nexists$ asintoto orizzontale
$\nexists$ asintoto obliquo

6.2. $y=1$ asintoto orizzontale
$x=1$ asintoto verticale

6.3. $\nexists$ asintoto orizzontale;
$y=x$ asintoto obliquo dx e sx
$x=0$ asintoto verticale

6.4. $\nexists$ asintoti verticale
$y=0$ asintoto orizzontale

6.5. $\nexists$ asintoto orizzontale,
$\nexists$ asintoto verticale
$y=x$ asintoto obliquo

6.6. $\nexists$ asintoto orizzontale
$y=x-1$ asintoto obliquo
$x=-1$ asintoto verticale

6.7. $\nexists$ asintoto orizzontale
$\nexists$ asintoto obliquo
$x=1$ asintoto verticale

6.8. $\nexists$ asintoto orizzontale
$x=0$ asintoto verticale
$y=2x$ asintoto obliquo

6.9. $x=-1$ asintoto verticale
$\nexists$ asintoto orizzontale
$y=x-1$ asintoto obliquo

6.13. $x=0$ asintoto verticale dx
$y=0$ asintoto orizzontale dx

6.14. $x=1$ asintoto verticale
$x=-1$ asintoto verticale
$y=1$ asintoto orizzontale

6.17. $x=-3$ asintoto verticale sx
$x=3$ asintoto verticale dx
$y=1$ asintoto orizzontale

6. Asintoti

SVOLGIMENTO

Esercizio 6.1.

$f(x) = x(x^2 - 1)^2$

D: $\forall x \in \Re$

Per determinare gli eventuali asintoti, devo studiare il comportamento della funzione agli estremi del dominio. Poiché il dominio è tutto $\Re$, calcolo i limiti all'infinito.

$\lim_{x \to \mp\infty} x(x^2 - 1)^2 = \mp\infty$ Non esistono asintoti verticali e orizzontali

Verifichiamo l'esistenza di eventuali asintoti obliqui

$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x(x^2 - 1)^2}{x} = +\infty$ Non esistono asintoti obliqui

Esercizio 6.2.

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$D: x \neq 1 \Rightarrow D:]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ asintoto orizzontale

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$x = 1$ asintoto verticale a dx e sx

Esercizio 6.3.

$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}$

$D: x \neq 0 \Rightarrow D:]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2 + 3}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} x = \mp\infty$ $\nexists$ asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to 0^{+}_{-}} \frac{x^2+3}{x} = \mp\infty \Rightarrow x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2+3}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{x^2+3}{x} - x \right) = \lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{x^2+3-x^2}{x} \right) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{3}{x} = 0 = q$$

$y = x$ asintoto obliquo destro e sinistro

Esercizio 6.4.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$D : \forall x \in \Re$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

$\nexists$ asintoti verticali

Esercizio 6.5.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$$

$D : \forall x \in \Re$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^2+4} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} x = \mp\infty$$

$\nexists$ asintoti orizzontali
$\nexists$ asintoti verticali

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^2+4}\frac{1}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2}{x^2+4} = \lim_{x \to \mp\infty} 1 = 1 = m$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+4} - x \right) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3-x^3-4x}{x^2+4} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-4}{x} = 0 = q$$

$y = x$ asintoto obliquo

Esercizio 6.6.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+1}$$

$$D: x\neq 1 \Rightarrow D:]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2-4}{x+1}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2}{x}=\mp\infty \quad \nexists \text{ asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{-3}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

$x=-1$ asintoto verticale

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2-4}{x^2+x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=m$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2-4}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2-4-x^2-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(-\frac{x+4}{x+1}\right)=-1=q$$

$y=x-1$ asintoto obliquo

Esercizio 6.7.

$$f(x)=\frac{x}{\log x}$$

$$D:\begin{cases}x>0\\ \log x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\log x}=0 \qquad \nexists \text{ asintoto verticale destro}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\log x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\log x}=\frac{1}{0^+}=-+\infty$$

$x=1$ asintoto verticale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty \quad \nexists \text{ asintoto orizzontale}$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\log x} = 0 \quad \nexists \text{ asintoto obliquo}$$

Esercizio 6.8.

$$f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$$

$$D: x \neq 0 \Rightarrow D:]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left[2x - \frac{\cos x}{x}\right] = \begin{matrix} -\infty - 0 = -\infty \\ +\infty - 0 = +\infty \end{matrix} \quad \nexists \text{ asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to 0^-} 2x - \frac{\cos x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2x - \frac{\cos x}{x} = +\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{2x - \frac{\cos x}{x}}{x}\right) = \lim_{x\to\mp\infty} 2 - \frac{\cos x}{x^2} = 2 - 0 = 2 = m$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(2x - \frac{\cos x}{x} - 2x\right) = 0 = q$$

$y = 2x$ asintoto obliquo

Esercizio 6.13.

$$f(x) = \frac{\log x}{e^x}$$

Dominio: $\begin{cases} x > 0 \\ e^x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in R \end{cases} \Rightarrow]0,+\infty[$

6. Asintoti

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{e^x}=\frac{-\infty}{1}=-\infty \Rightarrow x=0 \text{ asintoto verticale dx}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}0 \Rightarrow y=0 \text{ asintoto orizzontale}$$

Esercizio 6.14.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$$

Dominio: $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1 \Rightarrow D:]-\infty;-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\cong\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}\cong\lim_{x\to\pm\infty}1=1\Rightarrow y=1 \text{ asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1-2-1}{-2\cdot 0^-}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{-2}{-2\cdot 0^+}=\frac{-2}{0^+}=+\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ asintoto verticale

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{0^-\cdot 2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{0^+\cdot 2}=+\infty$$

$\Rightarrow x=+1$ asintoto verticale

Esercizio 6.17.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-9}}$$

Dominio: $\frac{x^2}{x^2-9}\geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} N\geq 0: x^2\geq 0 \Rightarrow \forall x\in R \\ D>0: x<-3; x>3\end{matrix} \Rightarrow D:]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-9}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\cong\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}}=1\Rightarrow y=1 \text{ asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to -3^-}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-9}} = \lim_{x\to -3^-}\sqrt{\frac{x^2}{(x-3)(x+3)}} = \sqrt{\frac{9}{-6\cdot 0^-}} = \sqrt{\frac{9}{0^+}} = +\infty \Rightarrow x=-3 \text{ asintoto verticale sx}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-9}} = \lim_{x\to 3^+}\sqrt{\frac{x^2}{(x-3)(x+3)}} = \sqrt{\frac{9}{6\cdot 0^+}} = \sqrt{\frac{9}{0^+}} = +\infty \Rightarrow x=3 \text{ asintoto verticale dx}$$

7. Derivate

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni.

7.1. $f(x)=8x+5$ $[R]$

7.2. $f(x)=5x^2-3x+2$

7.3. $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x$ $[R]$

7.4. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x$

7.5. $f(x)=x+\sin x-\cos x$

7.6. $f(x)=\log x-e^x$ $[R]$

7.7. $f(x)=3\sqrt{x}$

7.8. $f(x)=2\log x-\tan x$

7.9. $f(x)=3e^x-\frac{1}{2}\log x$

7.10. $f(x)=4\sqrt{x}-2\sin x$ $[R]$

7.11. $f(x)=(3-4x)(x^2-3x+1)$

7.12. $f(x)=(x^2-1)(3x+4)$

7.13. $f(x)=x\sin x$ $[R]$

7.14. $f(x)=x\sin x+\cos x$

7.15. $f(x)=x-\sin x\cos x$

7.16. $f(x)=x(\log x-1)$

7.17. $f(x)=\sin x(\sin x-\cos x)$ $[R]$

7.18. $f(x)=e^x\log x$

7.19. $f(x)=x^2e^x$

7.20. $f(x)=x^3\log x$

7.21. $f(x)=\frac{3}{x}$

7.22. $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ $[R]$

7.23. $f(x)=\frac{5x^2-1}{x+2}$

7.24. $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-3}$ $[R]$

7.25. $f(x)=\frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+9}$

7.26. $f(x)=\frac{\cos x-1}{\cos x+1}$

7.27. $f(x)=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ $[R]$

7.28. $f(x)=\frac{\log x}{x}$ $[R]$

7.29. $f(x)=\left(5x^2-3x+1\right)^2$

7.30. $f(x)=\left(x^3-4x\right)^3$

7.31. $f(x)=\left(4x+1\right)^3-\left(x^3-1\right)^2$ $[R]$

7.32. $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$

7.33. $f(x)=\cos x^2$

7.34. $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos 2x$ $[R]$

7.35. $f(x)=e^{\frac{x-2}{x}}$ $[R]$

7.36. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

7.37. $f(x) = \sin^2 x - \cos 5x \quad [R]$

7.38. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

7.39. $f(x) = \sqrt{\sin(1 + x^2)}$

7.40. $f(x) = \log(\frac{x^2}{2} + x)$

7.41. $f(x) = e^{2\cos x - x}$

7.42. $f(x) = \log^3(x^2) \quad [R]$

Determinare gli eventuali estremi relativi ed assoluti delle seguenti funzioni e, dove richiesto, determinare poi l'equazione della retta tangente al grafico delle funzioni nel punto di ascissa x_0.

7.43. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \qquad x_0 = 2 \quad [R][S]$

7.44. $f(x) = \log\sqrt{4 - x^2} \qquad x_0 = 1 \quad [R][S]$

7.45. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 4} \qquad x_0 = 1 \quad [R][S]$

7.46. $f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \qquad x_0 = 0 \quad [R][S]$

7.47. $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \qquad x_0 = 1 \quad [R][S]$

7.48. $f(x) = xe^{-x^2} \quad [R][S]$

7.49. $f(x) = (x-3)\sqrt[3]{x^2} \quad [R][S]$

RISULTATI

7.1. $f'(x)=8$

7.3. $f'(x)=x^3-x^2+3x-1$

7.6. $f'(x)=\frac{1}{x}-e^x$

7.10. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-2\cos x$

7.13. $f'(x)=senx+x\cos x$

7.17. $f'(x)=sen^2x-\cos^2x+2senx\cos x$

7.22. $f'(x)=\frac{-4}{(x-2)^2}$ poichè $f(x)=1+\frac{4}{x-2}$

7.24. $f'(x)=\frac{x^2-6x+13}{(x-3)^2}$

7.27. $f'(x)=\frac{2x\cos x-2senx}{(x-senx)^2}$

7.28. $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$

7.31. $f'(x)=12(4x+1)^2-6x^2(x^3-1)$

7.34. $f'(x)=2senx\cos x\cos 2x-2sen^2xsen2x=sen2x(\cos 2x-2sen^2x)$

7.35. $f'(x)=e^{\frac{x-2}{x}}\cdot\frac{2}{x^2}$ poichè $f(x)=e^{1-\frac{2}{x}}$

7.37. $f'(x)=2senx\cos x+5sen5x$

7.42. $f'(x)=\frac{6}{x}\log^2(x)^2$

7.43. $\nexists$ asintoti verticali;
$\nexists$ asintoto orizzontale;
$\nexists$ asintoto obliquo;
$x=-1$ e $x=1$ punti di min. relativo
$x=0$ punto di max relativo

$\nexists$ max assoluto di f poiché supf=$+\infty$
$\exists$ min assoluto di f=-4
Equazione della retta tangente in $x_0 = 2: y = 24x - 43$

7.44. $x = -2$ e $x = 2$ asintoti verticali
$x = 0 =$ punto di max. relativo
$\exists$ max assoluto di f=$\log 2$ poiché inff=$-\infty$
$\nexists$ min assoluto di f
Equazione della retta tangente in $x_0 = 1: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \log\sqrt{3}$

7.45. $x = -2$ e $x = 2$ asintoti verticali
$y = 0$ asintoto orizzontale
$\nexists$ min e max assoluti di f perché inff=$-\infty$, supf=$+\infty$
Equazione della retta tangente in $x_0 = 1: y = -\frac{20}{9}x - \frac{8}{9}$

7.46. $y = 0$ asintoto orizzontale dx
$x = 1$ punto di min relativo e assoluto con f(1)=0
$x = 3$ punto di max relativo e assoluto con f(3)= $4e^{-3}$
Equazione della retta tangente in $x_0 = 0: y = -3x + 1$

7.47. $y = e$ asintoto orizzontale
$x = 0$ asintoto verticale sx
$\nexists$ min e max assoluti di f poiché supf(x)= $+\infty$, inff(x)=0 e f(x)>0
Equazione della retta tangente in $x_0 = 1: y = x$

7.48. $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di min relativo
$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di max relativo
$y = 0$ asintoto orizzontale sx e dx
$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ min assoluto di f
$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ max assoluto di f

7.49. $x = \frac{6}{5}$ punto di min relativo
$x = 0$ punto di max relativo
$\nexists$ min e max assoluti di f poiché inff=$-\infty$, supf=$+\infty$

SVOLGIMENTO

Esercizio 7.43.

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

Dominio: $\forall x \in \Re$

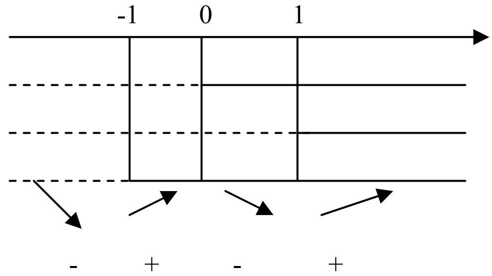
Monotonia

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0,\ x = 1,\ x = -1$ sono punti stazionari

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) \geq 0$

$$\begin{cases} 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \end{cases}$$



$x = -1$ punto di minimo relativo $\Rightarrow f(-1) = -4$ minimo relativo

$x = 0$ punto di massimo relativo $\Rightarrow f(0) = -3$ massimo relativo

$x = 1$ punto di minimo relativo $\Rightarrow f(1) = -4$ minimo relativo

Il dominio non è limitato:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 - 2x^2 - 3) = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 = +\infty$$

$\nexists$ massimo assoluto di f e $\sup f = +\infty$

$\exists \min f = -4$ nei punti $x = \pm 1$ punti di minimo assoluto

L'equazione della retta tangente in un punto x_0 ha equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Pertanto

$f(2) = 5; f'(2) = 24$

$y = 24(x-2) + 5 \Rightarrow y = 24x - 23$

Esercizio 7.44.

$f(x) = \log\sqrt{4-x^2}$

Dominio:

$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} > 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2-4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

$D:]-2,2[$

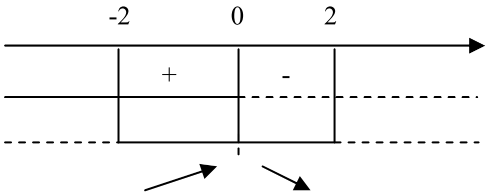
Monotonia

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{2(4-x^2)} = \frac{x}{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x = 0$ punto stazionario

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{4-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\begin{array}{ll} N > 0: -x \geq 0 & x \leq 0 \\ D > 0: 4-x^2 < 0 & \Rightarrow -2 < x < 2 \end{array}$



$x = 0$ punto di massimo relativo $f(0) = \log 2$ massimo relativo

In particolare $x = 0$ punto di massimo assoluto $f(0) = \log 2$ massimo assoluto

$\nexists$ minimo assoluto

$\lim_{x\to -2^+} \log\sqrt{4-x^2} = \lim_{x\to -2^+} \log\sqrt{(2-x)(2+x)} = \log\sqrt{4 \cdot 0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 2^-} \log\sqrt{4-x^2} = \lim_{x\to 2^-} \log\sqrt{(2-x)(2+x)} = \log\sqrt{4 \cdot 0^+} = -\infty$

La funzione non è limitata inferiormente e $Inf f = -\infty$

Retta tangente nel punto $x_0 = 1$:

$f(1) = \log\sqrt{3};\ f'(1) = -\frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}(x-1) + \log\sqrt{3}$ cioè $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \log\sqrt{3}$

Esercizio 7.45.

$f(x)=\frac{4x}{x^2-4}$

Dominio:

$x^2-4\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 2 \Rightarrow \Re-\{-2,2\}$

$f'(x)=\frac{4(x^2-4)-4x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{4x^2-16-8x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-4x-16}{(x^2-4)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x^2-16=0 \Leftrightarrow 4x^2+16=0 \Rightarrow \nexists x\in\Re \Rightarrow \nexists$ punti stazionari

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2-16}{(x^2-4)^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+16}{(x^2-4)^2}\leq 0 \ \nexists x \Rightarrow \forall x\in D,\ f'(x)<0$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2}=0$

$\Rightarrow f$ è decrescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty,-2[,\ \ ]-2,2[,\ \ ]2,+\infty[$

$\lim_{x\to -2^-}\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-8}{-4(0^-)}=\frac{-8}{0^+}=-\infty$

$\lim_{x\to -2^+}\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-8}{-4(0^+)}=\frac{-8}{0^-}=+\infty$

$\lim_{x\to 2^-}\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-8}{4(0^-)}=\frac{8}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to 2^+}\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-8}{4(0^+)}=\frac{8}{0^+}=+\infty$

$\nexists$ minimi e massimi assoluti di f

$Sup f=+\infty; Inf f=-\infty$

Retta tangente nel punto $x_0=1$:

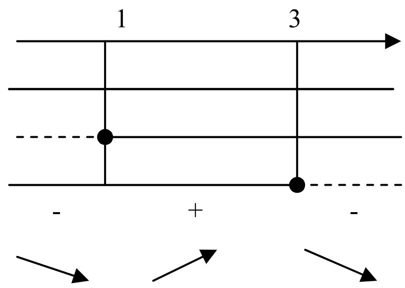
$f(1)=-\frac{1}{3}; f'(1)=-\frac{20}{9}$

$y=-\frac{1}{3}(x-1)-\frac{20}{9}$ cioè $y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{9}$

Esercizio 7.46.
$f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

Dominio: $]-\infty,+\infty[$

Monotonia
$f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x} = e^{-x}(x-1)[2-(x-1)] = e^{-x}(x-1)(3-x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ e $x = 3$ punti stazionari
$e^{-x} \geq 0 \Rightarrow sempre$
$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-1)(3-x) \geq 0$
$3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$



$x = 1$ punto di minimo relativo $f(1) = 0$ min relativo e assoluto
$x = 3$ punto di massimo relativo $f(3) = 4e^{-3}$ max relativo

$\lim_{x \to +\infty} (x-1)^2 e^{-x} = 0$
$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^2 e^{-x}}{x} = -\infty$
La funzione non è limitata superiormente $Supf = +\infty$, quindi non ci sono massimi assoluti
La funzione non è limitata inferiormente $Inff = 0$ (che non è min assoluto perché $f(x) > 0$)

Esercizio 7.47.

$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$

Dominio: $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

Monotonia

$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{x-(x-1)}{x^2} = e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$ Mai verificata : $\nexists x \in D_f : f'(x) = 0 \Rightarrow \nexists$ punti stazionari

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re - \{0\} \Rightarrow f$ crescente in ciascuno degli intervalli $\left]-\infty, 0\right[, \ \left]0, +\infty\right[$

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e$

$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{\frac{-1}{0^-}} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}} = e^{\frac{-1}{0^+}} = 0$

$\nexists$ minimi e massimi relativi e assoluti

La funzione non è limitata superiormente $Supf = +\infty$

La funzione non è limitata inferiormente $Inff = 0$ (non ha min assoluto perché $f(x) > 0$)

Retta tangente nel punto $x_0 = 1$:

$f(1) = 1; f'(1) = 1$

$y = x - 1 + 1$ cioè $y = x$

Esercizio 7.48.

$f(x) = xe^{-x^2}$

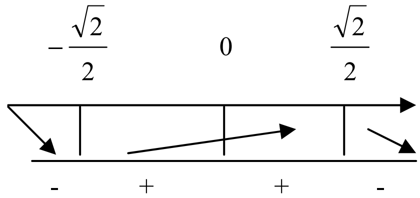
Dominio: $\Re$

Monotonia

$f'(x) = e^{-x^2}(1-2e^{-x^2})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ punti stazionari

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di minimo relativo $\Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$ minimo relativo

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di massimo relativo $\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ massimo relativo

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$
$\Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ minimo assoluto

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ massimo assoluto

Esercizio 7.49.

$f(x) = (x-3)\sqrt[3]{x^2}$

Dominio: $\Re$

Monotonia

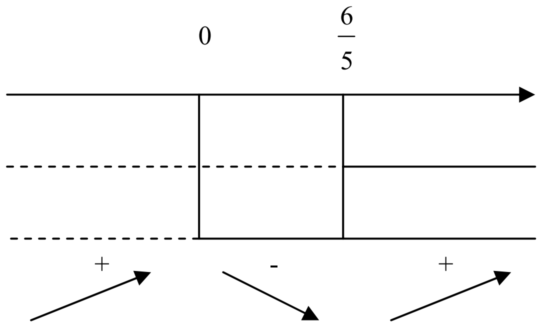
$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + (x-3)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(x-3)\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3x+2x-6}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow 5x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow \exists$ punto stazionario

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 5x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{6}{5} \\ x > 0 \end{cases}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $x \geq \frac{6}{5}$



f cresce $\Leftrightarrow x < 0$ e $x \geq \frac{6}{5}$

$x = \frac{6}{5}$ punto di minimo relativo $\Rightarrow f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{6}{5} - 3\right)\sqrt[3]{\frac{36}{25}} = -\frac{9}{5}\sqrt[3]{\frac{36}{25}}$ minimo relativo

$x = 0$ punto di massimo relativo $\Rightarrow f(0) = 0$ massimo relativo

$\lim_{x\to\pm\infty}(x-3)\sqrt[3]{x^2} = \pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)\sqrt[3]{x^2}}{x} = \pm\infty$

$\nexists$ massimi e minimi assoluti

$\sup f = +\infty$

$\inf f = -\infty$

8. Studio Funzione

Studiare le seguenti funzioni e tracciarne il grafico.

8.1. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ $[R][S]$

8.2. $f(x) = x^3 e^{-x}$

8.3. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{e^x}$

8.4. $f(x) = e^x - \dfrac{2}{3x - 9}$

8.5. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

8.6. $f(x) = \dfrac{6x^2 + 2x + 3}{2(2x^2 + 1)}$

8.7. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x + 1}{x^2}$

8.8. $f(x) = \log(e^x + 1)$ $[R][S]$

8.9. $f(x) = e^{-x^2}$ $[R][S]$

8.10. $f(x) = \dfrac{1+x}{e^{\frac{1}{x}}}$ $[R][S]$

8.11. $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}$

8.12. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

8.13. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

8.14. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{4 - x^2}}$

8.15. $f(x) = \dfrac{8}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

8.16. $f(x) = \log(x^2 - 4)$

8.17. $f(x) = xe^x$

8.18. $f(x) = 2e^x + e^{-x}$

8.19. $f(x) = \log\dfrac{1}{1 - x^2}$

8.20. $f(x) = e^x \sqrt{1 - x}$

8.21. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2 - x}}$

8.22. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

8.23. $f(x) = \log(3x^2 - x)$

8.24. $f(x) = 5^{\frac{1}{x-1}}$

8.25. $f(x) = 3^{x^2 - 1}$

8.26. $f(x) = xe^{\frac{x-1}{x}}$

8.27. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\log x}$

8.28. $f(x) = \sqrt{senx}$

8.29. $f(x) = x^3 \log x$

8.30. $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x^2 - 1}{x}}$

SVOLGIMENTO

Esercizio 8.1.

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Dominio : $x \neq 0 \Rightarrow \Re - \{0\} \Leftrightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$\lim_{x \to \pm\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ asintoto orizzontale

Ricerca dell'eventuale asintoto obliquo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 = q$$

$\Rightarrow y = x + 1$ asintoto obliquo

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot +\infty] = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ asintoto verticale a dx}$$

$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \nexists$ asintoto verticale a sx

Monotonia

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

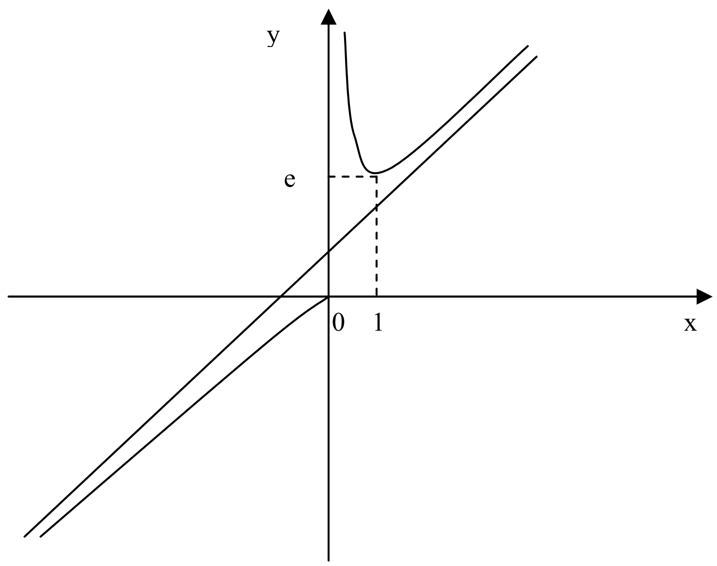
$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ punto stazionario

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \geq 1 \\ x > 0 \end{matrix}$$

f cresce in $(-\infty, 0)$ e $[1, +\infty)$; f decresce in $(0, 1]$

$\Rightarrow x = 1$ punto di min. rel. $\Rightarrow f(1) = e$

$\nexists$ max assoluto; $\nexists$ min assoluto; $\text{Inf} f = -\infty$; $\text{Sup} f = +\infty$



Esercizio 8.8.

$f(x) = \log(e^x + 1)$

Dominio : $e^x + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re$

Comportamento agli estremi del dominio

$\lim_{x \to -\infty} \log(e^x + 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale sx

$\lim_{x \to +\infty} \log(e^x + 1) = +\infty \Rightarrow \nexists$ asintoto orizzontale dx

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

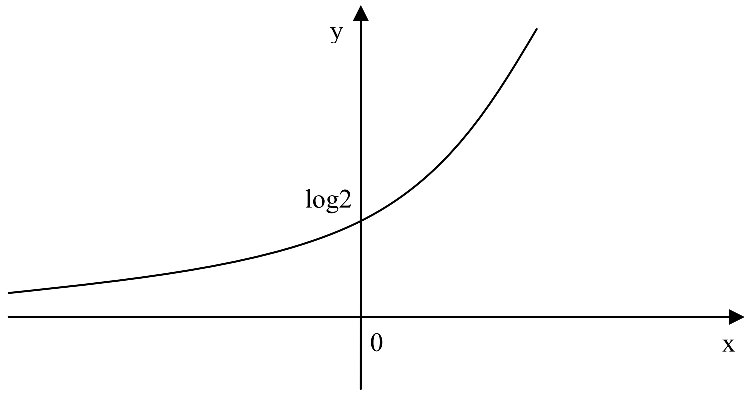
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1 = m \\ \lim_{x \to +\infty} \left[\log(e^x + 1) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \log \dfrac{e^x + 1}{e^x} = 0 = q \end{array}\right. \Rightarrow y = x \text{ asintoto obliquo dx}$$

Monotonia

$f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} > 0, \quad \forall x \in \Re$

Inf$f = 0$

Sup$f = +\infty$



Esercizio 8.9.

$f(x) = e^{-x^2}$

Dominio : $\Re$

Comportamento agli estremi del dominio

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale

Monotonia :

$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ punto stazionario

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \Rightarrow x = 0$ pto di max. rel. $\Rightarrow f(0) = 1$ max. rel.

$x = 0$ punto di max. assoluto $\Rightarrow f(0) = 1$

$\nexists$ min assoluto; Inf $f = 0$;

Concavità :

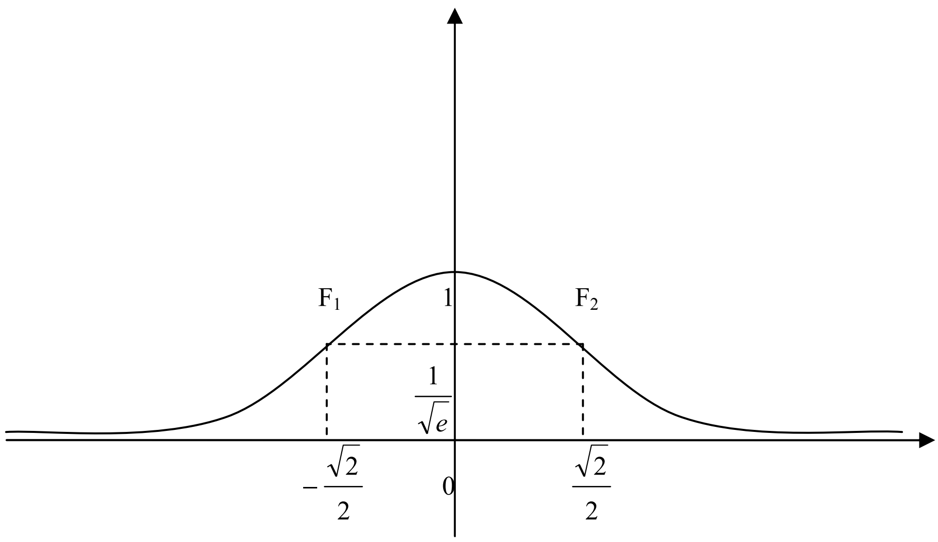
$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

$\Rightarrow f''(x) \geq \Leftrightarrow e^{-x^2}(4x^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$

f convessa se $x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

f concava se $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ pti di flesso $\Rightarrow f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ flessi



Esercizio 8.10.

$$f(x)=\frac{1+x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

Dominio :

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0$$

Positività

$f > 0$ se $x > -1$

Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\pm\infty}{1} = \pm\infty \Rightarrow \nexists \text{ asintoto orizzontale} \quad \begin{matrix} \sup f = +\infty \\ \inf f = -\infty \end{matrix}$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{xe^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+x}{e^{\frac{1}{x}}}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{1+x-xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\left(\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)\right] = 1-1 = 0 = q \quad \Rightarrow y = x \text{ asintoto obliquo}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+x}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ asintoto verticale a sx}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ asintoto verticale a dx}$$

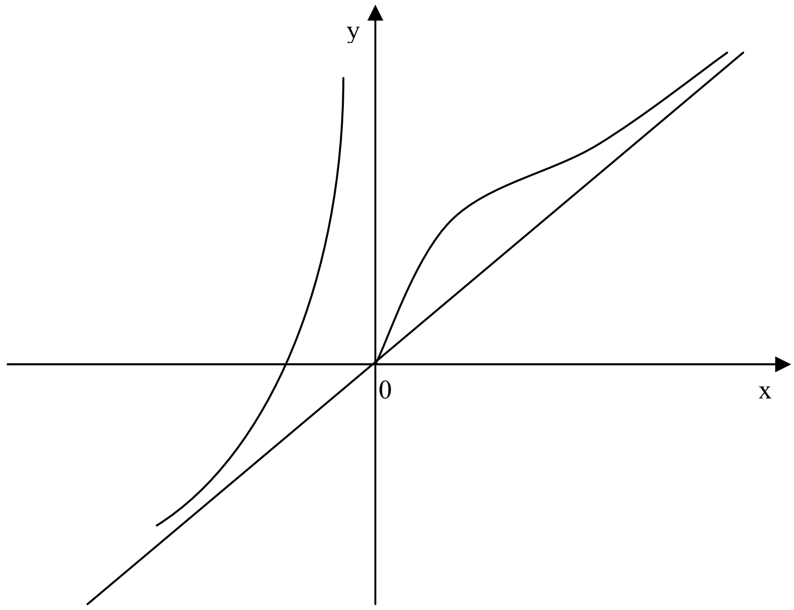
Monotonia

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - (1+x)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1+x}{x^2}\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{x^2+1+x}{x^2e^{\frac{1}{x}}} > 0$$

Risolvo la disequazione : $\Delta < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$f(x)$ è crescente sia in $]-\infty,0[$ che in $]0,+\infty[$

8. Studio Funzione



9. Integrali

Calcolare le primitive delle seguenti funzioni.

9.1. $f(x) = e^{(3x+2)} - \cos 2x$ [R][S]

9.2. $f(x) = \sqrt{x} + x^2 + \frac{1}{x}$ [R]

9.3. $f(x) = x^3 - 2x^{-3} + \sqrt{3x+2}$ [R][S]

9.4. $f(x) = (3x+1)^{\frac{3}{4}}$ [R]

9.5. Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \sin 2x + \frac{3}{x^3} - x^4$ tale che $F(1) = 1.$ [R][S]

9.6. Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = x^3 - \sin 2x$ tale che $F(0) = 1$.

9.7. Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 + \cos 2x$ tale che $F(1) = 1$.

Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

9.8. $\int x^5 dx$ [R]

9.9. $\int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2e^x\right)dx$ [R]

9.10. $\int \left(\frac{1}{x} + x\right)dx$ [R]

9.11. $\int \left(x + \frac{2}{3x}\right)dx$ [R]

9.12. $\int \frac{3x^2 + 4x}{x^2} dx$ [R]

9.13. $\int (4x^4 + 3x^2 + 5x)dx$ [R]

9.14 $\int \frac{\log^3 x}{x} dx$

9.15. $\int \frac{dx}{x \log^3 x}$

9.16. $\int x^2 e^{x^3} dx$

9.17. $\int (1 + 2x^3)^2 dx$

9.18. $\int \frac{2x}{2x+5} dx$

9.19. $\int \frac{x-1}{x+1} dx$

9.20. $\int \frac{1}{5x+2} dx$

9.21. $\int \cos x \sqrt{1 + \sin x} dx$

9.22. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

9.23. $\int \frac{e^{\tan x}-1}{\cos^2 x}dx$

Calcolare i seguenti integrali definiti.

9.24. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$

9.25. $\int_0^1 (2x-e^x)dx$

9.26. $\int_1^2 \frac{3}{x^4}dx$

9.27. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin x dx$

9.28. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 x}dx$

9.29. $\int_1^9 \frac{dx}{2x}$

9.30. $\int_8^9 2^x dx$

9.31. $\int_0^1 \cos \pi x dx$

9.32 $\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}dx$

9.33. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, l'asse y, il grafico della funzione $f(x)=1-x^3$ e la retta $x = 1$.

9.34. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, le rette $x = -1$ e $x = 1$ e il grafico della funzione $f(x)=\frac{1}{e^x}-1$.

9.35. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra i grafici delle funzioni $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=x^2$.

9.36. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse y, le rette $x = 2$ e i grafici delle funzioni $f(x)=x+1$ e $g(x)=xe^{-x^2}$.

9.37. Calcolare l'area della regione piana compresa tra $y=0, x=1, x=4, y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.$[R]$

RISULTATI

9.1. $\frac{1}{3}e^{3x+2} - \frac{1}{2}sen2x + c$

9.2. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

9.3. $\frac{1}{4}x^4 + x^{-2} + \frac{2}{9}\sqrt{(3x+2)^2} + c$

9.4. $\frac{4}{21}(3x+1)^{\frac{7}{4}} + c$

9.5. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}\cos 2 + \frac{17}{10}$

9.8. $\frac{x^6}{6} + c$

9.9. $x^3 + \log|x| - 2e^x + c$

9.10. $\log|x| + \frac{x^2}{2} + c$

9.11. $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\log|x| + c$

9.12. $3x + 4\log|x| + c$

9.13. $\frac{4}{5}x^5 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c$

9.37. 2

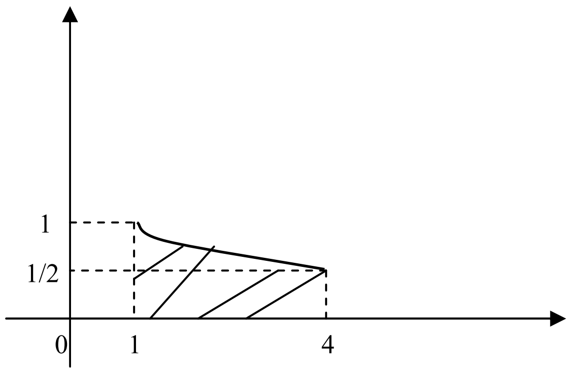
SVOLGIMENTO

Esercizio 9.12.

$$\int \frac{3x^2+4x}{x^2}dx = \int \frac{3x^2}{3x^2}dx + \int \frac{4x}{x^2}dx = \int 1dx + 4\int \frac{1}{x}dx = x + 4\log|x| + c$$

Esercizio 9.37.

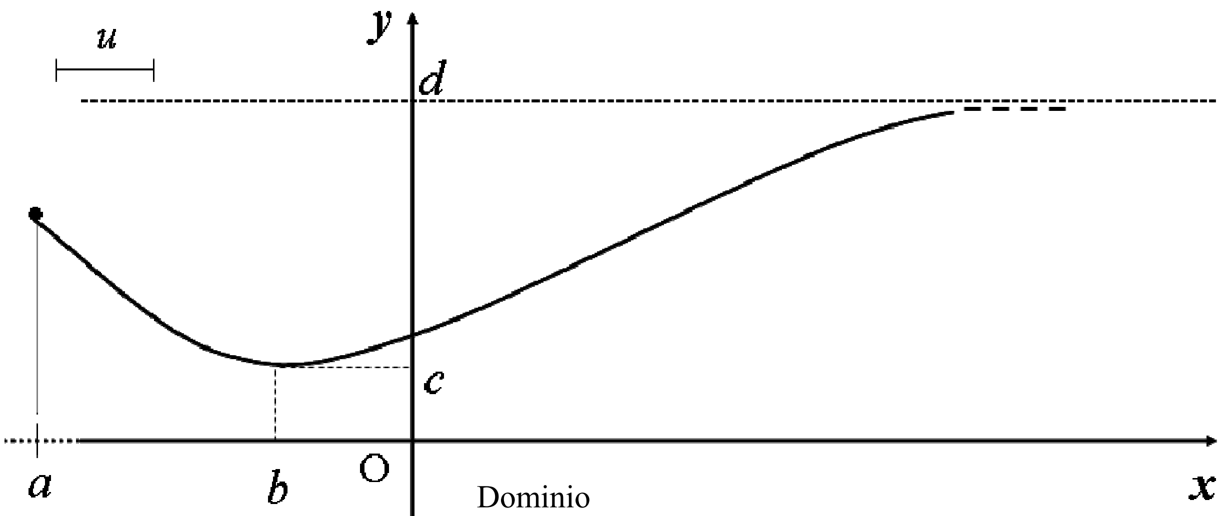
$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^4 = 2$$



10. Interpretazione grafico funzione

Dal grafico della funzione in figura, determinare:
dominio di f, codominio di f
estremo superiore ed estremo inferiore
massimi e minimi relativi e gli eventuali massimo e minimo assoluto
gli intervalli in cui f cresce e decresce, gli zeri di f, gli intervalli in cui f > 0 ed f < 0

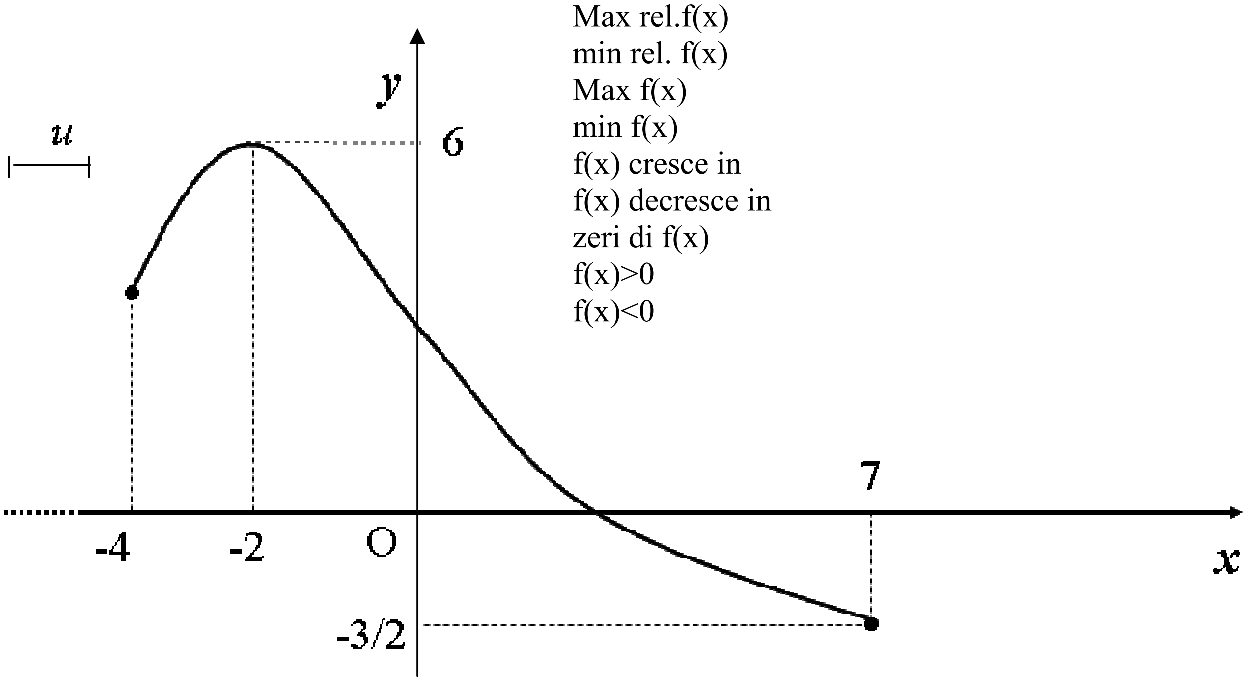
1



Dominio
Codominio
sup f(x)
inf f(x)
Max rel.f(x)
min rel. f(x)
Max f(x)
min f(x)
f(x) cresce in
f(x) decresce in
zeri di f(x)
f(x)>0
f(x)<0

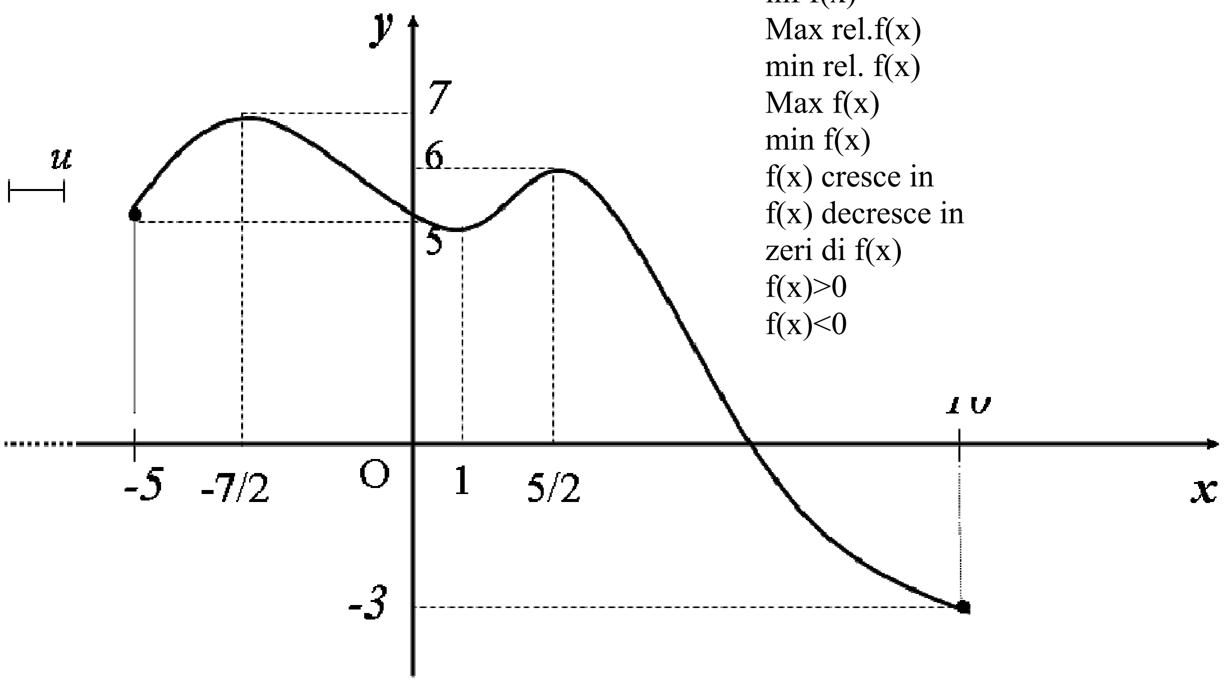
2

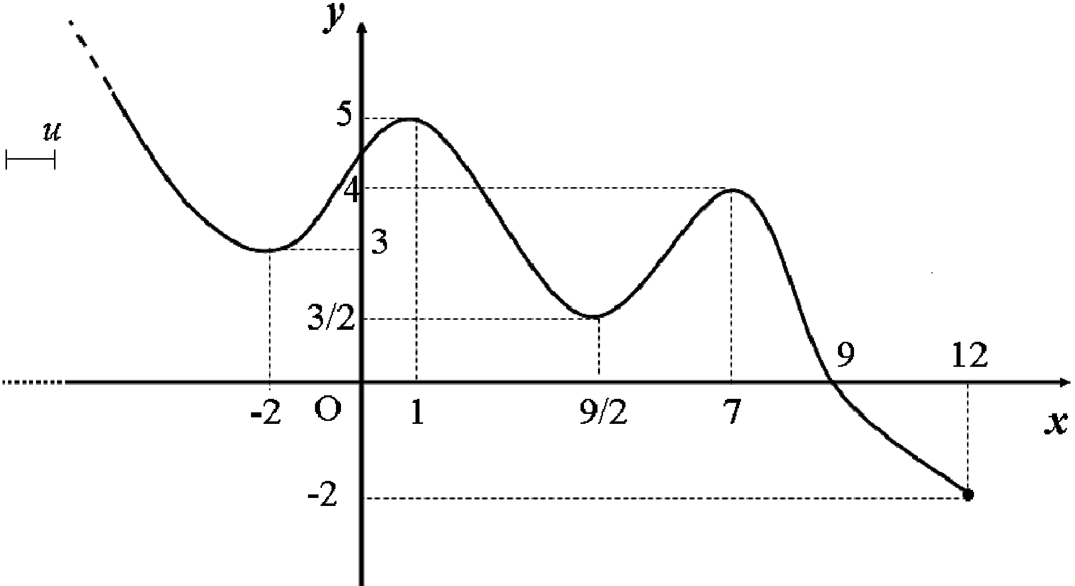
Dominio
Codominio
sup f(x)
inf f(x)
Max rel.f(x)
min rel. f(x)
Max f(x)
min f(x)
f(x) cresce in
f(x) decresce in
zeri di f(x)
f(x)>0
f(x)<0



3

Dominio
Codominio
sup f(x)
inf f(x)
Max rel.f(x)
min rel. f(x)
Max f(x)
min f(x)
f(x) cresce in
f(x) decresce in
zeri di f(x)
f(x)>0
f(x)<0




y
u
5
4
3
3/2
-2
-2
O
1
9/2
7
9
12
x