



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di
TECNICA DELLE COSTRUZIONI

Prof. Antonello De Luca

Appunti sul
TAGLIO nel C.A.
a cura di Ernesto Grande

Anno accademico 2002/03

INDICE

1.	INTRODUZIONE.....	2
2.	IL TAGLIO NELLE SEZIONI IN C.A.....	6
3.	IL TRALICCIO DI MORSCH.....	11
4.	IL TRALICCIO AD INCLINAZIONE VARIABILE.....	13
5.	STAFFE O FERRI PIEGATI?.....	15
6.	I MECCANISMI RESISTENTI	18
	6.1 Trave priva di armatura trasversale.....	18
	6.2 Trave dotata di armatura trasversale.....	20
7	INTERAZIONE TRA FLESSIONE E TAGLIO.....	21
8.	LE NORMATIVE NEL PROGETTO DEGLI ELEMENTI A TAGLIO.....	22
	8.1. Metodo alle Tensioni Ammissibili.....	22
	8.2. Metodo agli Stati Limite Ultimi.....	23
	8.2.1 Travi non armate.....	23
	8.2.2 Travi armate.....	24
	8.2.3 Verifica armatura longitudinale.....	25
9.	ADERENZA ACCIAIO - CALCESTRUZZO.....	26
10.	BIBLIOGRAFIA.....	29

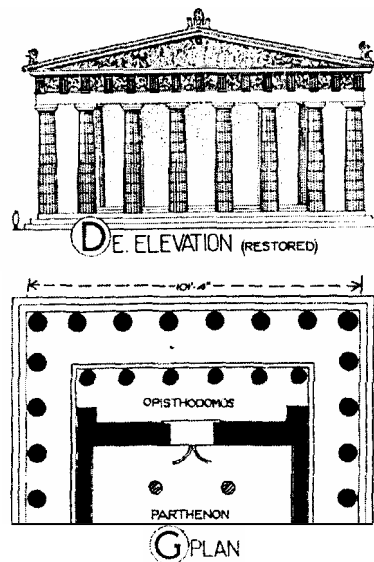
1. INTRODUZIONE

Gli elementi strutturali impiegati per superare le luci, sono riconducibili essenzialmente a due: l'architrave e la trave.

L'utilizzo dell'uno o dell'altro sistema nella storia delle costruzioni è dipeso essenzialmente dalla conoscenza dei materiali, dal loro comportamento e dalle caratteristiche meccaniche degli stessi.

I materiali lapidei, per la loro scarsissima resistenza a trazione, vincolavano fortemente le strutture sia per gli aspetti architettonici che per quelli funzionali, riconducendo i sistemi essenzialmente all'architrave. Il legno invece, per le sue caratteristiche di isoresistenza, si avvicina maggiormente ad un sistema inflesso.

Nei templi dorici, il rapporto tra luce e altezza della trave è circa di uno a due risultando così il sistema fortemente bidimensionale e basato più sul taglio che non sulla flessione. Questo perché l'intercolumnio è compreso tra due e tre moduli (dove per modulo si intende il diametro della colonna) e l'altezza della trave, sulla quale si appoggiavano il fregio e la cornice, è pari quasi ad un intero modulo.



Nel Rinascimento, architetti quali Pacioli e Palladio, discutevano ancora sui rapporti geometrici degli elementi per la determinazione di vere e proprie leggi di proporzionalità e armonia.

Possiamo pertanto affermare che in fondo, fino alla fine del Settecento, anche per i limiti dei materiali allora disponibili, le tecniche costruttive si sono basate principalmente sulle dimensioni e sui rapporti geometrici tra loro intercorrenti.

L'unica eccezione è costituita dagli studi galileiani in merito alla trattazione dell'elemento trave, studi successivamente ripresi dalle ricerche di numerosi scienziati quali Newton, Hooke, Huygens che confrontarono modelli teorico-previsionali con la sperimentazione scientifica. Finalmente all'arte del costruire si affiancò un fondamento teorico.

Ed infatti la formulazione matematica di Eulero-Bernoulli dell'elemento trave, quale semplificazione geometrica di una struttura monodimensionale (e ancora oggi adottata), risale proprio alla metà del 700.

In una trave snella, infatti, in cui sia lecito trascurare le deformazioni taglianti rispetto a quelle flessionali e soggetta a sole azioni trasversali q , combinando:

il legame elastico	$-EIv'' = M$
con la condizione di equilibrio	$-q = M''$
si ottiene l'equazione della linea elastica	$EIv'''' = q.$

A ben riflettere la trave inflessa è un elemento dove una dimensione è prevalente rispetto alle altre due e, pertanto, si discosta dai sistemi architravati degli antichi dove il materiale lapideo consentiva luci piuttosto limitate rispetto alle altezze delle travi stesse. Questo perché all'aumentare della luce, le sollecitazioni di trazione all'interno di un elemento aumentano tanto da diventare insostenibili per

i materiali lapidei a causa della diversa resistenza a trazione e a compressione: il sistema trilitico non potrà mai diventare un sistema inflesso a causa delle caratteristiche intrinseche del materiale.

Dalla Scienza delle Costruzioni sappiamo che una generica sezione di un solido risulta sollecitata dal solo sforzo di taglio se la risultante delle azioni esterne è contenuta nel piano della sezione e passa per il centro di taglio. Sollecitazioni di taglio puro (ovvero $M = 0$ e $V \neq 0$), non sono previste nella teoria tecnica della trave dove $V = dM / dz$ (ossia la trave di Bernoulli Eulero in cui si fa l'ipotesi cinematica della conservazione delle sezioni piane ortogonali all'asse) se non in casi abbastanza sporadici quale nell'estremo libero di una mensola incastrata caricata da una forza concentrata all'estremità. Se però la forza esterna non è applicata nel centro di taglio trasversalmente alla trave, il taglio sarà accompagnato anche dalla torsione. Nella teoria strutturale della trave di Timoshenko (modello cinematico che considera anche la deformabilità tagliante della trave) dove $V = dM / dz + m$, invece, è possibile che $M = 0$ e $V \neq 0$ come nel caso di una trave appoggiata caricata da una coppia distribuita lungo la sua lunghezza. Ritornando alla trave euleriana, pertanto, ben più diffusi sono i casi in cui il taglio è accompagnato dalla caratteristica flettente del momento variabile lungo l'asse della trave.

Se volessimo scrivere le equazioni di congruenza, così come si procede per lo Sforzo Normale e il Momento Flettente, avremo che τ_{zx} e τ_{zy} sono diverse da zero (perché dovute al Taglio) ma tale sarà anche la σ_z (dovuta al Momento Flettente). Non è difficile pervenire alla conclusione che una trattazione esatta del Taglio è notevolmente e inutilmente complessa se la si vuole applicare alle strutture dell'ingegneria civile.

Per tale motivo, si è adottata la *teoria di Jourawski*, che non scrive equazioni di congruenza e conduce a dei risultati molto bene approssimati con formule molto semplici.

Tale teoria presuppone che in una generica sezione la τ_{zy} sia costante lungo una generica corda e pari al valore:

$$\tau_{zy} = (V_y S_g) / (I_g b) \quad (1)$$

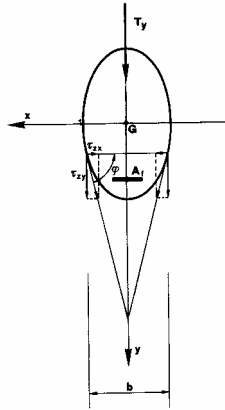
dove: V_y è la componente del taglio diretta secondo l'asse y;
 I_g è il momento d'inerzia della sezione reagente rispetto al suo baricentro;
 S_g è il momento statico, rispetto all'asse baricentrico della sezione reagente, dell'area compresa tra la corda considerata ed il contorno di una delle due parti in cui la corda stessa divide la sezione;
 b è la larghezza della corda su cui si valuta la τ_{zy} .

Da notare che la sezione in corrispondenza della quale si sta valutando la tensione tangenziale, potrà essere soggetta a flessione o a pressoflessione. In entrambi i casi, il momento d'inerzia e quello statico andranno sempre calcolati in corrispondenza dell'asse baricentrico della sezione reagente sia essa intera o parzializzata.

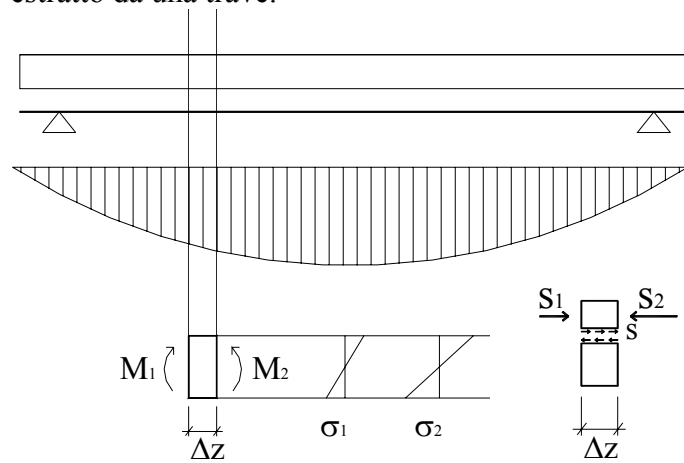
Il valore della τ_{zx} varia invece lungo la corda linearmente ed è fornito dalla:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \operatorname{ctg}\phi = (V_y S_g \operatorname{ctg}\phi) / (I_g b)$$

dove: ϕ è l'angolo formato dalla corda con la tangente alla sezione nel punto sul contorno.



Vediamo come la formula semplificata di Jourawski si ricava da una semplice condizione di equilibrio su un concio estratto da una trave.



$$s_1 = \sigma_1 b dy = (M_1 / I) b y dy \quad e \quad s_2 = \sigma_2 b dy = (M_2 / I) b y dy$$

$$s = s_1 + s_2 = ((M_2 - M_1) / I) b y dy$$

- dove: σ_1 è la tensione che si sviluppa a causa di M a sinistra del concio;
 σ_2 è la tensione che si sviluppa a causa di M a destra del concio;
 b è la larghezza della trave;
 dy è la lunghezza del concio;
 M_1 è il momento a sinistra del concio;
 M_2 è il momento a destra del concio;
 I è il momento d'inerzia della sezione reagente rispetto all'asse neutro;
 y è la distanza dall'asse neutro dalla prima fibra compressa (ossia x_c);
 $b y dy$ è un momento statico e d'ora in poi lo indicheremo con S;
 s è lo sforzo di scorrimento definito come la tendenza di un elemento a scorrere rispetto ad un altro;

Ricordando la nota equazione di equilibrio del solido elastico del De Saint-Venant:

$$V = dM / dz \quad \text{ossia:} \quad dM = V dz$$

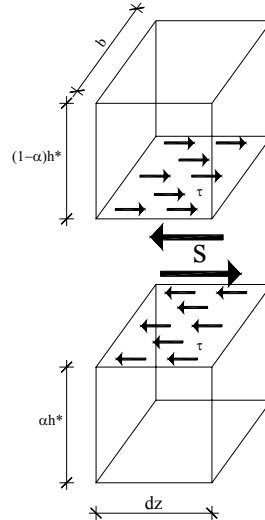
- dove: V è la sollecitazione di taglio;
 M è il momento flettente;
 z è l'ascissa misurata lungo l'asse della trave.

si ricava per s la seguente formula:

$$s = V dz S / I \quad (2)$$

Poiché s è assorbito sulle due facce dalle tensioni tangenziali, posso dedurre che:

$$s = \tau b dz \quad (3)$$

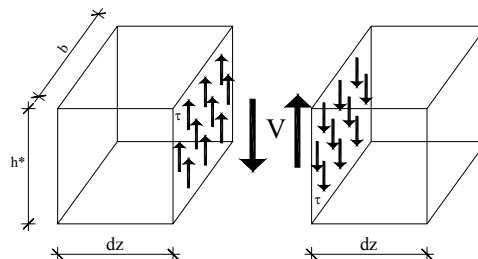


eguagliando le due formule:

$$\tau = V S / (I b) \quad (4)$$

che è proprio la formula della teoria approssimata di Jourawski.

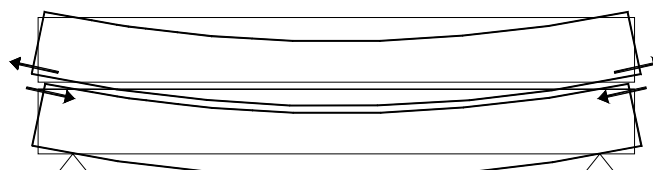
Per l'equilibrio delle tensioni tangenziali sul concio di trave, il taglio è una forza verticale:



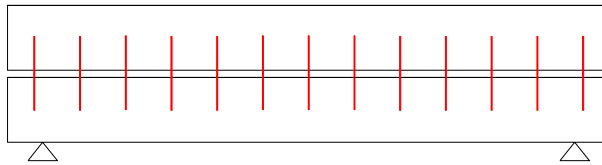
che tradotto in formule significa: $V = \tau b h^*$

Da notare che il discorso del taglio e dello scorrimento si muove su due binari paralleli nel senso che mentre per il primo si ragiona in termini di sezione dell'elemento, per il secondo si discute lungo la dimensione principale dell'elemento.

Questo discorso, intuitivamente, può essere associato al comportamento assunto da una trave in legno lamellare costituita da più lamine sovrapposte nell'ipotesi che non ci sia alcuna componente attrittiva tra le stesse. Se la trave è costituita da due soli elementi, quello teso e quello compresso, essi tenderanno a scorrere l'uno rispetto all'altro.



Se voglio far lavorare bene tali lamine e impedire questi scorrimenti, ho la necessità di compiere un'operazione di cucitura, ad esempio potrei inchiodarle. I chiodi, infatti, potranno assumere la funzione di assorbire lo scorrimento indotto nell'elemento.

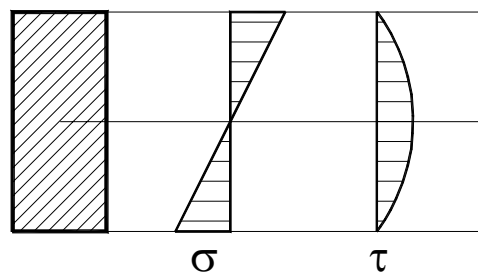


2. IL TAGLIO NELLE SEZIONI IN C.A.

In una sezione rettangolare elastica, isotropa, omogenea e completamente reagente, la (4) è una legge parabolica, il cui massimo si trova in corrispondenza del baricentro geometrico:

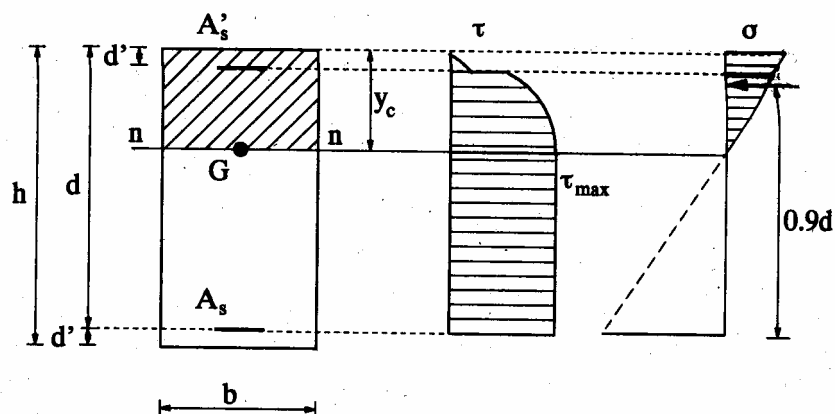
$$\tau_{\max} = V / (h^* b)$$

dove: h^* è il braccio delle forze interne pari ad (I_x / S_x)



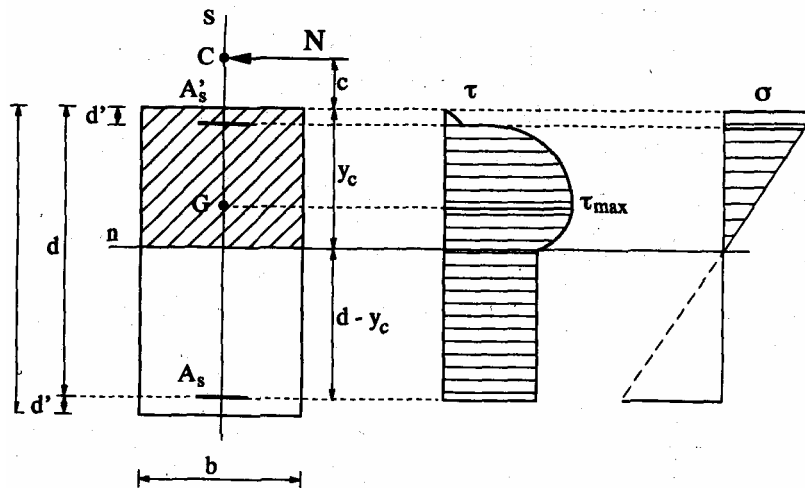
Per le sezioni in c.a., invece, la sezione reagente è quella omogeneizzata, cioè quella formata da cls compresso e acciaio pesante con il modulo n e il valore massimo della τ si trova ancora nel baricentro della sezione reagente.

Se la sezione è semplicemente inflessa, l'asse neutro coincide con il baricentro della sezione reagente, al di sotto di tale retta il valore rimane costante dal momento che il momento statico non varia più, e in corrispondenza dell'armatura tesa, per l'equilibrio, S e τ si annullano. Il braccio delle forze interne h^* è costituito dalla distanza tra C (risultante degli sforzi di compressione del cls) e T (risultante degli sforzi di trazione nell'acciaio) e pari proprio a $0.9d$.

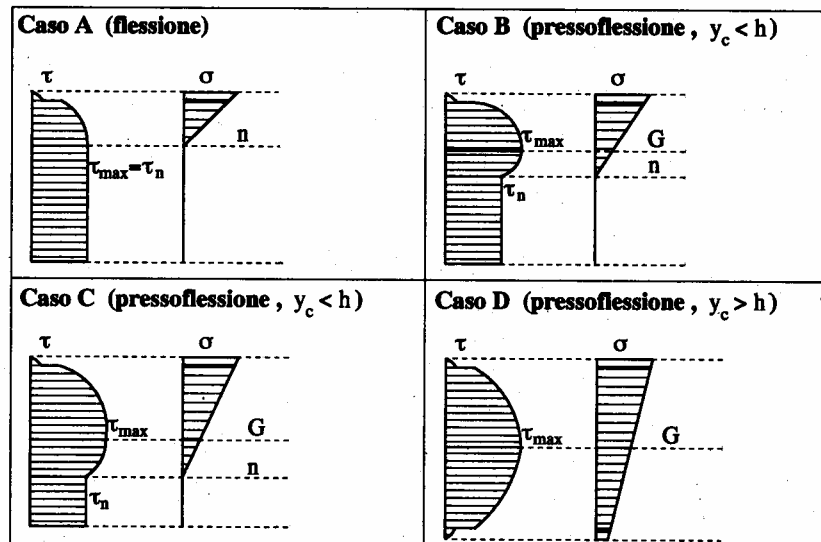


Se, invece, la sezione è pressoinflessa, l'asse neutro non coincide più con il baricentro della sezione reagente, e possiamo distinguere principalmente due casi:

- $x_c < h$ ossia la sezione è parzializzata: al di sotto dell'asse neutro il valore della τ rimane lo stesso costante, non è più pari al massimo, ma assume un valore minore;
- $x_c > h$ ossia la sezione non è parzializzata, il diagramma delle τ ritorna ad avere una legge parabolica come per il materiale omogeneo.



In definitiva, le diverse condizioni sono schematizzabili nei casi A, B e C, D.

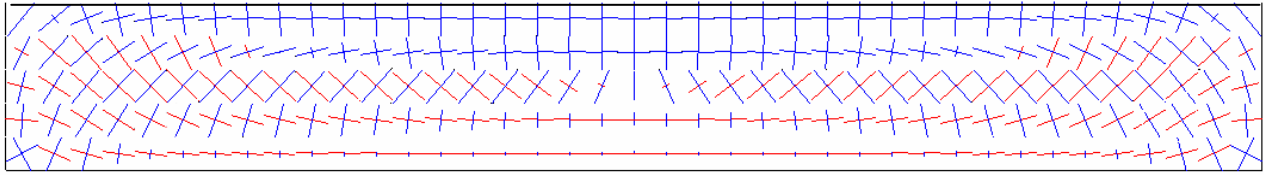


Dall'analisi dei diagrammi delle τ si evince che il calcestruzzo teso, trascurato nella teoria flessionale, deve assorbire le tensioni tangenziali che, secondo il cerchio di Mohr, producono una tensione principale di trazione di pari valore. Da questo se ne deduce che la teoria di Navier – De Saint Venant, ottenuta sostituendo la sezione omogeneizzata a quella intera, non è più accettabile. La sola sezione non è più un elemento caratterizzante della nostra trave, ma bisogna esaminarne la sua estensione spaziale.

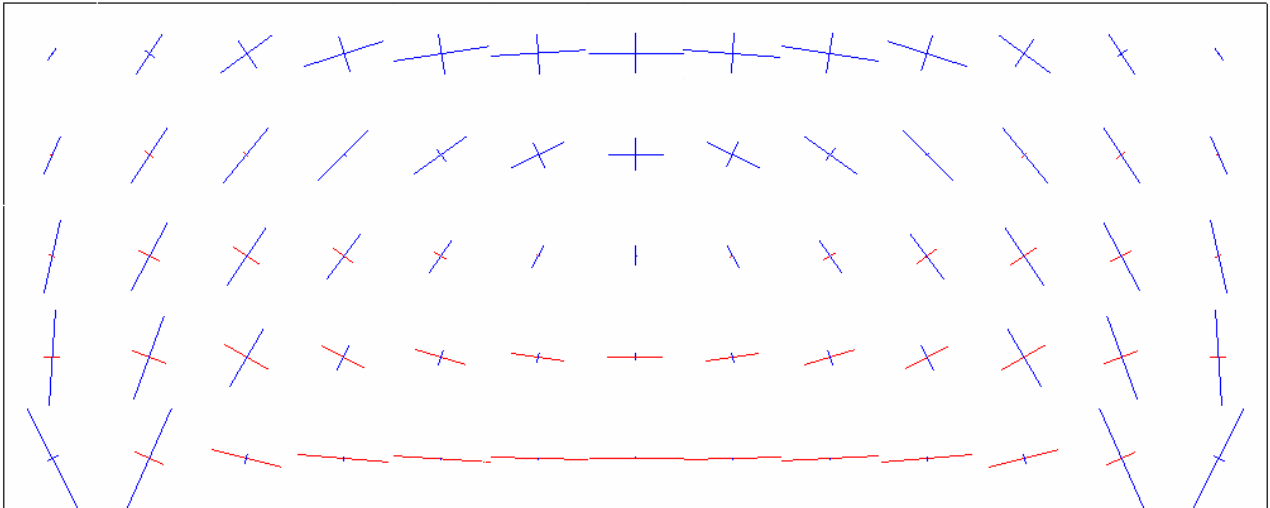
Consideriamo una trave di materiale omogeneo e a modulo di elasticità costante; le tensioni principali (massimi sforzi di trazione e compressione) tra loro perpendicolari che possono nascere in un punto qualsiasi della trave in cui esista uno sforzo normale σ e uno tangenziale τ sono:

$$\sigma = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + \tau^2} \quad \text{inclinati di } \operatorname{tg} 2\alpha = -2\tau / \sigma \quad \text{e sull'asse neutro } (\sigma = 0) \text{ di } 45^\circ.$$

Gli scorrimenti nello stesso punto sono: $\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) + \tau^2}$ e sono inclinati di un angolo di 45° rispetto alle tensioni principali. Se dunque, partendo da un punto della trave seguiamo la direzione delle tensioni principali in ogni punto successivo, otterremo due curve intersecatesi ad angolo retto, lungo le quali non si sviluppa alcuno sforzo tangenziale, ma solo sforzi normali. Ripetendo l'operazione per altri punti si formeranno due fasci di curve simili, le quali in ciascun punto di incontro individueranno la tensione massima di trazione e di compressione e nullo lo sforzo di taglio. Tali curve sono dette *linee isostatiche*.



Trave snella: tangenti alle direzioni principali di trazione e compressione nei baricentri degli elementi



Trave tozza: tangenti alle direzioni principali di trazione e compressione nei baricentri degli elementi

Inizialmente, per piccoli valori della sollecitazioni, il comportamento è elastico-lineare e la distribuzione delle tensioni segue le leggi della teoria delle travi elastiche. Di solito, il valore massimo della tensione principale di trazione viene raggiunta al lembo inferiore teso: dove si supera la resistenza a trazione si forma una fessura che, essendo perpendicolare alle isostatiche di trazione, è inizialmente perpendicolare all'asse della trave. Aumentando il carico, la fessura si propaga ancora lungo le isostatiche di trazione che però iniziano inclinarsi fino a divenire quasi parallele all'asse della trave in prossimità del corrente compresso. Riassumendo, si può dire che le fessure si generano nella direzione perpendicolare alle isostatiche di trazione, o che è lo stesso, lungo le isostatiche di compressione. Questo quadro fessurativo può essere facilmente confermato dalle evidenze sperimentali.

Consideriamo i risultati delle esperienze condotte direttamente da Morsch nel 1906 su tre travi a T

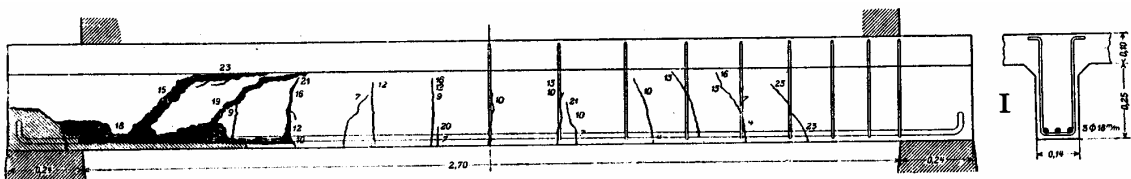


Fig. 131. — Trave I, 3 Φ 18 mm., carico di rottura 25,7 t.

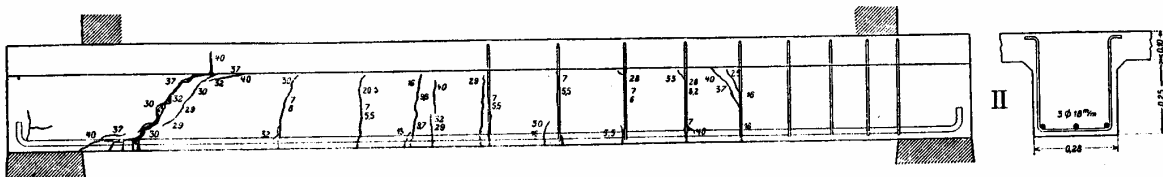


Fig. 132. — Trave II, 3 Φ 18 mm., carico di rottura 40,0 t.

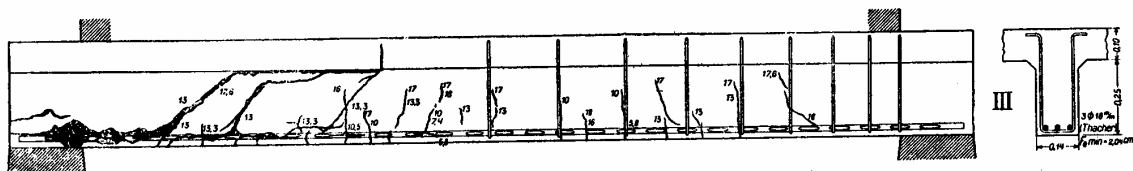


Fig. 133. — Trave III, 3 ferri Thacher, carico di rottura 19,5 t.

costituite da due anime (per eliminare gli effetti torcenti) tenute insieme da un'unica piattabanda sporgente alle due estremità per una luce totale di 2.4 m. Al fine di realizzare un appoggio libero, fu posto al di sotto delle anime un foglio di cartone incatramato. Tanto la soletta che le anime erano sufficientemente robuste, erano provviste di un'adeguata armatura simmetrica a flessione ed erano armate a staffe solo per metà della luce. Furono esaminate 12 travi divise in tre gruppi, dei quali il primo aveva un carico uniformemente distribuito, il secondo due carichi concentrati simmetrici ed il terzo con un carico concentrato in mezzeria. La maturazione delle travi durò circa 3 mesi e l'impasto era costituito da 1 parte di cemento e 4,5 di sabbia e ghiaia del Reno. Si ottennero i seguenti risultati:

TRAVE I: armata con 3 ϕ 18 diritti ancorati ad uncino. Le prime fessure appaiono in mezzeria a circa 7 t e sono estremamente sottili. All'aumentare del carico le fessure divengono più numerose e si spingono più in alto. A 15 t appare verso l'appoggio sinistro, senza staffe, una fessura inclinata che si estende man mano fino ai ferri. Crescendo ancora il carico la fessura inclinata arriva all'appoggio. A 25,7 t la fessura orizzontale aveva tanto isolato i ferri, che l'ancoraggio di questi era affidato unicamente agli uncini; poco dopo anche questi hanno ceduto e la trave collassa all'improvviso.

TRAVE II: l'armatura è uguale alla precedente, mentre le anime hanno la base che è il doppio. Le prime lesioni finissime appaiono nel mezzo a 13.7 t, crescendo il carico le lesioni si fanno più fitte. A 30 t appaiono le due fessure oblique sull'appoggio di sinistra, ed una si sviluppa verso l'alto invadendo la soletta e in basso lungo l'armatura. A 40 t si ha lo strappamento dei ferri e la rottura definitiva della trave.

TRAVE III: l'armatura è costituita da 3 ferri tipo "Thacher" senza uncini. Le prime fessure appaiono per 6.8 t. A 13 t le fessure centrali crescono di numero e di importanza e appaiono già quelle inclinate dovute alle tensioni principali. A 17.6° la fessura dell'appoggio sinistro si estende tanto sopra che sotto, e ne appare una anche all'appoggio di destra. La rottura avviene per un carico di 19.5 t.

Morsch, commentando i risultati di queste tre travi disse che le prime fessure apparivano sempre dove il momento era massimo (cioè in mezzeria) e da lì si estendevano al resto della trave. Ma mentre le fessure centrali aumentano solo la propria larghezza al crescere dei carichi, quelle che si formano agli appoggi inducono il collasso. Inoltre tali lesioni oblique si formano per carichi proporzionali alla larghezza delle anime a dimostrazione del fatto che esse sono dovute realmente all'esaurimento della resistenza del cls teso nella direzione delle tensioni principali. Nella parte armata trasversalmente, le lesioni nascevano in corrispondenza delle staffe essendo in quel punto minore la resistenza del cls.

Un fattore importante nella definizione del comportamento strutturale di una trave è il rapporto geometrico tra la luce della stessa e la sua altezza. Definiremo *trave snella* una trave in cui tale rapporto è elevato mentre in caso contrario si parlerà di *trave tozza*. Ancora una volta prove sperimentali hanno permesso la definizione di valori numerici per stabilire se una trave è prevalentemente tozza o snella.

Lo schema generalmente adottato nei laboratori consiste in travi semplicemente appoggiate, caricate simmetricamente con due forze concentrate P, poste alla distanza *a* dagli appoggi. In questo modo, nei tratti compresi tra gli appoggi ed i carichi, la trave è sollecitata a taglio costante e momento linearmente variabile, mentre nella parte centrale il momento è costante e massimo, mentre il taglio è nullo. Il meccanismo di collasso per queste travi dipende essenzialmente dal rapporto dimensionale M/Vd che coincide con il rapporto a/d tra la distanza del carico dall'appoggio e l'altezza utile della sezione.

$a/d > 7$: travi molo snelle. E' possibile omettere l'armatura a taglio poiché il momento ultimo sperimentale coincide con quello teorico ossia la trave ha raggiunto la sua resistenza flessionale;

$7 > a/d > 3$: travi snelle. La rottura è prodotta dal cedimento dei denti di cls e la conseguente perdita del meccanismo a trave. I risultati sperimentali seguono da vicino la retta che corrisponde alla previsione teorica di un sistema che collassa per il taglio;

$3 > a/d > 1.5$: travi tozze. Si innesca il meccanismo ad arco. I risultati sperimentali si discostano da questo andamento e la resistenza cresce al diminuire del rapporto a/d ;

$1.5 > a/d$. travi tozze. Viene raggiunta nuovamente la piena resistenza flessionale della sezione, segno che il collasso è determinato dalla flessione e non dal taglio. Si forma l'Effetto Arco.

Ricordando la $V = dM/dz$ e che:

$$M = T h^*$$

dove: T è la forza di trazione portata dall'armatura;

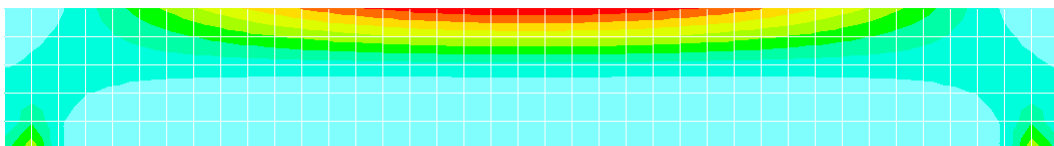
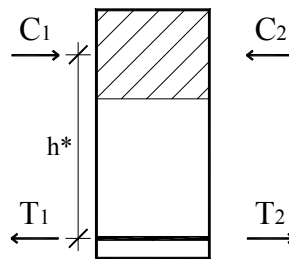
h^* è il braccio delle forze interne;

si ha che:

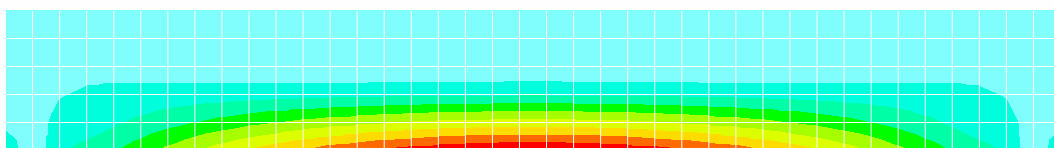
$$V = h^* dT / dz + T dh^* / dz$$

Nel caso di trave snella il braccio h^* è poco variabile, il 2° termine dell'equazione è trascurabile:

$$V = h^* dT / dz \quad (\text{travi snelle} \rightarrow \text{COMPORTAMENTO A TRAVE})$$



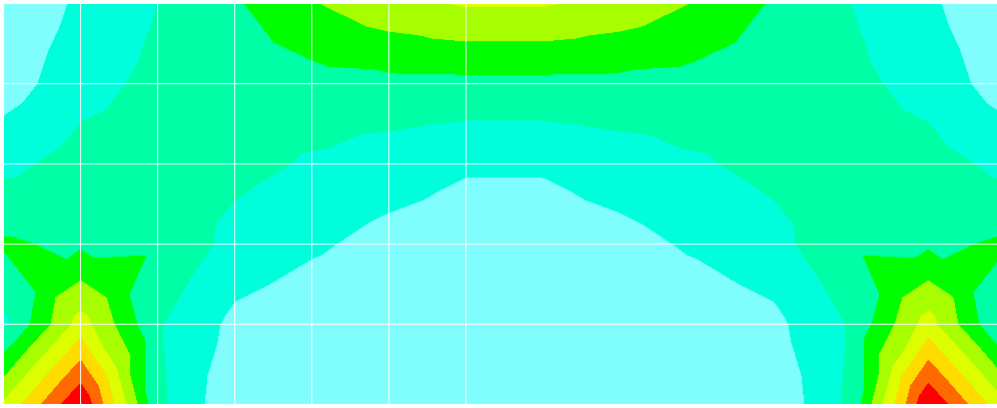
Trave snella: tensioni principali di compressione



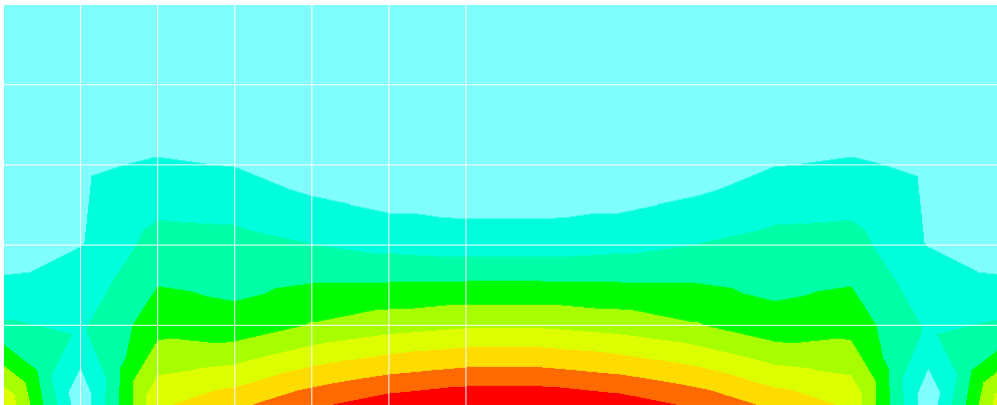
Trave snella: tensioni principali di trazione

Quando invece la linea d'asse del corrente compresso è inclinata in modo che ci sia una variazione di h^* lungo z (ad esempio nelle zone prossime all'appoggio dove le isostatiche di compressione convergono verso la base vincolata e all'interno delle travi tozze, dove il meccanismo resistente è un arco compresso in cls in cui l'armatura funge da catena) l'equazione diventa:

$$V = T dh^* / dz \quad (\text{zone d'appoggio, travi tozze} \rightarrow \text{EFFETTO ARCO})$$



Trave tozza: tensioni principali di compressione

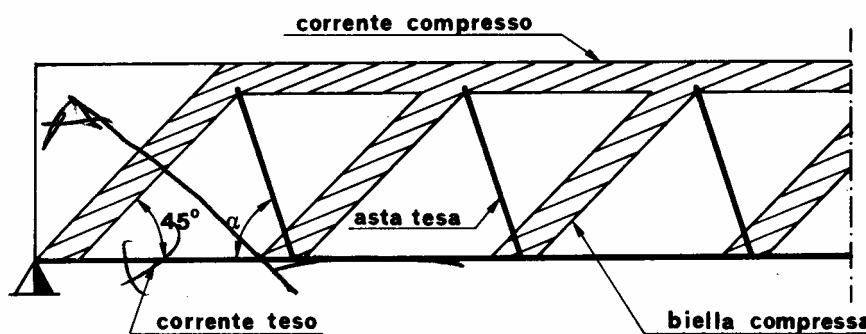


Trave tozza: tensioni principali di trazione

3. IL TRALICCIO DI MORSCH

Abbiamo già sottolineato che il modello adottato nella teoria flessionale per le travi in c.a. del calcestruzzo non resistente a trazione non è più valido in presenza di tensioni tangenziali dal momento che il trasferimento di tali tensioni dalla zona tesa a quella compressa richiede la partecipazione del calcestruzzo teso, precedentemente trascurato.

Tra i meccanismi resistenti reali concepiti per il trasferimento dello sforzo dalla parte inferiore a quella superiore, sicuramente il più antico (1902), efficace ed intuitivo (tanto da essere alla base delle formule di progetto) è il *traliccio di Morsch*, valido a rottura e che pertanto fornisce una soluzione equilibrata ma non necessariamente congruente.



In questo modello, la trave fessurata viene assimilata ad una trave reticolare in cui il cls compresso viene ad essere il corrente superiore ed è posto nel baricentro della zona compressa; l'armatura tesa è il corrente inferiore, le bielle di calcestruzzo (più fasce di cls fessurate) sono le aste di parete compresse e le armature d'anima (tutte le staffe comprese nel tratto s) le aste tese. In tale modello di calcolo, i due correnti equilibrano il momento esterno mentre le aste di parete trasmettono lo sforzo di scorrimento dal corrente compresso a quello teso. Preso un concio di trave di lunghezza Δz , si osserva infatti che il corrente compresso tende a scorrere rispetto alla zona sottostante per effetto di

una forza orizzontale detta di *scorrimento* che è la risultante delle tensioni tangenziali su un tratto lungo Δz e largo b :

$$S = \int \tau b dz = \tau b \int dz = \tau b \Delta z$$

dove si è assunta τ costante perché al di sotto dell'asse neutro. Ricordando anche la (1) si ha:

$$S = V S_n \Delta z / I_n = V \Delta z / h^*$$

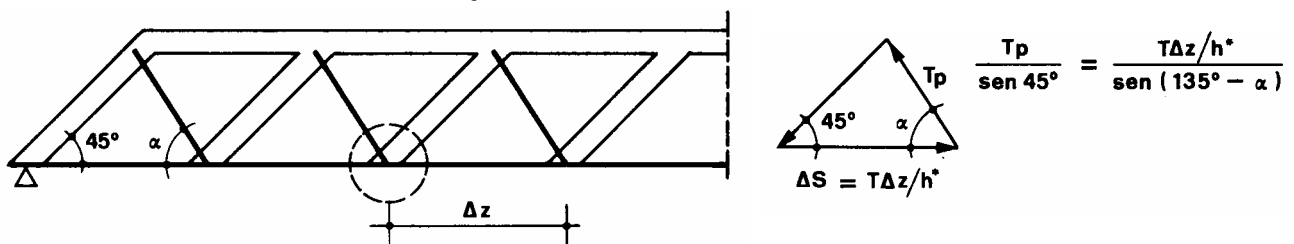
Dalla condizione di equilibrio di un nodo di tale travatura si ottiene immediatamente:

$$V_p / \sin 45^\circ = S / \sin (135^\circ - \alpha) = V \Delta z / h^* \sin (135^\circ - \alpha) \quad (5)$$

dove: V_p è lo sforzo assorbito in una generica asta tesa di parete (ferro piegato);
 α è l'angolo di inclinazione del ferro sull'orizzontale.

Nel caso frequente di ferri inclinati a 45° la (5) diventa:

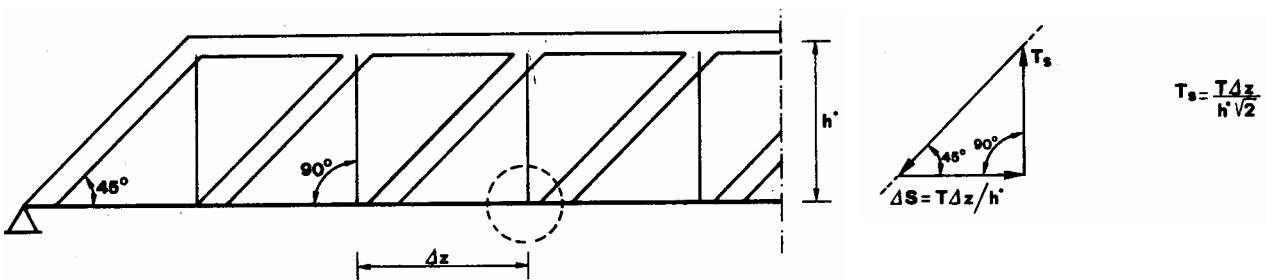
$$V_p = S / \sqrt{2} = V \Delta z / (h^* \sqrt{2}) \quad (6)$$



Mentre nel caso di staffe, l'angolo α è pari a 90° e la (5) diventa:

$$V_s = S = V \Delta z / h^* \quad (7)$$

dove: V_s è lo sforzo assorbito dalle staffe;



Con l'ausilio delle (6) e delle (7) e fissato il valore della σ_{famm} dell'acciaio, è possibile calcolare l'area delle armature metalliche da disporre in un tronco di trave di lunghezza Δz , ottenendo nel caso di armatura a taglio con ferri piegati:

$$A_f = S / (\sigma_{famm} \sqrt{2}) = V \Delta z / (\sigma_{famm} h^* \sqrt{2})$$

E nel caso di armatura a staffe:

$$A_f = S / \sigma_{famm} = V \Delta z / (\sigma_{famm} h^*)$$

Ovviamente, se si vuole calcolare le sezioni di una singola staffa:

$$\omega = S / (n N \sigma_{famm}) = V \Delta z / (n N \sigma_{famm} h^*)$$

dove: n è il numero dei bracci delle staffe;
 N è il numero delle staffe nel tratto Δz .

I criteri progettuali per la disposizione dell'armatura a taglio nelle travi possono essere ricavati facendo delle semplici considerazioni sul diagramma del taglio. Sappiamo che per una trave appoggiata – appoggiata esso varia linearmente con il massimo positivo e negativo in corrispondenza degli appoggi. Di conseguenza, preso un tratto di trave costante Δz , le aree ad esso sottese vanno a diminuire mano a mano che ci avviciniamo verso la mezzeria. Sappiamo anche che il diagramma del taglio, a meno della scala, è anche il diagramma delle τ su una stessa fibra lungo l'elemento e quindi si può affermare che procedendo verso la mezzeria anche lo scorrimento diminuisce (ricordiamo che $S = \tau b s$). Ma se lo scorrimento diminuisce, allora, teoricamente, potremmo diminuire il diametro dell'armatura. In realtà, nella pratica progettuale si preferisce operare sulla variabilità del tratto Δz di trave a parità di diametro dei ferri. In tal caso, per realizzare l'uniforme resistenza a taglio (cioè aree sottese uguali) basta aumentare la distanza tra i sagomati o le staffe man mano che si procede verso l'interno.

4. TRALICCIO AD INCLINAZIONE VARIABILE

Il modello fondamentale di resistenza a taglio di un elemento dotato di armature trasversali può essere dedotto dal suo comportamento post-fessurativo e si può individuare come una struttura reticolare, le cui aste sono un corrente compresso, costituito dal cls in compressione, un corrente teso, costituito dall'armatura in trazione, e da un reticolo di diagonali, compresse e tese. Queste ultime sono formate dai conci compressi di cls delimitati dalle fessure inclinate e dalle armature trasversali tese (staffe e ferri piegati) che collegano i due correnti lungo l'elemento. Questa schematizzazione, dovuta a Morsch è basata sull'evidenza sperimentale del quadro fessurativo. Le aste del traliccio di Morsch si considerano tutte incernierate nei nodi e pertanto costituiscono un sistema internamente isostatico, con bielle compresse inclinate a 45° e aste di parete inclinate di α gradi sull'orizzontale, in modo da ricavare come casi particolari le espressioni delle forze normali delle staffe verticali ($\alpha = 90^\circ$) e nei ferri piegati ($\alpha = 45^\circ$).

Il metodo classico determina la capacità portante a taglio V come somma del contributo del calcestruzzo V_c e del contributo V_s calcolato impiegando il modello di traliccio a 45° . Questo metodo è contemplato dall'ACI e dall'EC2.

La famiglia di metodi basati sul traliccio ad inclinazione variabile è caratterizzato da diverse versioni.

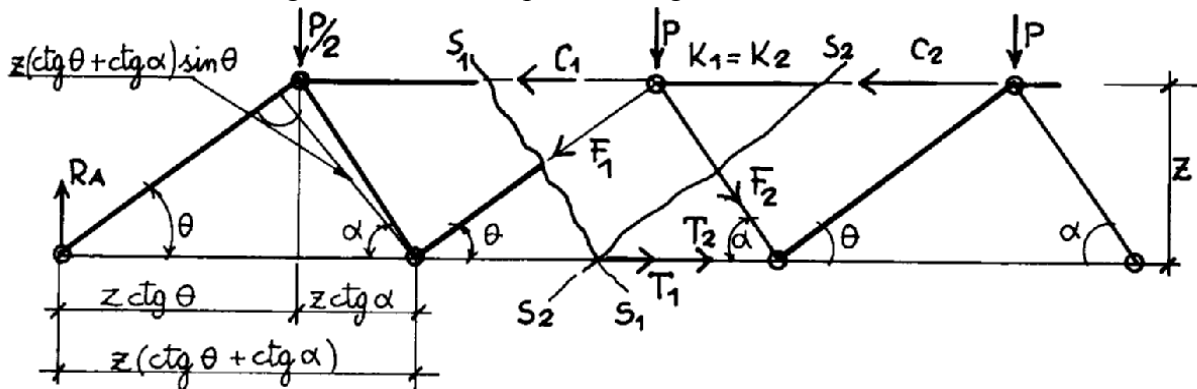
La prima variante del metodo assume l'ipotesi che l'inclinazione delle fessure a taglio coincida con l'inclinazione delle direzioni principali a compressione. In questo modo non vi è tensione tangenziale agente lungo le fessure e, quindi, non vi è contributo del cls alla capacità portante a taglio. Questo approccio, che è un possibile metodo progettuale suggerito dall'EC2 fornisce un risultato conservativo.

Una seconda variante del metodo rimuove questa ipotesi semplificativa e introduce la possibilità di trasmettere sforzi di taglio lungo le fessure diagonali mediante l'interlocking; tali sforzi sono, pertanto, funzione dell'ampiezza della fessura. In questo ambito si muove l'approccio basato sulla modified compression field theory, in cui l'angolo di inclinazione della compressione è calcolato partendo da condizioni di equilibrio e congruenza.

Il metodo basato sull'inclinazione del traliccio ad inclinazione variabile è considerato tra i più rigorosi e può fornire soluzioni progettuali con maggiori economie di armatura a taglio, sebbene sia possibile un incremento dell'armatura longitudinale. L'inclinazione delle bielle compresse, definita

dall'angolo θ , è peraltro condizionata dal reale comportamento a rottura dell'elemento strutturale che dipende dalle condizioni di carico e, soprattutto dai particolari costruttivi.

Il modello del traliccio generalizzato, semplice è il seguente:



nel traliccio semplice, l'interasse tra le aste di parete misurato sull'orizzontale vale $z(\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha)$. Per realizzare un interasse minore s , minore, compatibile con l'esigenza di realizzare un collegamento relativamente diffuso tra la zona compressa e quella tesa e con quella di limitare la luce libera di inflessione delle barre longitudinali superiori compresse, che potrebbero inflettersi verso l'esterno per instabilità della configurazione rettilinea iniziale, previa rottura del calcestruzzo di copriferro, si ricorre al modello di traliccio multiplo di ordine n , in cui n è dato dal rapporto tra due lunghezze, quella dell'ipotenusa della maglia triangolare tipo, che è $z(\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha)$ e quella corrispondente all'interasse s prefissato:

$$n = z(\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha) / s$$

Il taglio totale esterno relativo ad una generica sezione di Ritter andrà quindi preliminarmente diviso in parti uguali tra gli n tralicci semplici, pensati accostati e sfalsati in direzione longitudinale della quantità s .

La componente verticale della forza normale F_1 di una biella compressa, pari a $F_1 \sin\theta$, si equilibra con il taglio esterno relativo alla sezione stessa V_1 .

$$V_1 = F_1 \sin\theta$$

La biella di cls si romperà a compressione quando:

$$F_1 = \sigma_{c,u} b z (\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha) \sin\theta$$

dove: $\sigma_{c,u}$ è un valore medio della tensione di rottura, ridotto per tener conto del fatto che nella realtà la biella di calcestruzzo è soggetta a pressione eccentrica. Esso è pari a: $v f_{cd}$ dove v è il fattore di efficienza dato da: $v = 0.7 - f_{ck} / 200 \geq 0.5$ (f_{ck} in N/mm^2);

$z(\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha) \sin\theta$ è la lunghezza dell'elemento su cui viene calcolata la tensione;

b è la larghezza della sezione della trave se rettangolare e dell'anima per le sezioni a T;

Il taglio ultimo resistente vale dunque:

$$V_1 = V_{R,c} = \sigma_{c,u} b z (\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha) \sin^2\theta$$

Se $\alpha = 90^\circ$ (staffe verticali) si ha:

$$V_1 = V_{R,c} = \sigma_{c,u} b z \cos\theta \sin\theta = \sigma_{c,u} b z \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

Valutiamo $V_1 = V_{R,c}$ al variare di θ :
 $\theta = 30^\circ \Rightarrow V_1 = V_{R,c} = 0.433 \sigma_{c,u} b z$
 $\theta = 45^\circ \Rightarrow V_1 = V_{R,c} = 0.5 \sigma_{c,u} b z$
 $\theta = 60^\circ \Rightarrow V_1 = V_{R,c} = 0.433 \sigma_{c,u} b z$

La forza normale F_2 relativa ad un'asta obliqua tesa
 Sia V_2 il taglio esterno relativo
 n il numero di tralicci semplici che formano il traliccio multiplo
 A ciascuno degli n tralicci semplici spetta la forza di taglio esterna:

$$V_2 / n = V_2 s / (z (\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha))$$

L'asta tesa di parete si snerva quando:

$$F_2 = \sigma_y A_{1,s}$$

Il taglio ultimo resistente correlativo vale:

$$V_2 = V_{R,s} = \sigma_y A_{1,s} z (\text{ctg}\theta + \text{ctg}\alpha) \sin\alpha / s$$

Per staffe verticali, ossia $\alpha = 90^\circ$, il taglio resistente è pari a:

$$V_2 = V_{R,s} = \sigma_y A_{1,s} z \text{ctg}\theta / s$$

Consideriamo anche in questo caso le tre ipotesi di θ :
 $\theta = 30^\circ \Rightarrow V_2 = V_{R,s} = 1.732 \sigma_y A_{1,s} z / s$
 $\theta = 45^\circ \Rightarrow V_2 = V_{R,s} = \sigma_y A_{1,s} z / s$
 $\theta = 60^\circ \Rightarrow V_2 = V_{R,s} = 0.577 \sigma_y A_{1,s} z / s$

Da cui è possibile affermare che il taglio resistente delle staffe ($\alpha = 90^\circ$) aumenta al diminuire dell'inclinazione θ delle bielle compresse rispetto all'orizzontale. Contestualmente aumenta l'armatura longitudinale inferiore, perché aumenta la lunghezza dell'ipotenusa della maglia triangolare di base.

5. STAFFE O FERRI PIEGATI?

Il D.M. del 14 febbraio 1992 al § 3.1.4 afferma che “*nella zona ove le tensioni tangenziali superano τ_{co} , gli sforzi tangenziali devono essere integralmente assorbiti da armature metalliche, affidando alle staffe non meno del 40% dello sforzo globale di scorrimento*”.

L'origine di tale prescrizione si può ricercare già nel 1910, quando Morsch, citando il regolamento tedesco e quello prussiano, sottolineava che per l'assorbimento dello sforzo di taglio in essi era prescritto l'uso di staffe e ferri piegati.

In Italia, nel 1939, si ritrova una prescrizione del genere nel Regio Decreto del 16 novembre dove: “*di regola almeno la metà degli sforzi taglianti deve essere assorbita dalle staffe e la rimanente parte dai ferri piegati*”. Con il D.M. del 16 giugno 1976, la percentuale di staffe scende al 40% dello sforzo globale di scorrimento e tale rimane fino ad oggi.

A questo punto nasce spontaneo chiedersi del perché le Normative, siano esse italiane o europee, sin dall'inizio della conoscenza del cls armato, pongano un limite inferiore nell'uso del quantitativo di staffe se è vero che il traliccio di Morsch con i tiranti d'anima inclinati funziona ad egual modo di quello con le aste verticali.

In teoria, se confrontiamo le forze che si sviluppano all'interno dei due modelli, notiamo che il comportamento del traliccio con tiranti a 45° è migliore, poiché in esso la direzione dell'armatura di taglio coincide con la direzione della tensione principale di trazione all'altezza dell'asse

baricentrico e i tiranti incrociano le lesioni da taglio ad angolo retto. Nel traliccio con staffe verticali, invece, lo scostamento dalla direzione della tensione principale di trazione provoca :

- il raddoppio delle tensioni del cls nelle diagonali compresse:

forza di compressione: $C = V \sqrt{2}$

tensione nel cls: $\sigma = C/(b a_D) = 2 V/(b z (1+\text{ctg}\alpha))$

per $\alpha = 45^\circ$ (ferri piegati): $\sigma = V/(b z)$

per $\alpha = 90^\circ$ (staffe): $\sigma = 2V/(b z)$

- l'aumento dello sforzo di trazione e il decremento di quello di compressione:

facendo l'equilibrio alla rotazione nel punto medio del tratto a_s : $M = C z + V a_s / 2$

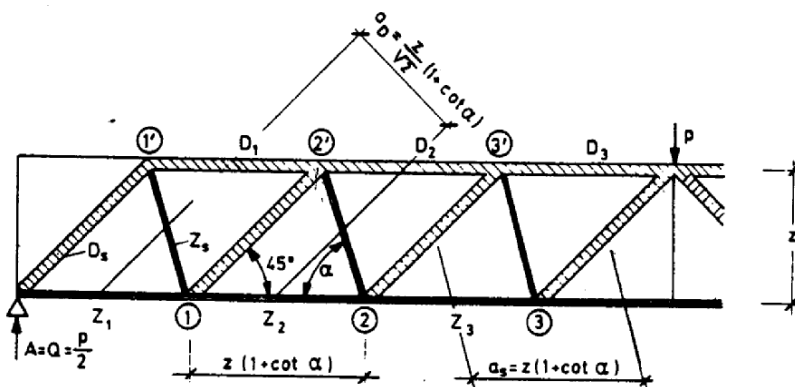
ossia: $C = M/z - V a_s/(2z)$

$T = M/z + V a_s/(2z)$

per $\alpha = 45^\circ$ (ferri piegati): $C = T = M / z$

per $\alpha = 90^\circ$ (staffe): $C = M/z - V/2$

$T = M/z + V/2$



Ai risultati teorici fecero seguito le esperienze sul campo. Dopo numerose prove sperimentali, Morsch affermò che: "laddove l'armatura principale è ordinata in modo razionale, le staffe non hanno più grande importanza". Confrontando, infatti, due travi di uguali dimensioni geometriche (nervatura larga 14 cm e alta 25 + 10 cm di soletta) e armatura longitudinale (3 ϕ 15 + 1 ϕ 18) ma contenenti l'una solo ferri piegati (trave IV) e l'altra ferri piegati e dritti (trave VI), si sono ottenuti i seguenti risultati:

	trave IV	trave VI
prima fessura:	9t	6t
prima fessura inclinata:	33t	19t
rottura:	42t	37.8t

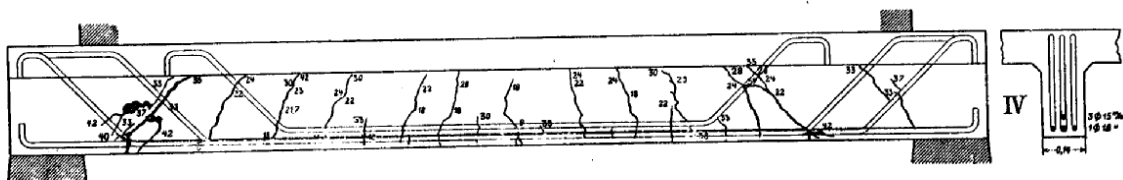


Fig. 147. - Trave IV, carico di rottura 42 t.

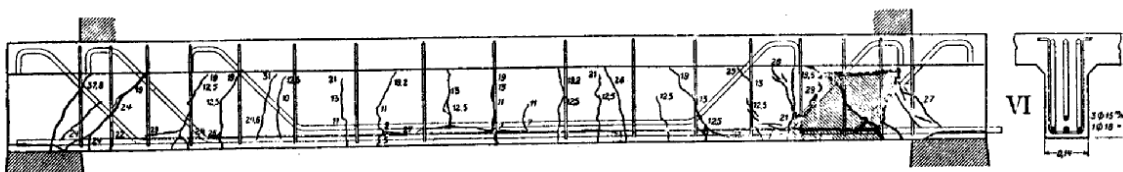


Fig. 148. - Trave VI, carico di rottura 37,8 t.

Sperimentando un elemento (trave IX) delle stesse dimensioni geometriche delle precedenti (trave IV e VI) ma armata alla "Hennebique" longitudinalmente (ossia un unico ferro piegato per tutta la

luce) e solo per metà della luce con staffe, si notò che la propagazione delle fessure inclinate, nel lato munito di ferri verticali, era notevolmente contrastata.

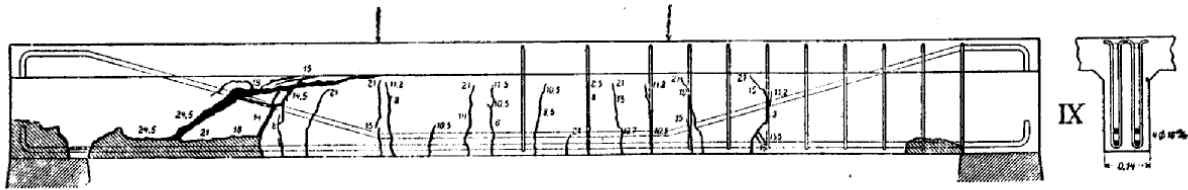


Fig. 154. --- Trave IX, carico di rottura 25,6 t.

L'influenza favorevole delle staffe appare in modo evidente anche nelle travi I, II e III.

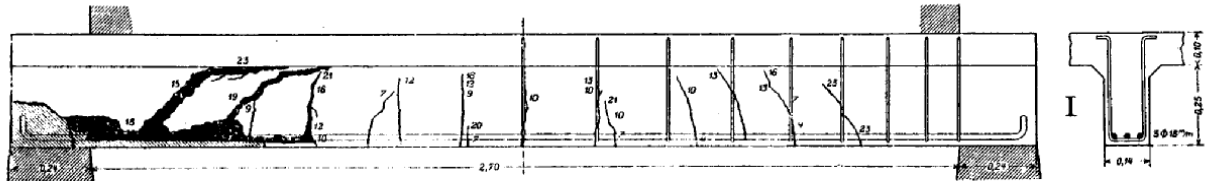


Fig. 131. --- Trave I, 3 φ 18 mm., carico di rottura 25,7 t.

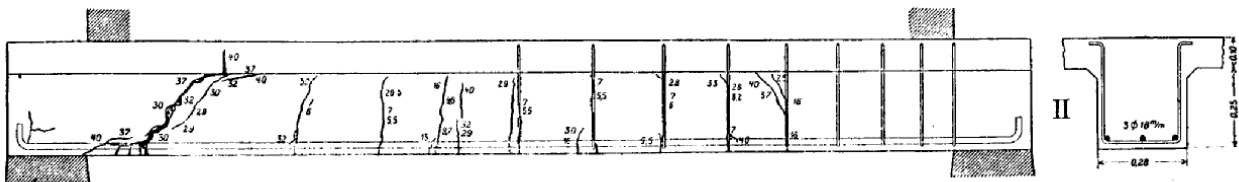


Fig. 132. --- Trave II, 3 φ 18 mm., carico di rottura 40,0 t.

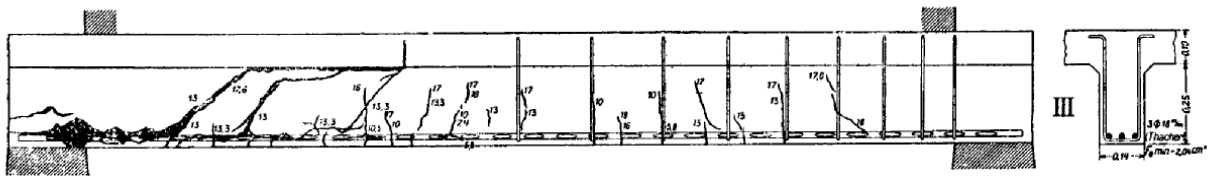


Fig. 133. --- Trave III, 3 ferri Thacher, carico di rottura 19,5 t.

Da queste prove sperimentali si deduce che la presenza delle staffe non modifica la natura delle sollecitazioni che nascono nell'anima della trave, giacchè anche verso l'appoggio le fessure sono inclinate; la loro favorevole influenza, ravvisata nelle esperienze, si spiega col fatto che esse risultano più efficaci delle barre piegate nel prevenire i meccanismi di rottura per taglio:

- nell'effetto spinotto, se abbastanza vicine tra loro, possono impedire o almeno ritardare, la deformazione delle armature longitudinali ed il conseguente distacco del copriferro;
- nell'ingranamento degli inerti, ostacolano l'aprirsi delle fessure;
- nella resistenza flessionale dei denti di cls provocano la compressione delle bielle, con conseguente riduzione delle tensioni di trazione. Inoltre limitando l'estendersi delle fessure impediscono anche la riduzione delle sezioni di incastro delle mensole del corrente compresso.

Nelle ricerche condotte da Bach nel 1907 su travi rettangolari e a T in cui si voleva che la rottura avvenisse per perdita di aderenza dell'armatura, si notò che nelle travi con armatura verticale lo slittamento dei ferri cominciava tanto più lentamente quanto più numerose erano le staffe. Ovvero la perdita di aderenza dovuta alle fessure che si propagano longitudinalmente lungo il percorso dell'armatura tesa e che provocano il distacco del copriferro, viene sensibilmente ridotta.

Anche dalle ricerche condotte da Bach si evinse che le staffe cooperavano alla resistenza della trave, impedendo un prematuro sfasciamento dell'estremità e che in presenza di un'armatura a piegati sufficiente, la loro importanza scemava di molto, riducendosi più che altro ad un fattore di sicurezza contro altre possibili deficienze della costruzione.

Ci sono poi considerazioni di ordine pratico che favoriscono l'uso delle staffe rispetto ai ferri piegati, come il fatto che in una trave non possono essere posti tanti ferri longitudinali nel rispetto dell'interfero minimo e col pericolo che la mezzeria resti sguarnita. L'elemento, infatti, se

sottoposto a carichi parziali, sarebbe soggetto a sforzi di taglio non previsti nei calcoli e comunque non scaricabili nell'armatura principale.

Ricerche del prof. Schule agli inizi del secolo su una trave a T fortemente armata e caricata uniformemente, mostrarono che col crescere del carico apparivano delle fessure quasi orizzontali anche nella parte centrale della trave, che potevano essere impediti solo dalla presenza delle staffe.

Per ultimo, da notare che nel caso di interruzione di getto tra la nervatura e la soletta, le staffe se prolungate in quest'ultima, riescono ad assicurare anche un buon collegamento.

A valle di queste considerazioni e delle indagini sperimentali, lo stesso Morsch giungeva alla conclusione che: *“per tutte queste ragioni noi riteniamo le staffe assai consigliabili anche nelle travi dove non parrebbero assolutamente richieste dal calcolo”*.

6. I MECCANISMI RESISTENTI

Da quanto fin qui detto si potrebbe dedurre che una trave priva di armatura trasversale non possa resistere a taglio. Tuttavia, sperimentalmente, si è osservato che queste travi offrono comunque un contributo in termini di resistenza a taglio generando al loro interno dei meccanismi resistenti. Se poi introduciamo nella trave un'armatura trasversale, si ha la sovrapposizione del nuovo contributo resistente, nel senso che l'armatura trasversale non modifica la resistenza della trave priva di armatura ma fa sì che al suo meccanismo resistente se ne aggiunga un altro riconducibile, stavolta, al modello a traliccio.

Esaminiamo allora i due seguenti casi:

1. trave priva di armatura trasversale;
2. trave dotata di armatura trasversale.

Ci accorgeremo che, nel primo caso, una serie di meccanismi determineranno una certa resistenza al taglio della trave, meccanismi che vengono poi migliorati adottando un'opportuna armatura trasversale.

Nella trave priva di armatura trasversale, lo schema a traliccio di Ritter-Morsch o qualunque altro schema basato su considerazioni di equilibrio per la determinazione dei contributi a taglio, non ci fornisce alcuna risposta in merito, per cui la trave risulterebbe avere resistenza a taglio nulla.

In definitiva, in una trave priva di armatura trasversale, il taglio resistente è dovuto al solo cls; in una trave dotata di armatura trasversale invece, avremo oltre all'aliquota del cls un'ulteriore aliquota resistente dovuta proprio all'armatura trasversale.

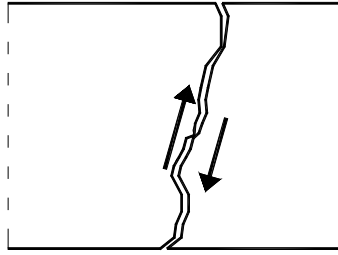
6.1. TRAVE PRIVA DI ARMATURA TRASVERSALE

Nel modello comportamentale di una trave soggetta a taglio in assenza di armature, si individuano fondamentalmente tre meccanismi resistenti dovuti all'azione del cls:

1. *ingranamento degli inerti* (aggregate interlock)

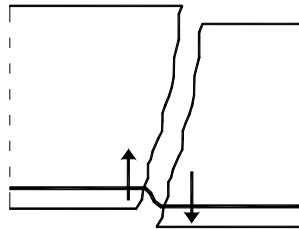
Sappiamo che il calcestruzzo è costituito da acqua, inerti fini e grossi e da cemento. Quando nell'elemento lapideo si formano delle fessure, queste non seguono un percorso rettilineo, ma anzi circoscrivono gli inerti creando delle superfici scabre. Se la fessura è ancora piccola, le due superfici sono ancora in contatto, si crea un effetto attritivo che si oppone allo scorrimento dei membri della fessura e si ha la formazione di tensioni tangenziali tra una faccia e l'altra. A mano a mano che la fessura si apre, i punti di contatto divengono sempre meno e l'effetto tende a diventare nullo. Nell'ipotesi che siano presenti anche delle armature trasversali queste sono in grado di ostacolare l'aprirsi delle fessure, il contatto tra i due lembi della fessura è maggiore e quindi, la forza di compressione ed il conseguente effetto di ingranamento hanno maggiore efficacia. Possiamo perciò affermare che tale meccanismo è enfatizzato in presenza di armature trasversali.

Indichiamo tale effetto con V_a e lo esprimiamo in funzione del rapporto tra un momento di compressione ed il momento effettivamente agente sulla sezione.



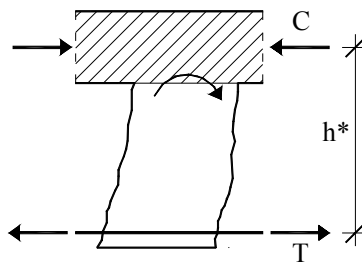
2. *effetto spinotto* (dowel action)

Indicato con V_d , è da scriversi all'elevata rigidezza dell'armatura longitudinale, se si considera questa come una trave incastrata nei due blocchi contigui e separati da una fessura: i due lembi tendono a scorrere tra di loro ma la presenza dell'armatura longitudinale esercita un'azione di opposizione allo scorrimento per cui nel cls si generano delle forze che tendono a ridurre tale fenomeno. Tale effetto dipende dalla percentuale di armatura longitudinale e ancora una volta risulta accentuato in presenza di armatura trasversale dal momento che le staffe, sorreggendo l'armatura longitudinale, possono impedire, o almeno ritardare la deformazione di queste e il conseguente distacco del copriferro.



3. *flessione del dente di calcestruzzo* (e resistenza a trazione del cls)

Se consideriamo la zona di cls compresa tra due fessure e la parte superiore compressa, nella sezione di incastro della mensola si forma un momento M_c . Tale momento è dovuto alla resistenza a flessione dei denti e dipende principalmente dalla dimensione della sezione di incastro detta s . In presenza di armatura a taglio, le tensioni di trazione si riducono sensibilmente dal momento che le bielle risultano compresse.



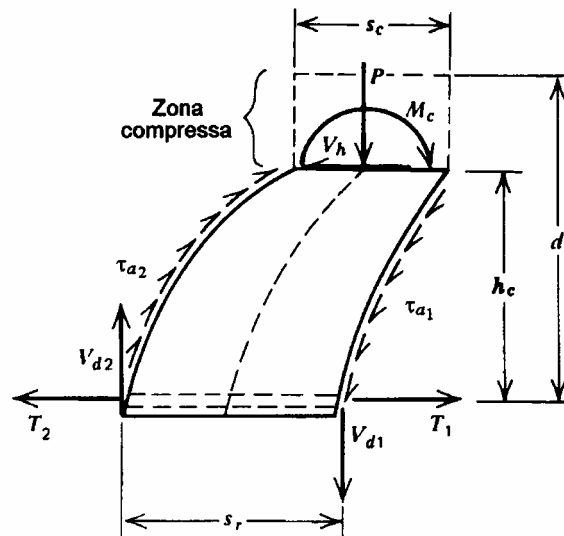
Tali fenomeni, sebbene siano difficili da quantizzare, danno un indubbio contributo alla resistenza a taglio tanto maggiore se gli elementi in c.a. sono dotati di un'apposita armatura a staffe o ad elementi piegati. Per sollecitazioni molto alte, e quindi in condizioni prossime a quelle di rottura, però, tali effetti tendono a ridursi fin quasi ad annullarsi. Quando ad esempio le fessure diventano troppo grandi, i punti di contatto tra le due facce diminuiscono notevolmente, le tensioni tangenziali si sviluppano molto poco e l'ingranamento diventa poco significativo. Così come nell'effetto spinotto, se le barre si deformano notevolmente queste distaccano il cls di copriferro che le ricopre per la sua resistenza generalmente modesta. Riguardo alla flessione del dente di cls, sappiamo che dipende dall'altezza s e che questa lunghezza si riduce notevolmente se le fessure si estendono anche nella zona compressa; anzi, in casi estremi, la riduzione di tale sezione permette anche una rotazione relativa tra due sezioni contigue con conseguente perdita di ingranamento degli inerti, impossibilità di ripristino dell'equilibrio e collasso della trave.

6.2. TRAVE DOTATA DI ARMATURA TRASVERSALE

Vediamo ora cosa succede se alla trave in esame aggiungiamo le armature trasversali (staffe o ferri piegati); l'introduzione dell'armatura d'anima, che non ha direzione parallela né a T (trazione nell'armatura longitudinale) né a C (compressione nella biella di cls), fa sì che tra le due forze possa aversi l'equilibrio, creando un meccanismo tipo traliccio Ritter-Morsch. Infatti, in assenza della staffa mancava il terzo elemento che chiudeva il poligono dell'equilibrio.

Quindi all'ingranamento degli inerti, all'effetto spinotto e alla flessione del dente in cls biella si sovrappone l'effetto del traliccio; pertanto la presenza dell'armatura trasversale non cambia gli effetti considerati qualitativamente ma quantitativamente.

Per analizzare in dettaglio il comportamento di una trave armata a taglio possiamo scrivere una relazione di equilibrio alla rotazione su un dente di cls compreso tra due fessure.



$$\Delta T h^* = (V_d + V_a) s + M_c + F_s \sin \beta h^* \operatorname{ctg} \alpha + F_s \cos \beta h^* \quad (8)$$

dove: $\Delta T = T_2 - T_1$ è la variazione della forza di trazione nell'acciaio dovuta alla variazione del momento flettente;

$h^* = z = d$ è il braccio delle forze interne;

V_d è il taglio portato dall'armatura longitudinale per effetto spinotto;

V_a è la componente tangenziale della forza trasmessa per ingranamento degli inerti;

s è la distanza tra due fessure successive;

M_c è il momento sopportato nella sezione di incastro della mensola di calcestruzzo;

F_s è la forza agente nell'armatura d'anima;

α è l'angolo formato dalla biella compressa di cls con l'asse della trave;

β è l'angolo formato dalla biella tesa dell'armatura con l'asse della trave.

Ponendo $\Delta T = (dT / dx) s$ e ricordando che $T = M / h^*$ e che $V = dM / dx$ si ha che:

$$\Delta T = V s / h^*$$

che sostituita in (8) dà:

$$(V - (V_d + V_a + M_c / h^*)) s = + F_s h^* (\sin \beta \operatorname{ctg} \alpha + \cos \beta) \quad \text{ossia:}$$

$$F_s / s = (V - V_c) / (h^* \sin \beta (\operatorname{ctg} \alpha + \cot \beta)) \quad (9)$$

dove: $V_c = (V_d + V_a + M_c / s)$ è la somma di tutti i contributi del cls che prescindono dalla presenza dell'armatura.

Sappiamo che α è l'angolo di inclinazione delle fessure. Nella realtà, tale angolo è variabile lungo l'asse della trave tra i 45° e i 60° sugli appoggi fino a diventare sub-verticale in mezzzeria. Se poniamo, per semplicità $\alpha = 45^\circ$ la (9) diventa:

$$F_s / s = (V - V_c) / (h^* (\sin\beta + \cos\beta)) \quad (10)$$

Per $\beta = 90^\circ$, cioè con un armatura a staffe la (10) è:

$$F_s / s = (V - V_c) / h^*$$

che è proprio l'espressione ricavata dal traliccio di Morsch ($V \Delta z = S h^*$) a meno del termine V_c . Analogamente per $\beta = 45^\circ$, cioè con un'armatura a ferri piegati, la (10) si particolarizza in:

$$F_s / s = (V - V_c) / h^* \sqrt{2}$$

Da notare che il termine $V_c = (V_d + V_a + M_c / s)$, somma di tutti i contributi degli effetti del cls è regolato dalla Normativa (D.M. 1996) ed è differente a seconda che nell'elemento trave ci sia o meno un'armatura a taglio.

7. INTERAZIONE TRA FLESSIONE E TAGLIO

Da prove sperimentali si è notato che nelle travi adeguatamente armate a taglio, la resistenza flessionale non varia sensibilmente; ciò nonostante, è proprio a causa del taglio che la direzione delle fessure che si formano all'interno dell'elemento è inclinata con la conseguenza che la trazione T nell'elemento non coincide con la forza prevista dalla teoria della flessione. Questo può essere facilmente dimostrato se scriviamo le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno ad un polo appartenente all'asse della zona compressa di un blocco di cls (sezione 1) e poi intorno ad un altro polo appartenente all'asse dell'armatura tesa di un blocco di trave delimitato da due fessure successive (sezione 2).

Nell'ipotesi di assenza di armatura, nel primo caso il momento risultante agente nella sezione 1 è:

$$M_1 = T h^*$$

Mentre nel secondo, il momento agente nella sezione 2 è pari a:

$$M_2 = M_1 - V h^* \operatorname{ctg}\alpha$$

Secondo la teoria della flessione, nella sezione 2 l'armatura dovrebbe essere sollecitata dalla forza:

$$T_{2f} = M_2 / h^* = (M_1 / h^*) - V \operatorname{ctg}\alpha$$

Da cui ne deriva che, rispetto alla teoria flessionale, nella valutazione della trazione esiste un termine incrementale pari a $V \operatorname{ctg}\alpha$:

$$T = T_{2f} + V \operatorname{ctg}\alpha$$

Questo effetto è tenuto in debito conto anche dalla Normativa, e come si vedrà più avanti, basta far scorrere il diagramma dei momenti con cui si progettano le armature di una quantità $(h^* \operatorname{ctg}\alpha) \approx (0.9$

$h \operatorname{ctg}\alpha$) in modo tale che in ogni sezione il momento considerato sia maggiore di quello considerato nella semplice sezione retta, che in questo caso perde di significato.

Se, invece, la trave è armata, nell'equazione di equilibrio bisogna introdurre anche il termine legato all'armatura e la relazione diventa:

$$M_1 = T h^* + F_s \sin\beta s / 2$$

Dove s è la distanza tra la prima e l'ultima delle barre che attraversano la fessura e pari a:
 $h^* (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$

ricordando che:

$$F_s / s = V / (h^* \sin\beta (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)) \quad \text{e quindi pari a: } F_s = V / \sin\beta$$

Possiamo scrivere che:

$$M_1 = T h^* + V h^* (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) / 2$$

E quindi il momento in corrispondenza della barra di acciaio tesa è:

$$M_2 = T_2 h^* + V h^* (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) / 2 - V h^* \operatorname{ctg}\alpha$$

Ovvero:

$$T_2 = T_{2f} + V (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) / 2$$

Come si può notare, in tal caso, per il proporzionamento dell'armatura longitudinale, il diagramma dei momenti deve essere traslato di una quantità pari a:

$$a_1 = h^* (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) / 2$$

Come si vedrà in seguito, la Normativa tiene conto di questa distanza a_1 di cui traslare i diagrammi, ma non opera alcuna differenza nei confronti della presenza di armature o meno né della loro disposizione all'interno dell'elemento trave.

8. LE NORMATIVE NEL PROGETTO DEGLI ELEMENTI A TAGLIO

8.1. METODO DELLE TENSIONI AMMISSIBILI

Come si è visto, il comportamento delle travi in c.a. fessurate per l'effetto combinato di taglio e flessione è piuttosto complesso e la stima dei contributi dei diversi meccanismi resistenti non è semplicemente deducibile dalla legge tensione-deformazione, ma devono essere ricavati da prove sperimentali, formule empiriche e dall'osservazione degli elementi in fase di esercizio. Inoltre i modelli utilizzati per valutare la resistenza (quali il traliccio di Morsch) sono utilizzati per scrivere solo equazioni di equilibrio e non di congruenza dal momento che il loro funzionamento si attiva solo in una avanzata fase di plasticizzazione, quando la congruenza non è più necessaria. Per tale motivo non si conducono due analisi separate, una in fase elastica e una allo stato limite ultimo, ma un unico calcolo a rottura, opportunamente adattato con i coefficienti di sicurezza nel metodo alle Tensioni Ammissibili.

La norma di riferimento per il calcolo delle tensioni tangenziali è la 1086/71 al paragrafo 3.1.4 .
 Vengono definiti due valori ammissibili dipendenti dalla resistenza caratteristica del cls:

$$\tau_{co} = 0.4 + (R_{bk} - 15) / 75 \quad (\text{N/mm}^2) \quad \text{oppure} \quad 4 + (R_{bk} - 150) / 75 \quad (\text{kg/cm}^2)$$

$$\tau_{cl} = 1.4 + (R_{bk} - 15) / 35 \quad (\text{N/mm}^2) \quad \text{oppure} \quad 14 + (R_{bk} - 150) / 35 \quad (\text{kg/cm}^2)$$

Lo stato di sollecitazione del calcestruzzo è la tensione tangenziale massima τ calcolata mediante l'equazione:

$$\tau = V S / (I b)$$

Se tali tensioni tangenziali non superano i valori di τ_{co} la verifica delle armature a taglio e a torsione non è richiesta. Ciò nonostante, deve essere prevista una minima quantità di armatura che rispetti le seguenti condizioni:

$$s \leq \min \{0.8 d, 0.33m\} \quad \text{e che} \quad A_s / s \geq 0.1 V / (0.9 d \tau_{co})$$

Se invece la nostra τ è maggiore di τ_{co} , ma comunque non supera il valore di τ_{cl} , la trave deve essere dotata di una specifica armatura a taglio che deve assorbire l'intera sollecitazione.

Il dimensionamento è basato sull'equazione:

$$F_s / s = V_s / h^* \sin\beta (\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta)$$

Che, ipotizzando le bielle a 45° (formanti un angolo α con l'asse della trave) diventa:

$$F_s / s = V_s / h^* (\sin\beta + \cos\beta)$$

Detti s interasse tra le armature (siano esse staffe o piegati);

F_s forza sopportata da ciascuna armatura;

A_s area di ferro necessaria che attraversano il piano medio della trave;

$$A_s = F_s / \sigma_s = V_s s / (h^* (\sin\beta + \cos\beta) \sigma_s)$$

Se si prevede un'armatura a staffe $\beta = 90^\circ$:

$$A_s = V_s s / (h^* \sigma_s)$$

Per i ferri piegati, invece, $\beta = 45^\circ$ e per cui:

$$A_s = V_s s / (\sqrt{2} h^* \sigma_s)$$

Quale che sia la scelta progettuale di tale armatura, almeno il 40 % della forza totale di scorrimento deve essere assorbita da staffe.

8.2. METODO AGLI STATI LIMITE ULTIMI

8.2.1. Travi non armate

La verifica consiste nel paragonare il taglio di calcolo V_d con quello resistente V_{cu} portato dal cls secondo i meccanismi precedentemente descritti.

$$V_{cu} = (0.25 b_w d f_{ctd}) (1 + 50 \rho_{sl}) r \delta$$

in cui: $(0.25 b_w d f_{ctd})$ è il 25% della resistenza a trazione del cls per l'area della sezione;

- 0.25 è un coefficiente riduttivo in quanto solo una parte dell'altezza della sezione è costituita da cls integro (ricordiamo che la rottura bilanciata si ha per $x_c = 0.2593 h$);
- b_w larghezza della sezione, così indicata in quanto, se facessimo riferimento ad una sezione a T, essa sarebbe relativa all'anima della trave cui viene affidato il compito di resistere al taglio, mentre le ali resistono al momento;
- d altezza utile della sezione;
- f_{ctd} resistenza a trazione del cls e pari a f_{ctk}/γ_c ;
- $(1 + 50\rho_{sl})$ coefficiente dipendente dalla percentuale geometrica di armatura in zona tesa $\rho_{sl} = A_{sl}/(b_w d)$ per tener conto dell'effetto spinotto che si esplica attraverso una coppia di forze trasversali all'armatura che riduce il momento (mai maggiore di 0.02);
- r pari a $(1.6 - d)$, coefficiente che tiene conto dell'effetto dell'ingranamento degli inerti, funzione del rapporto tra l'altezza utile d della trave e la dimensione dell'inerte stesso, trascurabile al crescere di d oltre 0.6 m;
- δ coefficiente funzione dello stato di sollecitazione normale della sezione:
 = 1 flessione semplice (in assenza di sforzo normale)
 = 0 tensoflessione
 = $(1 + M_o/M_{sdu})$ pressoflessione e dove
 M_o momento di decompressione, ossia quel valore del momento che provoca una tensione nulla nella fibra meno sollecitata a compressione (e pari a $N \cdot \rho_n$);
 M_{sdu} momento che sollecita la sezione in cui si effettua la verifica a taglio;

Se la verifica $V_d < V_{cu}$ è soddisfatta allora va posta lo stesso quantitativo di armatura minima indicato nel metodo alle Tensioni Ammissibili, altrimenti, nel caso che $V_d > V_{cu}$ almeno il 50% della forza di taglio deve essere equilibrata dalle armature.

8.2.2. Travi armate

Nelle travi siffatte la crisi può essere dovuta o all'acciaio teso o al cls compresso; si possono allora definire 2 stati limite, cioè 2 valori di taglio ultimo con cui confrontare il taglio di progetto:

$$V_1 = V_{sd} + V_{cd} \quad \text{Stato limite per elementi tesi}$$

$$V_2 = V_{cd} \quad \text{Stato limite per elementi compressi}$$

Nella verifica del cls compresso, si richiede che:

$$\sigma_c \leq \varepsilon f_{cd}$$

dove ε è un fattore di riduzione della resistenza che tiene conto della schematicità del modello ed è pari a 2/3
 f_{cd} è la resistenza di calcolo a compressione

Ricordando che:

$$\sigma_c = 2 \tau / (1 + \text{ctg}\beta) \quad \text{e che} \quad \tau = V / b_w z$$

la condizione $\sigma_c \leq \varepsilon f_{cd}$ implica:

$$V_d \leq 0.5 \varepsilon f_{cd} (1 + \text{ctg}\beta) b_w z \quad \text{ossia: } V_d \leq 0.3 f_{cd} (1 + \text{ctg}\beta) b_w d$$

Che vale se le staffe sono inclinate ($45^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$) e limitate superiormente dal valore: $0.45 f_{cd} b_w d$.

Nel caso in cui l'armatura trasversale sia costituita da staffe ortogonali alla linea media ($\beta = 90^\circ$):

$$V_d \leq 0.3 f_{cd} b_w d$$

Nella verifica degli elementi tesi, l'armatura deve essere progettata in modo tale che:

$$V_d \leq V_{cu} + V_{su}$$

Dove V_{cu} è il taglio portato dal cls

V_{su} è il taglio portato dall'armatura

L'aliquota del taglio portato dal cls è dovuto agli effetti che si mobilitano indipendentemente dalla presenza dell'armatura trasversale ed è pari a:

$$V_{cu} = 0.6 f_{ctd} b_w d \delta$$

con l'ovvio significato dei simboli. Come si può notare il coefficiente 0.25 è diventato 0.6 ed inoltre non compaiono i termini $(1.6 - d)$ e $(1 + 50 \rho_{sl})$; ciò è dovuto al fatto che, in questo caso, i fenomeni legati a tali termini sono inglobati all'interno del contributo del cls compresso in modo forfaitario, in quanto per una trave con armatura trasversale è più difficile la valutazione diretta di tali effetti. L'unico contributo valutato direttamente è quello relativo allo stato di sollecitazione normale della sezione (δ) che, invece, è abbastanza rilevante.

L'aliquota del taglio portato dalle armature viene invece calcolato partendo da:

$$F_s / s = V_s / z (\sin\beta + \cos\beta) \quad e \quad F_s = A_s f_{yd}$$

e ottenendo:

$$V_{su} = A_s f_{yd} 0.9 d (\sin\beta + \cos\beta) / s$$

Se si progetta l'armatura a staffe rette ($\beta = 90^\circ$) e quindi:

$$V_{su} = A_s f_{yd} 0.9 d / s$$

Se si progetta l'armatura a barre piegate ($\beta = 45^\circ$) e quindi:

$$V_{su} = \sqrt{2} A_s f_{yd} 0.9 d / s$$

8.2.3. Verifica armatura longitudinale

Dal momento che nelle travi vi è una forte interazione tra le azioni di momento e taglio, la Normativa impone di effettuare una verifica sull'armatura longitudinale che deve essere dimensionata per resistere al momento sollecitante $M_{sdu}(V)$:

$$M_{sdu}(V) = M_{sdu} + V_{sdu} a_1$$

Dove a_1 è la quantità di cui deve essere traslato il diagramma dei momenti ed è pari a $(0.9 d (1 - \text{ctg } \beta))$ e comunque almeno pari a $(0.2 d)$

E cioè la sollecitazione flessionale deve essere incrementata di una quantità che tiene conto degli effetti delle inclinazioni delle fessure. Da notare che, in assenza di armature si ottiene proprio $a_1 = z$

9. ADERENZA ACCIAIO-CALCESTRUZZO

Una delle ipotesi fondamentali della teoria del cemento armato nelle travi parzializzate soggette a taglio e flessione è la perfetta aderenza tra le barre di acciaio e il calcestruzzo circostante. A seguito di prove sperimentali si è dimostrato che la sollecitazione di aderenza dipende da più fattori:

- lunghezza d'aderenza fra barra e calcestruzzo;
- ruvidezza della superficie della barra;
- valore della σ_f ;
- valore della resistenza a trazione f_{ct} del calcestruzzo;
- posizione della barra entro il getto di calcestruzzo;
- spessore dello strato di calcestruzzo di ricoprimento della barra.

Mostriamo come le tensioni di aderenza si sviluppino per effetto del taglio:

prese due sezioni S ed S' in una trave e distanti tra loro dz, consideriamo l'armatura inferiore (soggetta a trazione) e facciamo l'equilibrio sul tratto dz. Poiché il diagramma del Momento Flettente non è costante, esisterà anche il Taglio e quindi si svilupperanno delle tensioni tangenziali orizzontali lungo il tratto dz.

Imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale del tronco di trave dz ideale omogeneo, posto sotto il piano dell'asse neutro:

$$- T + (T + dT) = \tau b dz = V dz / h^* \quad (10)$$

e dall'equilibrio del tronco dz di armatura metallica si ha:

$$- T + (T + dT) = \tau_{ad} \pi D dz \quad (11)$$

Uguagliando le due espressioni (10) e (11) si ottiene la *tensione media di aderenza*:

$$\tau_{ad} = V / (\pi D h^*) \quad (12)$$

Da cui si deduce che a parità di armatura, al diminuire del diametro delle barre, aumenta il perimetro totale o anche che a parità del rapporto V / h^* , la sollecitazione di aderenza τ_{ad} diminuisce con la suddivisione dell'armatura in barre di piccolo diametro.

Dalla (11) si ricava anche che quanto più rapidamente varia lo sforzo di trazione T dell'armatura, tanto maggiore è la sollecitazione di aderenza:

$$\tau_{ad} = dT / (\pi D dz)$$

Si è detto che l'aderenza acciaio-clc dipende anche dai valori della sollecitazione indotti nella trave. E' chiaro che per valori bassi l'ipotesi della perfetta aderenza tra i due materiali risulta confermata, ma al crescere delle sollecitazioni si creano le prime fessurazioni e un diverso meccanismo resistente costituito da bielle di cls inclinate di un certo angolo θ rispetto all'asse della barra. Tale sforzo può essere diviso nelle due componenti orizzontale e verticale: la prima costituisce la tensione tangenziale τ_{ad} , mentre la seconda, radiale e pari a $\tau_{ad} \operatorname{tg}\theta$, sollecita a trazione gli anelli di cls concentrici alla barra.

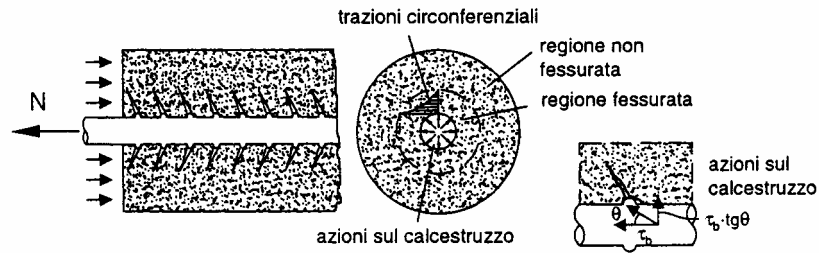
Le tipologie di crisi che possono avvenire sono essenzialmente due:

- *crisi per splitting*

Le fessure longitudinali, parallele alla barra, giungono fino alla superficie dell'elemento con il conseguente collasso degli anelli tesi;

- *crisi per pull-out*

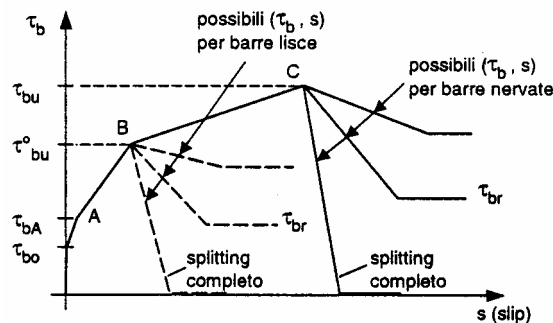
Si ha il collasso delle bielle resistenti con la formazione di un cilindro, costituito dalla barra e dal cls circostante, che scorre internamente all'elemento in cemento armato.



Intuitivamente esiste una differenza a seconda che le barre di acciaio siano lisce o ad aderenza migliorata. Nel primo caso, una volta incrementate ulteriormente le sollecitazioni fino a giungere alla resistenza ultima, se non si è già verificata la crisi per splitting, si ha la crisi per pull-out causata dal progressivo degrado acciaio-clc al crescere degli scorrimenti; nel secondo, i meccanismi di rottura avvengono sempre nello stesso ordine ma i valori della tensione che si attingono sono sempre maggiori di quelli delle barre lisce.

Nelle barre nervate le capacità di resistenza e deformabilità sono maggiori a causa, essenzialmente, di due motivi: l'interlocking tra inerti e nervature è più efficace e tende a degradarsi meno rapidamente e le bielle di cls si mettono in contrasto con le bielle creando delle plasticizzazioni locali.

Nel 1979 Tassios riuscì a diagrammare il legame tensione tangenziale – scorrimento ($\tau_b - s$)



- Detti: τ_{bo} valore limite della tensione tangenziale di *adesione* (individua l'inizio degli scorrimenti);
 τ_{bA} valore limite della tensione tangenziale di *attrito* (individua l'inizio della microfessurazione);
 τ_{bu}^o valore limite della tensione tangenziale di *aderenza* per barre lisce (individua l'inizio della crisi del legame);
 τ_{bu} valore limite della tensione tangenziale di *aderenza* per barre ad aderenza migliorata (individua l'inizio della crisi del legame);
 τ_{br} valore limite della tensione tangenziale di *aderenza* residua (individua l'inizio del collasso del legame).

- Se $\tau_b \leq \tau_{bo}$ MECCANISMO DI ADESIONE: gli scorrimenti tra acciaio e cls sono talmente piccoli che possono essere trascurati; nelle barre ad aderenza migliorata si ha l'interlocking fisico ossia la completa penetrazione del cls con i risalti superficiali della barra di acciaio. All'aumentare della sollecitazione di trazione si passa nell'intervallo successivo;
- se $\tau_{bo} \leq \tau_b \leq \tau_{bA}$ MECCANISMO ATTRITIVO: gli scorrimenti tra i due materiali sono ancora piccoli e la microfessurazione all'interfaccia non è ancora avvenuta. Nelle barre ad aderenza migliorata si ha l'interlocking meccanico dovuto all'ingranamento degli inerti tra le nervature. All'aumentare della sollecitazione di trazione si passa nell'intervallo successivo;
- se $\tau_{bA} \leq \tau_b \leq \tau_{bu}^o$ oppure τ_{bu} MECCANISMO DI ADERENZA: gli scorrimenti tra i due materiali non sono più piccoli e la microfessurazione all'interfaccia sono diffuse. Dopo l'innesco della microfessurazione, le lesioni si propagano rapidamente e interessano il cls intorno alla

barra. Il meccanismo resistente è costruito dalle bielle di cls inclinate di 45° sull'asse della barra le cui componenti tangenziali sono le τ_b .

se τ_{bu}^0 oppure $\tau_{bu} \leq \tau_b \leq \tau_{br}$ MECCANISMO DI ADERENZA RESIDUA: raggiunto il valore di τ_{bu}^0 se le barre sono lisce o di τ_{bu} se sono nervate, il legame decade rapidamente tracciando, a seconda delle modalità di rottura, un ramo decrescente a cui fa seguito un tratto orizzontale. Tale tratto si arresta al valore della τ_b pari a τ_{br} χηε ραππρεσεντα ιλ χολλασσο περο ε προπριο.

Δα νοταρε χηε ι φαττορι χηε ινφλυενζανο ι πριμι δυε τραττι δελ διαγραμμα (αδεσιονε ε ατ τριτο) σονο:

- μοδαλιτδ δι χονφεζιοναμεντο δελ χλσ;
- προχεσσι δι ινδυριμεντο ε ματυραζιονε δελ χλσ;
- φενομενο δελ ριτιρο χηε ινδυχε υνα χομπρεσσιονε ιν διρεζιονε νορμαλε αλλα βαρρα. μεντρε ι φαττορι χηε ινφλυενζανο λα μιχροφεσσυραζιονε (ε θυινδι ιλ παλορε δελλα τενσι ονε δι αδερενζα τ_{bA}) sono:
 - resistenza a trazione del cls;
 - presenza di armature di confinamento;
 - spessore del copriferro.

10. BIBLIOGRAFIA

- C. Faella, *Costruzioni in calcestruzzo armato e precompresso* – Vol. 1A, CUES 2002;
- E. Giangreco, *Ingegneria delle Strutture* – Vol. 2, Utet 2002;
- E. Giangreco, *Teoria e Tecnica delle costruzioni* – Vol. 1, Liguori 1982;
- R. Giannini, *Appunti di Tecnica delle costruzioni*;
- M. Mezzina, *Costruire con il cemento armato* – Utet 2001;
- E. Morsch e M. Viscardini, *Teoria e Pratica del Cemento Armato* – Hoepli 1910;
- E. Radogna, *Tecnica delle costruzioni* – ESA 1991;
- L. Santarella, *Il cemento armato* – Hoepli 1994;

- D.M. 09.01.1996, *Norme tecniche per il calcolo, l'esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche*;
- Eurocodice 2, *Progettazione delle strutture in calcestruzzo* – Parte 1.1: regole generali e regole per gli edifici – ENV1992-1-1.