Due esercizi fatti a lezione

1 Applicazione della conservazione dell' energia meccanica

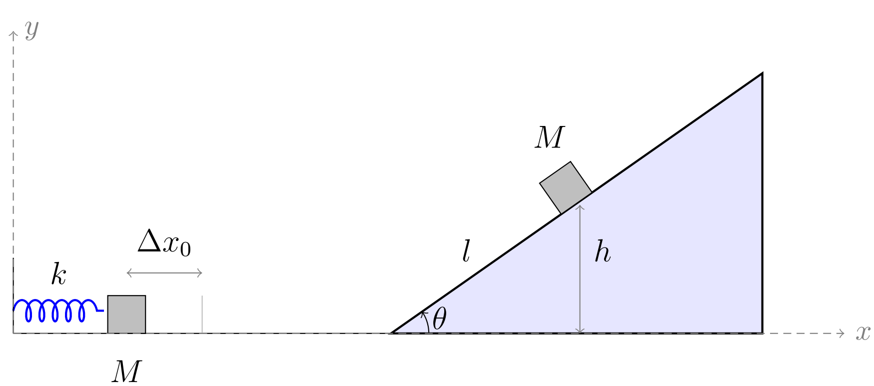
Una massa di $4kg$, posta su un piano orizzontale liscio, è tenuta ferma e comprime di $10cm$ una molla di costante elastica pari a $4000N/m$. Una volta lasciata andare, la massa arriva alla base di un piano inclinato di 60^o sull'orizzontale, privo di attrito ed inizia a risalirlo. Trovare la massima altezza raggiunta sul piano inclinato. (Per semplicità, utilizzare $g = 10m/s^2$)

1. **Leggere attentamente la traccia, distinguere i dati dalle incognite ed assegnare dei simboli alla quantità fisiche in gioco, in modo da risolvere il problema simbolicamente.** Fare attenzione al fatto che alcune informazioni possono essere espresse a parole, anche in modo implicito. Ad esempio, nella traccia si dice che la massa comprime la molla ed è tenuta ferma: quindi la sua velocità iniziale è nulla. Il problema richiede di calcolare l'altezza massima sul piano inclinato. Quando l'altezza massima viene raggiunta, la massa è istantaneamente ferma e quindi anche in quel momento la sua velocità è nulla.

   Dati: massa $M = 4kg$, costante elastica $k = 4000N/m$, compressione della molla $\Delta x_0 = 0.1m$, velocità iniziale $v_i = 0$, angolo del piano $\theta = 60^o$, velocità finale nel momento d'arrivo alla massima altezza $v_f = 0$.

   Incognita: altezza massima raggiunta sul piano inclinato h.

2. **Fare un disegno abbastanza grande da contenere i dettagli necessari e da poter scrivere tutti i simboli accanto ai vari oggetti.** Questo vale sopratutto se si pensa di dover usare la seconda legge della dinamica, in cui è necessario sapere quali sono tutte le forze che agiscono sulle masse. Il disegno fornirà di ogni vettore forza la direzione ed il verso (quindi due delle tre proprietà di ogni vettore), mentre i moduli saranno o assegnati nei dati o noti (ad es. conoscendo la massa M di un corpo sappiamo qual è anche il modulo della forza peso: Mg), oppure da determinare durante l'esercizio, in termini di altre forze o parametri noti. Ma anche nel caso in cui si pensi di usare la conservazione dell'energia meccanica, conviene fare un disegno, in cui rappresentare la situazione iniziale e la situazione finale (ed eventualmente i vettori che descrivono tutte le forze in gioco, se questo può essere d'aiuto). Un disegno che descrive quello che succede nell'esercizio assegnato è il seguente:



3. **Trovare il metodo migliore per risolvere il problema.** Il problema non chiede tempi, e sia i dati sia l'incognita riguardano posizioni e velocità. Durante le varie fasi del moto il corpo è soggetto a due forze conservative: la forza elastica e la forza peso. Sia sul piano orizzontale che sul piano inclinato è presente anche una reazione vincolare, che però, essendo sempre perpendicolare ala direzione del moto della massa, non compie lavoro. Le sole forze che compiono lavoro sono conservative e quindi si conserva l'energia meccanica totale, che è data dalla somma dell'energia cinetica e delle energie potenziali di ciascuna forza conservativa.

4. **Soluzione simbolica del problema.** In questo caso si tratta di ottenere un'espressione algebrica dell'incognita h in termini dei dati del problema.

   Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{mecc} = E_{cin} + E_{pot}^{peso} + E_{pot}^{elastica} = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgy + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2,$$

   dove y indica la quota verticale raggiunta dal corpo durante la salita sul piano inclinato ($y = 0$ sul piano orizzontale e alla base del piano inclinato, così come indicato nel disegno).

   Uguagliando le due espressioni per E_{mecc} nella situazione di partenza, massa che comprime la molla, e nella situazione finale, massa alla massima altezza, $y = h$, sul piano inclinato e notando che in entrambe le situazioni la velocità della massa, e quindi la sua energia cinetica è nulla

$$\begin{aligned} E_{mecc} &= \\ (iniziale) &= 0 + 0 + \frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2 \\ (finale) &= 0 + Mgh + 0. \end{aligned}$$

   Quindi:

$$Mgh = \frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2,$$

   da cui

$$h = \frac{k(\Delta x_0)^2}{2Mg}.$$

5. **Controllo della soluzione simbolica.** I controlli possibili sulla validità della formula ottenuta per la soluzione possono essere:

   - il controllo della dipendenza della soluzione dai parametri che appaiono nell'espressione ottenuta. Ad esempio controllare se è ragionevole che la soluzione sia direttamente proporzionale o inversamente proporzionale ad uno dei parametri.
   - Il controllo di casi semplici o casi limite. La soluzione in forma simbolica, in realtà, risolve infiniti esercizi che differiscono tra loro solo per i valori numerici assegnati ai dati. Può succedere che per particolari valori dei parametri, ad esempi quando un parametro che appare nella soluzione sia moto piccolo o molto grande o abbia un certo valore particolare, l'esercizio diventerebbe molto più semplice al punto che, anche senza

risolverlo esattamente, sia già possibile intuire cosa dovrebbe succedere alla soluzione e quindi controllare se l'espressione ottenuta riproduce ciò che ci si aspetta nel caso limite.

Inutile dire che l'abilità nel fare questi controlli *a posteriori* della soluzione si acquisisce solo facendo molta pratica[1].

In questo problema la soluzione ha una forma molto semplice e mostra che h è direttamente proporzionale a k e al quadrato di Δx_0 e inversamente proporzionale ad M e a g. Consideriamo la dipendenza dal singolo parametro, supponendo di mantenere costanti i rimanenti. A parità di deformazione Δx_0, una molla più rigida, ossia di costante elastica k più grande, immagazzina una maggiore energia potenziale elastica. Poichè è questa energia che la massa ha a disposizione per risalire il piano inclinato e trasformarla in energia potenziale della forza peso nel punto di massima altezza, è corretto che h aumenti se aumenta k. Lo stesso dicasi se, per una molla fissata, quindi per k fissata, aumenta la compressione iniziale Δx_0. Viceversa, nel punto di massima altezza l'energia iniziale si è trasformata in pura energia potenziale della forza peso pari a Mgh. Poiché questo valore è fissato, il prodotto di M ed h è costante (g è costante) e quindi h ed M sono *inversamente proporzionali*, come correttamente indicato dall'espressione ottenuta per h.

Una cosa che si può ancora notare è che l'espressione di h risulta indipendente dall'angolo θ del piano inclinato. Il piano può avere diversa inclinazione, ma l'altezza raggiunta è sempre la stessa perchè l'energia potenziale della forza peso $E_{pot}^{peso} = Mgy$ dipende solo dalla quota della massa. Se cambia l'angolo θ, cambia la lunghezza l percorsa dalla massa lungo il piano inclinato prima di arrivare all'altezza massima h (notare che h ed l sono legati dalla relazione $h = l \sin\theta$) e cambia anche il tempo impiegato a raggiungerla, ma queste due quantità non sono richieste dal problema.

Si potrebbe, infine, controllare che l'espressione a secondo membro ha effettivamente le dimensioni di una lunghezza, ma questo possiamo controllarlo al passo successivo, in cui inseriremo i valori numerici insieme alle corrispondenti unità di misura. Chi volesse cimentarsi con l'*analisi dimensionale* potrebbe provare ad ottenere la formula della soluzione per h, mostrando che è l'unica combinazione dei parametri k, Δx_0, M e g che ha le dimensioni di una lunghezza. Questo ragionamento non potrebbe determinare fattori numerici, come il fattore due a denominatore, ma permetterebbe di stabilire la corretta dipendenza di h dai parametri del problema.

6. **Sostituire i valori numerici, ciascuno con le proprie unità di misura.** In questo modo si controlla che il risultato abbia le unità di misura giuste.

$$h = \frac{4 \times 10^3\, N \times (10^{-1}\, m)^2}{2 \times 4\, kg \times 10\, m/s^2} = 0.5\, m,$$

dove si è usato il fatto che $1\, N = 1\, kg\, m/s^2$.

[1] C'è anche un motivo molto *pratico* per svolgere gli esercizi in forma simbolica. Come detto nel testo, in questo modo risolvono infiniti esercizi che differiscono tra loro solo per i valori numerici assegnati ai dati. Poiché la fantasia dei docenti è *limitata*, potrebbe accadere che uno di questi *infiniti* esercizi capiti allo scritto...

2 Forza d'attrito e applicazione del Teorema Generalizzato dell'Energia Cinetica

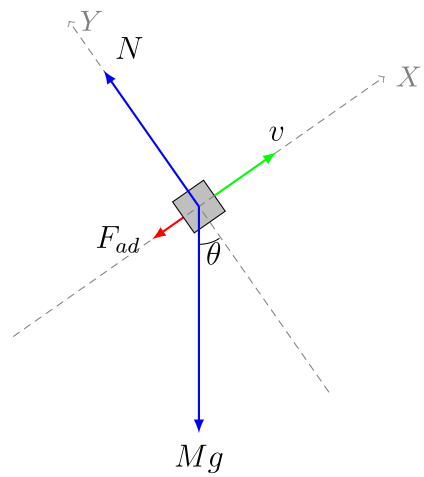
Una massa di $4kg$, posta su un piano orizzontale liscio, è tenuta ferma e comprime di $10cm$ una molla di costante elastica pari a $4000N/m$. Una volta lasciata andare, la massa arriva alla base di un piano scabro con coefficiente di attrito dinamico pari a 0.25, inclinato di 60^o sull'orizzontale e ed inizia a risalirlo. Trovare la massima altezza raggiunta sul piano inclinato. (Per semplicità, utilizzare $g = 10m/s^2$).

1. **Leggere attentamente la traccia, distinguere dati da incognite ed assegnare dei simboli alla quantità fisiche in gioco, in modo da risolvere algebricamente il problema.** Fare attenzione al fatto che alcune informazioni possono essere dette a parole, anche in modo implicito. Ad esempio, nella traccia si dice che la massa comprime la molla ed è tenuta ferma: quindi la sua velocità iniziale è nulla. Il problema richiede di calcolare l'altezza massima sul piano inclinato. Quando l'altezza massima viene raggiunta, la massa è istantaneamente ferma, quindi in quel momento la sua velocità è nulla. Rispetto all'esercizio precedente, questa volta c'è attrito tra la massa ed il piano inclinato, caratterizzato dal coefficiente d'attrito assegnato.

   Dati: massa $M = 4kg$, costante elastica $k = 4000N/m$, compressione della molla $\Delta x_0 = 0.1m$, velocità iniziale $v_i = 0$, angolo del piano $\theta = 60^o$, velocità finale nel momento d'arrivo alla massima altezza $v_f = 0$, coefficiente d'attrito dinamico $\mu_d = 0.25$.

   Incognita: l'altezza massima raggiunta sul piano inclinato che conviene indicare con h', per distinguerla da quella ottenuta dal caso senza attrito, h, con la cui espressione potrà essere confrontata, come controllo.

2. **Fare un disegno abbastanza grande da contenere i dettagli necessari e da poter scrivere tutti i simboli accanto ai vari oggetti.** Nell'esercizio precedente, in cui abbiamo utilizzato la conservazione dell'energia meccanica, è stato comunque utile fare un disegno in cui rappresentare la situazione iniziale e la situazione finale della massa. In questo caso, in cui sono presenti anche forze d'attrito sul piano inclinato, conviene disegnare il cosiddetto *diagramma di corpo libero*, in cui rappresentare tutte le forze che agiscono sulla massa nel suo moto di risalita sul piano inclinato. Il disegno fornirà di ogni vettore forza la direzione ed il verso (quindi due delle tre proprietà di ogni vettore), mentre i moduli saranno o assegnati nei dati o noti (ad es. conoscendo la massa M del corpo sappiamo qual è anche il modulo della forza peso: Mg), oppure da determinare durante l'esercizio. Per non appesantire la notazione, i vari vettori forza sono indicati con un simbolo (senza la freccia sopra) che ne indica il valore del modulo. Ricordando che la forza d'attrito dinamico si oppone al moto, ovvero ha sempre direzione opposta alla velocità istantanea del corpo, è conveniente disegnare anche un vettore che indichi direzione e verso della velocità della massa mentre risale il piano inclinato. La forza d'attrito dinamico avrà verso opposto.



Nel disegno è riportato anche il sistema di assi cartesiani (diversi da quelli usati in precedenza, x e y) che conviene usare nella descrizione del moto lungo il piano inclinato e per la decomposizione delle forze. Conviene sempre scegliere uno degli assi, qui l'asse X, nella direzione in cui si svolge il moto, ovvero nella direzione dell' accelerazione, che in accordo col 2° Principio della Dinamica ha la direzione e il verso della risultante delle forze applicate al corpo. Nel caso del piano inclinato, nella direzione perpendicolare al piano (nella figura, la direzione scelta per l'asse Y) le forze si bilanciano, mentre non sono bilanciate lungo la direzione parallela al piano inclinato, l'asse X, lungo cui, quindi, avverrà il moto.

3. **Trovare il metodo migliore per risolvere il problema.** Il problema non chiede tempi, e sia i dati sia l'incognita riguardano posizioni e velocità. Durante le varie fasi del moto il corpo è soggetto a due forze conservative: la forza elastica e la forza peso. Il piano orizzontale ed il piano inclinato, esercitano reazioni vincolari, che però, essendo perpendicolari alla direzione del moto non compiono lavoro. Tuttavia, nel moto sul piano inclinato, ora è presente anche la forza d'attrito dinamico, che agisce nella stessa direzione, ma in verso opposto alla velocità istantanea e quindi allo spostamento del corpo, producendo un lavoro *negativo*. La forza d'attrito dinamico è non conservativa e quindi non si può introdurre un'energia potenziale associata ad essa ed ottenere una energia meccanica che si conservi durante il moto. E' tuttavia possibile applicare il Teorema Generalizzato dell'Energia Cinetica, che afferma che in presenza sia di forze conservative sia di forze non conservative, l'energia meccanica ottenuta sommando l'energia cinetica e le energie potenziali delle forze conservative, non resta costante durante il moto, e la sua variazione e' uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative (che, ricordiamo, sono forze il cui lavoro non dipende sotanto dalle posizioni iniziale e finale del corpo, ma anche dal cammino che le congiunge e per questa ragione non puo' essere scritto in temini di un'energia potenziale).

   I passi da fare sono due:

   - definire l'energia meccanica associata alle solo forze conservative, che anche in questo caso sono la forza peso e la forza elastica:

     $$E_{mecc} = E_{cin} + E_{pot}^{peso} + E_{pot}^{elastica} = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgy + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2,$$

     dove y, come nell'esercizio precedente, è la quota verticale della massa M;

- applicare il Teorema Generalizzato dell'Energia Cinetica:

$$\Delta E_{mecc} = E^f_{mecc} - E^i_{mecc} = L^{NC}_{i\to f}(\gamma),$$

dove $L^{NC}_{i\to f}(\gamma)$ è il lavoro svolto sul corpo dalle forze non conservative durante il cammino γ che ha condotto il corpo dalla posizione iniziale i alla posizione finale f. Come gia' detto, infatti, il lavoro fatto da una forza non conservativa *dipende dal cammino fatto per andare dalla posizione iniziale a quella finale.*

In questo caso il cammino fatto dalla massa M è composto di due parti: moto lungo il piano orizzontale senza attrito e moto di risalita lungo il piano inclinato scabro [2]. E' solo nel secondo tratto che agisce la forza d'attrito dinamico, producendo l'unico contributo a $L^{NC}_{i\to f}(\gamma)$.

Il modulo della forza d'attrito dinamico è dato da

$$F_{ad} = \mu_d N$$

dove N è il modulo della reazione vincolare prodotta dal piano inclinato sul corpo di massa M. Facendo riferimento al diagramma di corpo libero della massa M, la reazione vincolare bilancia la componente della forza peso che è diretta in verso opposto a quello scelto come positivo per l'asse Y. Quindi, con un po' di trigonometria, si ottiene la solita relazione

$$N = Mg\cos\theta,$$

da cui il valore costante

$$F_{ad} = \mu_d Mg\cos\theta.$$

Nel moto di risalita M mantiene sempre lo stesso verso, quello delle X positive, e quindi la forza d'attrito si comporta come una forza costante con verso opposto allo spostamento, così come indicato nel diagramma di corpo libero. Il lavoro fatto da $\vec{F}_{ad}$ sarà quindi uguale a

$$L^{\vec{F}_{ad}}(piano\, inclinato) = \vec{F}_{ad}\cdot\vec{s} = |\vec{F}_{ad}|\,|\vec{s}|\cos(180^o) = (\mu_d Mg\cos\theta)\ l\ (-1) = -\mu_d Mg\ l\cos\theta,$$

dove $\vec{s}$ è lo spostamento, il cui modulo è indicato con l, lungo il piano inclinato dalla base fino al punto in cui raggiunge la massima altezza. L'angolo di 180^o tra i due vettori $\vec{F}_{ad}$ e $\vec{s}$, che hanno sempre verso opposto, fa sì che $\cos(180^o) = -1$ e quindi che il lavoro prodotto dall'attrito sia negativo .

D'altra parte, le due espressioni dell'energia meccanica iniziale e finale sono:

$$E^i_{mecc} = \frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2, \qquad E^f_{mecc} = Mgh'.$$

e quindi

$$Mgh' - \frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2 = -\mu_d Mgl\cos\theta = -\mu_d Mg\frac{h'}{\sin\theta}\cos\theta$$

[2] Ci sarebbe anche una fase di moto armonico mentre la massa è spinta dalla molla prima di distaccarsene, ma questo dettaglio è irrilevante nella discussione, se non per dire che è in quel tratto che l'energia potenziale elastica si trasforma nell'energia cinetica che la massa ha sul piano orizzontale e alla base del piano inclinato.

dove, si è usata la relazione $h' = l \sin\theta$ tra altezza raggiunta e spazio percorso sul piano inclinato. Raggruppando i termini contenenti h' si ha

$$Mgh'\left(1+\mu_d\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2$$

da cui la soluzione al problema in forma simbolica:

$$h'=\frac{\frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2}{Mg\left(1+\mu_d\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

4. **Controllo della soluzione ottenuta in forma simbolica.**

   Al contrario del caso precedente, l'espressione dell'altezza massima raggiunta in presenza di attrito h' dipende in modo non banale sia dal coefficiente d'attrito dinamico μ_d, sia dall'angolo θ del piano inclinato. Questo fatto permette di fare alcuni di controlli sulla correttezza dell'espressione ottenuta per la soluzione del problema.

   (a) Caso limite $\mu_d \to 0$. La soluzione ottenuta si riduce, come c'era da aspettarsi, a

   $$h' \to \frac{k(\Delta x_0)^2}{2Mg} = h$$

   cioè all'espressione ottenuta nel caso senza attrito.

   (b) Ancora un confronto con l'altezza ottenuta nel caso senza attrito. L'espressione di h' può essere scritta direttamente in termini di h

   $$h'=\frac{h}{\left(1+\mu_d\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

   Poiche $\mu_d > 0$ e l'angolo d'inclinazione $0 < \theta < 90^o$, anche $\sin\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$ e quindi il denominatore è maggiore di 1. Questo vuol dire che $h' < h$. Questo e' quello che ci si aspetta a causa del fatto che parte dell'energia meccanica iniziale è stata sottratta a quella finale dal lavoro negativo della forza d'attrito dinamico. La massa M avendo a disposizione meno energia meccanica finale, avrà meno energia potenziale dovuta alla forza peso al momento dell'arresto e quindi si fermerà ad una quota più bassa che in assenza d'attrito.

   (c) Fissati la quota h che la massa raggiungerebbe in assenza d'attrito e il coefficiente d'attrito dinamico μ_d, è possibile esaminare la dipendenza di h' dall'angolo d'inclinazione θ del piano inclinato in casi limite (magari riguardando come si modificherebbe il disegno in questi casi limite).

   - $\theta \sim 0$. Per angoli molto piccoli la formula dice che $h' \sim 0$. La ragione è che se l'angolo d'inclinazione è piccolo, anche $\sin\theta$ è piccolo, mentre $\cos\theta \sim 1$ e, a causa della relazione $h' = l\sin\theta$, per raggiungere una quota verticale la massa deve percorrere molto spazio sul piano inclinato perdendo sempre più energia a causa del lavoro della forza d'attrito, che è proporzionale alla lunghezza l percorsa lungo il piano inclinato.

- $\theta \sim 90^o$. Per angoli prossimi all'angolo retto, la formula dice che $h' \sim h$. La ragione è che se $\theta \sim 90^o$, $\sin\theta \sim 1$ è, mentre $\cos\theta \sim 0$. Poiché la forza d'attrito è proporzionale alla reazione vincolare $N = Mg\cos\theta \sim 0$, la forza d'attrito diventa trascurabile e l'altezza è prossima al valore in assenza d'attrito h. In altre parole, se deve risalire un piano verticale, il corpo non ci si appoggia, perché non ci sarebbe componente della forza peso perpendicolare al piano, e quindi il corpo, non appoggiandosi al piano inclinato, muovendosi in verticale, non risentirebbe dell'attrito.

(d) **Sostituzione dei valori numerici, ciascuno con le proprie unità di misura.** In questo modo si controlla che il risultato abbia le unità di misura giuste. Poiché

$$\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

si ha

$$h' = \frac{4 \times 10^3\, N \times (10^{-1}\, m)^2}{2 \times 4\, kg \times 10\, m/s^2 \left(1 + 0.25 \frac{1}{1.73}\right)} = 0.44\, m,$$

dove si è usato il fatto che $1\, N = 1\, kg\, m/s^2$.