

Programma di Topologia algebrica

Prof. Sara Dragotti

a.a. 2015-16

Prerequisiti

(Questi argomenti sono stati comunque svolti a lezione, perché non sempre presenti nei programmi dei corsi di geometria della triennale).

Compattificazione e compactificazioni notevoli. Numero di Lebesgue relativo ad un ricoprimento di uno spazio compatto.

Cammini di uno spazio topologico. Connessione per cammini.

Argomenti

Categorie e funtori: nozioni fondamentali, esempi di funtori classici.

Successioni esatte e quasi esatte di gruppi ed omomorfismi. Gruppi graduati.

Omotopia tra funzioni continue. Omotopia tra spazi topologici. Omotopia relativa. Retratti e retratti di deformazione. Spazi contraibili.

Cammini. Omotopia di cammini. Gruppo fondamentale di uno spazio puntato. Spazi semplicemente connessi. Relazione tra i gruppi fondamentali di uno spazio puntato in due punti diversi. Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto. Il funtore gruppo fondamentale e sue proprietà. Gruppo fondamentale della circonferenza e del toro.

Cenni ai gruppi di omotopia di ordine superiore di uno spazio puntato ed alla loro abelianità. Gruppi di omotopia delle sfere: una n -sfera di dimensione positiva è $(n-1)$ -connessa, ma non è n -connessa.

Varietà topologiche: definizione, dimensione e dimensione locale, proprietà di omogeneità. Superfici.

Complessi simpliciali. Complessi orientati. Poliedri, triangolazioni, suddivisioni. Applicazioni simpliciali. Teorema di approssimazione simpliciale.

Complessi di catene. Applicazioni di catene e loro omotopia. Omologia di un complesso di catene.

Omologia simpliciale. Omologia singolare. Omologia 0-dimensionale di un complesso connesso. Il funtore omologia. Isomorfismo tra l'omologia simpliciale e l'omologia singolare di un poliedro.

Invarianza omotopica del funtore omologia. Assioma della dimensione per l'omologia. Omologia relativa. Successione esatta di omologia. Successione di Mayer-Vietoris e sua applicazione al calcolo dei gruppi di omologia delle sfere. Escissione. Relazione tra il gruppo fondamentale e il gruppo di omologia di dimensione uno. Teorema di Hurewicz (solo enunciato). Teorema di Brouwer del punto fisso. Teorema di Brouwer di invarianza della dimensione.

Omomorfismi indotti in omologia da particolari applicazioni sulla sfera. Campi di vettori tangenti ad una sfera di dimensione dispari. Grado di un'applicazione di una sfera in sé. Teorema fondamentale dell'algebra.

Caratteristica di Eulero-Poincaré di un poliedro e sua invarianza topologica. Cenno al teorema che la caratteristica di Eulero e l'orientabilità sono sufficienti a classificare le superfici chiuse e connesse.

Testi di riferimento

M.J. Greenberg	Lectures on algebraic topology
P.J. Hilton, S. Wylie	Homology theory
L. Lomonaco	Elementi di topologia algebrica
W.S. Massey	Algebraic topology: an introduction
C.R.F. Maunder	Algebraic topology
I.M. Singer, J.A. Thorpe	Lecture notes on elementary topology and geometry
E.H. Spanier	Algebraic topology
G. Tallini	Strutture geometriche

Su alcuni argomenti sono anche disponibili appunti dalle lezioni presenti nel sito del docente.